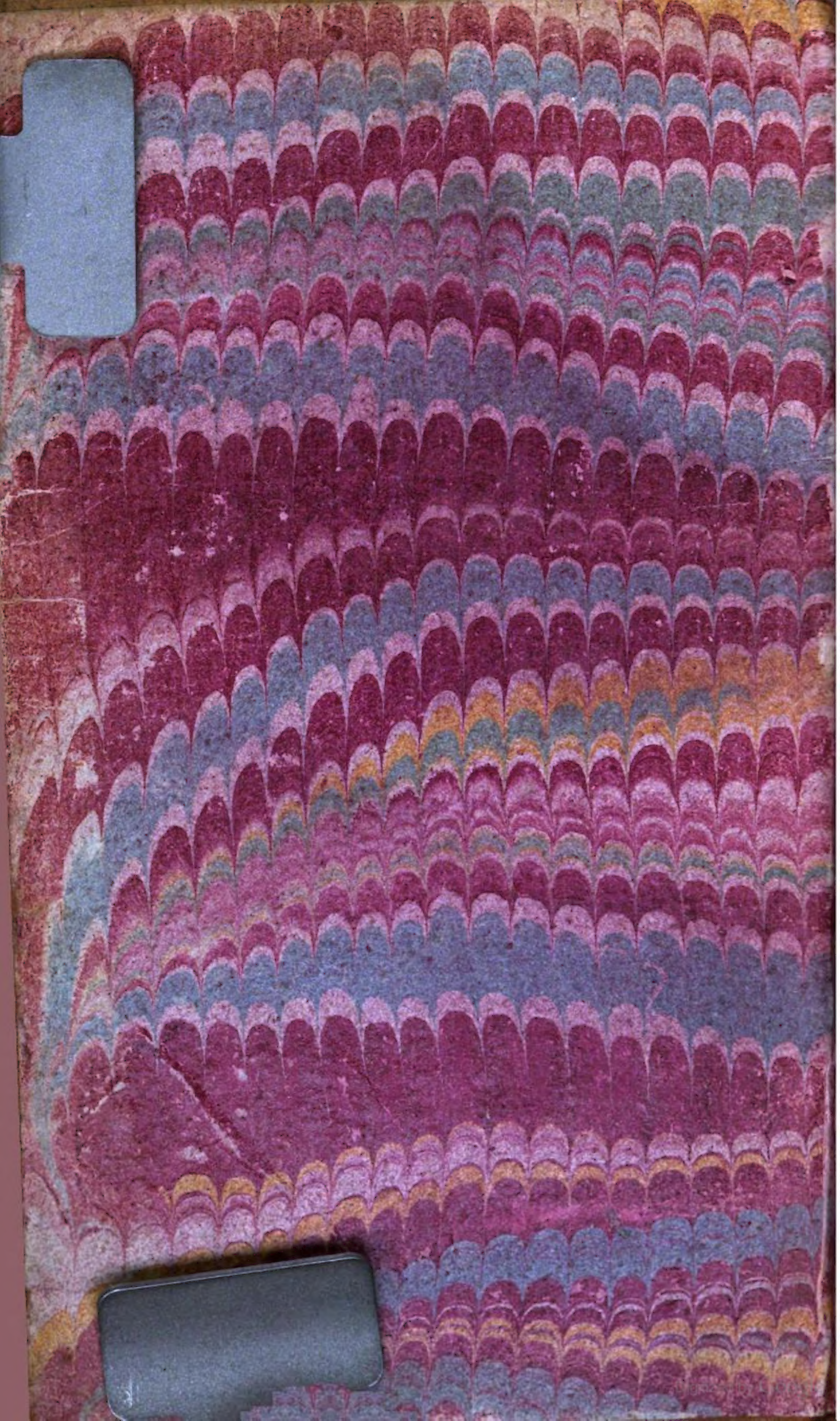






Mathesis. Geometria specialis 291.

R

Des Herrn de la Chapelle

Königl. Französ. Censors, der Akademie zu Lion, zu Rouen und der Königl. Societät zu London Mitglieds

Abhandlung

von den

Kegelschnitten

von den andern krummen Linien der Alten und der Cycloide

nebst

ihren Anwendungen auf verschiedene Künste.

Uebersetzt und mit Anmerkungen versehen

von

Johann Lorenz Böckmann

des Hochfürstl. Markgräfl. Baden-Durlach. Kirchenraths Assessor und der Mathematik und Naturlehre ordentlicher Professor.



Mit II. Kupfertafeln.

Carlsruhe, 1771.

druckts und verlegts Michael Macklot

Markgräfl. Baden-Durlach. Hofbuchhändler und Hofbuchdrucker.

Dem

weisen Regenten

der

glücklichen Baadischen Provinzen

Carl Friederich

dem Vielgeliebten

Europa

nennet Ihn einstimmig

ein Muster edler Fürsten

Seine treuesten Unterthanen

suchen

brennend für Liebe

die mächtigsten und treffendsten Namen

und nennen Ihn

Vater

Künste und Wissenschaften

pflanzen sich

um seinen erhabenen Fürstenstuhl

und verehren in Ihm

in freudigster Demuth

ihren huldreichsten Beschützer

diesem

großen Fürsten Germaniens

auch meinem

weisesten Regenten

und

Landesvater und Beschützer

weihe ich auf das feyerlichste

diese Blätter

zum

freudigsten Danckopfer

für

die gnädigst mir geschenckte Musse

und zum

öffentlichen Denckmahl

meiner

ewig daurenden

tiefsten Ehrfurcht und höchsten Liebe

gegen Ihn

und Sein erhabenes Fürstliches Haus.

Der Uebersetzer.

Vorrede des Uebersetzers.

Wenn für die mathematischen Wissenschaften in Teutschland nicht so glückliche Zeiten wären, als itzt, da fast überall die weisen Regenten der Länder ihre aufblühende Jugend in denselben eingeweihet wissen wollen; itzt, da man diese so gemeinnützigen Kenntnisse nicht mehr bey einer einzigen Classe von Gelehrten, die ihr ganzes Leben ihren Reizen gewidmet haben, zu finden glaubt; itzt, da man trotz allen Vorurtheilen, trotz allen hämischen Einwürfen und Verfolgungen der Unwissenheit sie auch von jedem zukünftigen Lehrer der göttlichen Wahrheiten, sie von Astraeens würdigen Verehrern, sie von jedem jungen Aesculape mit *allem Rechte* fordert; itzt, da man sie nicht mehr aus den Pallästen und den Cirkeln der Grossen entfernt, sondern sie auch freudig mitten unter dem Glanze der Höfe aufnimmt; da man sie einem jeden angehenden Künstler zu Begleiter *innen* wünschet und sie sogar bis zur bestaubten Hütte des Landmanns führt: Wenn ich für die erhabene Mathematick keine so glückliche Periode vor mir sähe, so würde ich vielleicht niemals die Entschliessung gefasset haben, diese Abhandlung von den Kegelschnitten und andern krummen Linien eines ansehnlichen französischen Gelehrten, der zugleich ein würdiger Mitarbeiter an der allgemeinen Encyclopaedie ist, meinen Landesleuten zu übergeben. Und für wen hätte ich

sie auch wohl in jedem andern traurigen Zeitpunkte bestimmen können? Für Männer, die Namen und Ehre und Amt und Vergnügen allein von der Mathematick entlehnen? Für sie, deren ganzes Leben gleichsam ein einziger Calcul und jede Minute des Tages eine Gleichung ist? Für sie, deren Geist mit kühnem Fluge das ganze Gebiet der Schöpfung durcheilet; die hier Weltkörper gegen einander abwägen, dort seltener Sterne schwere Laufbahn berechnen; hier geschlieffenen Gläsern die Zauberkräfte ertheilen lehren, entfernte Gegenstände herbey zuziehen und an den beyden Gränzen der Schöpfung uns noch neue Welten zu zeigen, dort dem Fluge zerschmettender Kugeln mit ihren Cirkeln und Buchstaben durch die Luft folgen und durch tiefes Denken ihren wahren Weg ausspähen: Hätte ich für diese Geister einer höhern Gattung, für diese Genies der ersten Grösse diese Elemente ihrer Wissenschaft bestimmen können? = = = Nein! Für sie arbeiteten Archimede, Apollonius, Wallise, Cartese, Newtone, Leibnize, Euler, Alemberte, Hospitale und Bernoullis: = = Oder hätte ich sie dem übrigen ganzen Heere von Gelehrten und Künstlern widmen sollen, die bey allen Vortheilen, die sie für ihre Wissenschaft und Kunst aus denselben ziehen könnten, sie dennoch als die traurigsten und unfruchtbarsten Beschäftigungen eines Menschen verachten? O! wie übel wäre auch hier meine Bemühung angewendet gewesen! Wie könnten solche Leute es wagen einen Blick auf krumme Linien und ihre verborgenen Eigenschaften zu

thun,

thun, Leute, für welche vielleicht die Berechnung eines Trapez zu schwer ist!

Allein itzt, da man in verschiedenen Gegenden Teutschlands die vortreflichsten Veranstaltungen vorkehret, die mathematischen Erkenntnisse zu einer längst gewünschten Allgemeinheit zu bringen; itzt, da man selbst auf niedern Schulen und Gymnasien sie biß zu einer gewissen Höhe treibt und da junge Studirende sich nicht mehr für algebraische Formeln als für Zaubercharactere fürchten; itzt da an sehr vielen Orten die so nützlichen Schulen für angehende Profeßionisten und Künstler errichtet sind und noch jährlich in grösserer Anzahl eröfnet werden: Itzt, glaube ich, ist ein Zeitpunkt, da man vielleicht mit einiger Zuversicht und mit nicht betrüglicher Hofnung einer guten Aufnahme es wagen darf seinen Nebenbürgern *ein* Buch in die Hände zu liefern, wodurch sie einige Stufen näher zu den Geheimnissen der Mathematick geführet werden.

Zwey Dinge können meiner Meinung nach uns rechtfertigen, wenn wir Schriften der Ausländer unsern Landsleuten bekannt machen. So wohl die innere Güte derselben selbst, als auch die Ueberzeugung, daß kein Buch von der Art noch in unserm Vaterlande anzutreffen sey. Wo ich nicht irre, so kann ich mich bey meinen teutschen Lesern aus beyden Gründen entschuldigen. Diese Abhandlung ist gründlich, schön, unterrichtend und überhaubt so ausgearbeitet, daß auch schwerere Sachen durch eine angenehme Wendung das erwünschte

Ansehen des Leichten erhalten. Der Verfasser verbindet in seinem Vortrage die synthetische und analytische Methode auf eine niedliche Weise. Er gibt dem jungen noch wenig gebildeten Geist eine gewisse glückliche Richtung und ist durchgehends ein Muster, wie man trockene theoretische Wahrheiten, die im Anfange nicht allemal reizend und erheblich erscheinen, sogleich durch die nutzbarsten Anwendungen auf andere Wissenschaften und Künste wichtig machen soll. Dieser Tractat hat den vollkommsten Beyfall der erlauchten Akademie der Wissenschaften erhalten und ein **Alembert** und **Cassini**, welche Namen! erheben ihn beyderseits mit verdienten Lobsprüchen. Jener preiset diese Schrift in der allgemeinen Encyclopaedie als eine der besten in dieser Art an, und berufet sich wegen ihres allgemeinen erhaltenen Beyfalls auf das ganze französische Publicum. Dieser empfiehlt sie als ein Buch, welches wegen seiner Gründlichkeit, Ordnung, Leichtigkeit und Schönheit nothwendig gefallen muß. Ich wünsche und hoffe, daß meine Landesleute nach einer aufmerksamen Durchlesung desselben ein ähnliches Urtheil fällen mögen.

Aber wie? Solte denn **Teutschland**, diese so fruchtbare Mutter der größten Genies, diese Ernährerinn so vieler noch lebenden und schätzbaren Geometer, diese Beschützerinn und Verpflegerinn aller Wissenschaften; solte dieses unser väterliches Teutschland bey seiner so ansehnlichen Menge von Schriftstellern nicht auch Männer aufstellen können, die diese Mate-

rie aufs beste bearbeitet hätten? Wir können sie aufstellen. Wir haben **Tschirnhausen, Leibnitze, Euler, Hausen, Segner, Kästner, Karsten, Huben, Wolfe, Tempelhofe, Makos** und viele andere verdiente Männer, die auf eine glückliche und sehr gründliche Weise von diesen krummen Linien gehandelt haben. Allein bey einer andern Absicht, die diese grosse Männer hatten, mußten nothwendig ihre so vortreflichen Arbeiten ein anders Ansehen, als diese Abhandlung bekommen. Ich kenne wenigstens noch kein teutsches oder lateinisches Buch, welches in der Anlage, Ausführung, in der ganzen Einrichtung und in der Absicht mit diesem Werke zu vergleichen wäre. = = = Ich würde vielleicht nicht zu entschuldigen seyn, wenn ich mich bey meinen Landsleuten wegen der unternommenen Uebersetzung dieses Buchs noch weiter entschuldigen würde. Was aber die Ausführung dieses Unternehmens anbetrift, so ist es vielleicht mehr nöthig. Ich kenne alle die schweren Pflichten eines Uebersetzers, der auf einigen Beyfall Anspruch machen will. Er muß beyder Sprachen mächtig seyn. Er muß seinen Auctor studirt haben, und die wahren Gedanken desselben mit aller Treue überliefern. Ich habe mich bemühet diese Pflichten zu erfüllen. Mögte ich einigermassen glücklich gewesen seyn! Billige Richter werden kleine Fehler, die mir gewiß bey aller Vorsicht dennoch vielleicht entwischt sind, mit Gütigkeit übersehen, und auf eine freundschaftliche Art mich davon belehren. Von den Anmerkungen und Zusätzen, die theils zur Erläuterung

für

für gewisse Leser, theils zur weitern Ausführung einiger Materien, theils zur Aufklärung der Geschichte eines Satzes, theils zur Berichtigung des Vortrags in einiger Anzahl von mir hinzugesetzet sind, wünsche ich, daß sie vielen angenehm und nützlich, niemanden aber oder sehr wenigen zu einiger Beschwerde gereichen mögen. In einem vollständigen Garten blühen nicht bloß nutzbare Obstbäume, sondern auch Blumen, und wenn ich an der prächtigen Tulpe mich satt gesehen habe, so verachte ich dennoch nicht das kleine blaue **Stiefmütterchen.** Machen Sie es so, meine Leser, mit meinen kleinen Zusätzen. Ich will den Werth derselben nicht bestimmen. Solte wohl jemals ein Verfasser ein vollkommen unpartheisches Urtheil über seine Arbeiten fällen können? Und wenn er es würklich fällte, wird das Publicum ihm glauben? Daß sie mir nicht ganz unnütze geschienen sind, werden meine Leser daher urtheilen können, weil ich sonst sehr sträflich gehandelt hätte, sie ihnen vorzulegen.

Ich übergebe demnach dieses Buch mit einer Freimüthigkeit dem teutschen Publicum: Insonderheit jungen Gelehrten und Künstlern, die etwa durch eigenen Fleiß sich an die so nützliche Untersuchung der Eigenschaften dieser krummen Linien wagen und zu noch höhern Kenntnissen sich vorbereiten wollen. Ich empfehle es ihnen als ein Werk, welches auf alle Weise auch bey mittelmäßigen Fähigkeiten und bey keiner andern Erforderniß als einer Kenntniß der ersten Gründe der Geometrie und Trigonometrie ihre Wünsche erfüllen wird. Ich empfehle es ihnen aber auch alsdenn noch zum nützlichen Nachlesen, wenn sie gleich der mündlichen Unterweisung anderer Gelehrten geniessen können.



Vorrede des Verfassers.

Es ist durchaus nothwendig dieselbe durchzugehen, um zu wissen, wie man dieses Werk lesen muß und in welchem Geiste es aufgesetzet worden sey. Man wird darinn eine Entwickelung desselben finden, die in dem Verstande des Lesers einen vollkommenen Abriß davon zu bilden fähig ist.

Es gibt zwey Mittel die Gränzen der Künste und Wissenschaften zu erweitern. Sie sind diese, selbst neue Entdeckungen zu machen, und das Publicum in dem Besitze derselben zu setzen. Diese zwey Mittel, die der ersten Vermuthung nach

zugleich sollten hervorgebracht seyn und mit ei
ander mit gleichen Schritten fortgehen, lass
oft grosse Zwischenräume zwischen sich.

Die wahren Erfinder, deren Anzahl in de
Augen derjenigen, die die Verbindung der Pr
dukte übersehen, sehr klein ist, überspringe
zuweilen unermeßliche Räume und kommen z
Wahrheiten, die für gemeine Menschen uner
steigbar und gewissermassen schreklich sind
wenn man, so zu sagen, keine Brücke bauet
die sie verbindet und den tiefen Abgrund, de
sie von einander trennt, bedeckt.

Oefters muß man es allein dem Undank an-
derer Menschen zuschreiben, wenn grosse Gei-
ster über ihre Werke keinen hinreichenden Grad
des Lichts fallen lassen. Das, was mit leich-
ter Mühe zu begreifen ist, scheint vielen Leuten
auch im Erfinden wenig gekostet zu haben. Sie
messen die Achtung oder Hochschätzung, die sie
für Erfinder haben müssen, nach der grössern
oder geringern Beschwerlichkeit, die sie gehabt

ha-

haben, die Gedanken derselben zu verstehen. Dieses ist der Grund, warúm sehr grosse Leute manchmal mit Fleiß in ihren Werken Dunkelheit gelassen und der Ausbreitung der Wissenschaften Hindernisse gelegt haben.

Cartesius ist hiervon ein Beyspiel, das ich nicht ohne Betrübniß anführe. Vielleicht ist niemals ein Mann gewesen, der geneigter war als er, grade zu zum Vortheil des menschlichen Geschlechts zu arbeiten. Allein verfolgt von seinen Feinden, die begierig aussprengten, daß seine neuen Aussichten in die Mathematik, Philosophie und vor allen in die Physik nicht das geringste sehr ausserordentliche hätten und daß man in dieselben sehr leicht hinein dringen könne, so wenig man auch vom Denken Profession mache, verfolgt, sage ich, von diesen seinen Feinden, änderte er sein Bezeugen ohne seine Gesinnungen zu ändern.

Da er einsahe, daß die wenige Hochachtung, die man seinen Werken ertheilte, allein von der

grossen Deutlichkeit herkäme, die er bis hiehe
über dieselben ausgebreitet hatte, so nahm e
sich vor in der Folge damit etwas weniger frey
gebig zu seyn. Seine Geometrie gab ihm Gel
genheit genug darzu. Er ließ darinn so vie
Sachen weg, und zeigte so viele andere von fe
ne daß seine Feinde gestehen mußten, daß er i
nen noch niemalen als ein so grosser Geomet
vorgekommen wäre.

Inzwischen machten sie ihm, von der Schw
rigkeit sie zu verstehen überwunden, seine ausse
ordentliche Kürze zum Vorwurf, ohne zu erw
gen, daß der Antrieb zu ihrer Beschuldigu
die Hauptursache und vieleicht der einzi
Grund ihrer Hochachtung sey.

Dieser offenbare kleine Unwille, welcher
Cartesens Seele eindrang, hatte für den Fo
gang der Wissenschaften verdrüßliche Folg
Die besten Köpfe, die im Stande waren du
ihre eigene Untersuchungen dem menschlic
Geschlechte Dienste zu leisten, gebrauchten a

ihr Nachdenken, um nur in die Untersuchungen dieses vortreflichen Geometers einzudringen. Seine Geometrie, die man heut zu Tage in der Zeit von einem Jahre durch Hülfe der Elemente und der Algebra verstehen kann, war während mehr als 100 Jahren der Gegenstand der Erläuterungen der stärksten Mathematiker, die auf ihm folgten.

In den ersten Zeiten, da sie erschien, waren nicht mehr als zweene Männer in Europa, nämlich der Herr von Beaune und Schooten, die im Stande waren, sie zu verstehen. (*a*)

Dieses sind nicht die einzigen Ursachen die den Fortgang der Wissenschaften hemmten. Seit ungefehr 150 Jahren hat man sie zu den feinsten Speculationen erhoben; man hat es aber zu sehr vernachlässigt zu zeigen, wie sie zur Vollkommenheit der Künste etwas beytrügen.

Wenn

(*a*) Man sehe den Baillet im Leben des Cartesius.

Wenn die Menschen sich allein auf die Curiosi
tät und auf das blosse Räsonnement einschrän
ten, so würde die Theorie hinreichend sey
Sie haben aber noch andere Bedürfnisse, u
die mehrsten Menschen werden nur von ma
riellen und sinnlichen Objekten sehr gerühr
Man muß sie also mit dem fesseln, was a
mehrsten mit ihrem Charakter übereinkom
Nach einem 3. oder 4 jährigem tiefen Studier
der höheren Geometrie finde ich nichts so dem
thigend, als sich noch fragen zu können, zu w
chem Nutzen sie im gemeinen Leben gereic
Wie kann man denn andere Leute davon üb
zeugen? und wenn ich ihnen nicht nüzlich b
kann ich alsdenn hoffen, daß sie mir für me
Arbeit Dank wissen werden?

Man findet inzwischen doch in den Büch
die zur Unterweisung dienen, fast nichts, wel
grade zu auf die Künste angewendet wäre.
Herren de la Hire, Guisnee und de l'Hop
haben über die Kegelschnitte gearbeitet.

Werke sind ohnfehlbar vortreflich, aber sie enthalten nichts als eine blosse Theorie. Junge Leute fangen die höhere Geometrie durch diese Männer an. Auf diese Art werden sie durch die Schwere, Trockenheit und scheinbare Unfruchtbarkeit derselben abgeschrecket, lassen sie fahren und vermuthen nicht einmal die Unachtsamkeit oder wenige Geschicklichkeit der Verfasser. Sie halten sich für unvermögend, da sie doch nur übel angeführet worden sind.

Unter diese Hindernisse, die die Wissenschaften nicht anders als langsam fortschreiten lassen, zähle ich als eines der stärksten dieses, daß man nicht hinlänglich die Gelegenheit, die Stuffen oder die Kette zeigt, wodurch man zu diesen Entdeckungen gekommen ist. Auf die Art, wie man sie gemeiniglich vorträgt, solte es scheinen, daß sie auf einmal vom Himmel heruntergekommen wären. Wer untersteht sich aber hierinn mit Recht zu verlangen, daß man begeistert sey! Den Uebergang und die Stuffen die zu einem

Produkte führen beobachten lassen, heißt da
Genie selbst entdecken, welches dabey geherrsc
hat. Hierdurch gewöhnt man sich die Verkn
pfungen zwischen geringen Sachen und de
wichtigsten zu bemerken, und man ist me
durch die Vernunft als durch das Gedächtn
geleitet, oft glücklich genug, das Ende der U
tersuchung zu begreifen, weil man den Anfa
davon wohl eingesehen hat.

Wenn man die Höhe betrachtet, zu welch
die höhern Wissenschaften seit zwey Jahrhunde
ten sich erhoben haben, so kann man nicht zwe
feln, daß es daher komme, weil einige Gelehrte si
Mühe gegeben haben, die Wege zu denselbe
eben zu machen. Mehrere Personen sind in di
selben hineingedrungen, die Aussichten habe
sich vermehrt, und es ist geschehen, was ma
natürlicher Weise vermuthen mußte, daß d
Entdeckungen, indem sie sich ausbreiteten, zu
gleich neue hervorbrachten. Folglich heißt, Wi
senschaften zu einem höhern Grade bringen, so vie
als an ihrer Ausbreitung arbeiten.

Nach

Nachdem ich sehr ernstlich daran arbeitete die verschiedenen Ursachen, die den Fortgang der Wissenschaften aufhalten können, kennen zu lernen, so habe ich die Anzahl derselben zu vermindern gesucht; und in dieser Absicht hat sich mein Sujet mir unter drey Gesichtspunkten dargestellet, welche mir sich einander wechselsweise zu unterstützen schienen, die Theorie der krummen Linien, ihr Gebrauch in der Kunst und die Geschichte von ihrem Ursprung und Fortgange. Die Theorie wird darinn das Licht seyn, der Gebrauch derselben die Frucht und die Geschichte das Vergnügen.

Diese allgemeine Einrichtung schien mir nöthig zu seyn. Man siehet nur gar zu viele Leute, die sich von dem Studieren der krummen Linien unter dem Vorwande los machen, weil ihr Nutzen sehr eingeschränkt oder vielmehr weil ihre Anwendung im geringsten nicht offenbar sey. Dieser Einwurf fällt hier weg. Man gebraucht sie in Ueberfluß und diejenigen, bey deren Er-

ziehung dieses Studium vorkommen muß, kö
nen sich unter diesem Vorwande nicht mehr den
selben entziehen. Setzen sie die Trockenheit ein
solchen Arbeit entgegen, so habe ich mich bem
het durch die Geschichte der Wissenschaften un
Künste und durch kleine Abhandlungen über i
re ersten Erfinder, derselben vorzubeugen. I
den ernsthaften Wissenschaften, wo der Geist g
spannet ist, ist ein Zug aus der Geschichte e
Ort der Ruhe, an welchem man sich auf de
Wege erfrischet, und wo man neue Kräfte f
den Ueberrest der Reise sammlet.

Dieses ist mein Plan. Nun sehe man au
die Ausführung desselben.

Wenn ich mich hier bey der Theorie ein
krummen Linie befinde, so beweise ich nur di
jenigen Eigenschaften, die zum Verstande ihr
Anwendung auf die Künste nöthig sind.

Alles, was mir nur curiös und zu gleich
Zeit zu schwer schien, oder wovon ich glaub
daß es nur ein sehr entferntes Verhältniß n

me

meinem Plan hätte, alles dieses habe ich gänzlich unterdrückt. Man hat so viele nützliche Sachen, den Geist zu üben; Warum soll man ihn mit überflüßigen Dingen beschäftigen?

Diese Ersparung der Zeit und der Kräfte des Verstandes ist nicht wenig durch die Aufmerksamkeit unterstützet worden, die ich gehabt habe, alle Sätze unmittelbar aus einander her zu leiten, ohne das geringste errathen zu lassen. Mir ist es jederzeit so vorgekommen, daß es bey den Erklärungen schwerer Sachen genug errathen sey, wenn man sie versteht.

Ich setze nichts als die Kenntniß meiner Institutionen voraus (*a*) wenn sich eine Wahrheit zufälliger Weise darbietet, die man nicht in

---

(*a*) Diese Institutions de la geometrie, die dem Herrn Verfasser wegen der Deutlichkeit, mit welcher sie aufgesetzet und wegen den schönen Anwendungen womit sie überal durchwürket und wegen der Ordnung und Gründlichkeit mit welcher sie ausgearbeitet sind, Ehre machen, lehren auf eine angenehme Art angehende Schüler der Mathematik, die ersten Gründe der Arithmetik, Algebra,

in den gewöhnlichen Anfangsgründen der Ge
metrie findet, so beweise ich sie unten auf de
Seite in einer Note auf das genaueste. Un
weil ich sowohl die Rechnung der Potenzen i
Ansehung der Exponenten als auch die Wu
zel-Rechnung nöthig gehabt habe, so habe ic
eine hinlängliche Erklärung derselben zu Anfa
ge dieses Traktats vorangeschickt. Diese Rech
nungen schienen mir nicht auf eine hinlänglic
einfache Art abgehandelt zu seyn. Hier ist eine
aus dem andern mit einer ausserordentliche
Leichtigkeit hergeleitet und zwar allein durch di
Verwandlung der Wurzelzeichen in simple Ex
ponenten. Dieses Buch hat also nur sich selb
nöthig um verstanden zu werden.

Es wird aber um so viel bequemer, durc
diejenigen die der öffentlichen Erziehung genie
sen

bra, Geometrie und Trigonometrie. Sie machen
mäßige Oktavbände aus. Mit welcher Begierde s
aufgenommen worden sind, zeigt unter andern dieses
daß ich schon die 4te Ausgabe davon in Händen habe. T

sen, geschehen, weil ich durch Sternchen oder durch besondere Nachrichten angezeiget habe, was sie ohne Nachtheil übergehen können. Diejenigen z. E. die sich nicht darum bekümmern, die Artillerie oder die Berechnung der Minen zu verstehen, haben diejenigen Sätze nicht nöthig, worauf die Erkenntniß dieser Künste gegründet ist. Indem man sie davon benachrichtiget, so kürzet sich dieses Werk ab und man ersparet die Zeit.

Die Newtonianischen Institutionen vom Herrn Sigorgne schienen mir geschikt zu seyn sich immer mehr zu einem Platze in den Lehrbüchern der Philosophie zu empfehlen. Ich habe dahero geglaubet den öffentlichen Lehrern eine Gefälligkeit zu erzeigen, wenn ich alle Sätze von den Kegelschnitten, die zum Grunde in diesen Institutionen liegen, mit einer gehörigen Weitläuftigkeit bewiese. Allein man kan sie übergehen, wenn man andere Aussichten hat.

Sie

Sie gehören nicht zum Hauptwerke. Sie sind nur als Zusätze anzusehen, deren Unterdrückung im ganzen Gebäude nichts zerstöhret.

Unabhänglich von dieser Anordnung der verschiedenen Theile meiner Arbeit in Absicht auf die Theorie wird man hier eine neue allgemeine Methode antreffen, die Tangenten der krummen algebraischen Linien, wovon man die Gleichungen hat, zu finden. Ingleichem eine neue Anwendung der Methode der Gränzen (Methode des limites) auf die Quadratur der krummen Linien. Diese leztere ist wenigstens so einfach und so geschwinde als die von der Integral-Rechnung, ohne die Dunkelheit derselben zu haben.

Wenn alle diese Eigenschaften mein Werk schon von allen denjenigen unterscheiden, die ihm vorhergegangen sind, so wird die Art, deren Theorie hier angewendet ist, ihr einen neuen Grad der Unterscheidung geben.

Ic

Ich gehe hier beständig bis auf die ersten Anfangsgründe derjenigen Kunst, welche in meinen Plan gekommen ist, zurük. Die Zweifel sind zerstöhret, die Erfahrungen der Prüfung unterworfen, das geringste Gewölke zerstreuet. Es sind in den höhern Wissenschaften noch so viele Dinge zu erfinden oder vollkommener zu machen, daß ich das Bezeigen dererjenigen nicht billigen kann, die dem Genie ihrer Leser in ihren Erläuterungen irgend etwas überlassen. Das heißt einem unnützer Weise die Nothwendigkeit auf eine gewisse Art erst zu erfinden auflegen, was schon entdecket ist. Der Weg der Wissenschaften ist lang und das Leben kurz. Lasset uns jenen erleichtern und machen, daß wir in diesem gleich zum Genusse kommen. Das heißt den Weg abkürzen und das Leben erweitern.

Auf diese Art ist jede Anwendung ein vollständiger Traktat geworden. So ist die Theorie und Practik vom Bombenwerfen mit allen nothwendigen Kleinigkeiten bewiesen worden.

den. Man hat hier keine Auflösung von irgend einem Problem vergessen und um seine Theori zu bestätigen oder auf die Schwürigkeiten di man hier entgegensetzt zu antworten, hat man eine grosse Anzahl von Erfahrungen beygebracht. Diese waren allein in dieser Absicht gemacht, um die Resultate daraus mit denjenigen zu vergleichen, die man aus der Geometrie ziehet.

Die Uebereinstimmung davon ist auch s vollkommen als möglich. Das hiesse folglich das Interesse der Societät vergessen, wenn man sich noch an dem simplen Gerathewohl halten wollte.

Man ist auf die nämliche Art in Absicht au die Berechnung der Ausleerung der Minen verfahren. Man hat beständig vorausgesetzet, da man mit Lesern, rede die nur das verstehen, was man sie verstehen läßt. Man ist gar nicht z genau in dem gewesen was die vortheilhaftest Construction der Sprachröhren, Hörröhren und der Brennspiegel, der Seitenmauren de

Ca

Camine zur Heitzung der Zimmer und einiger ausserordentlichen Widerhalle, die etwas wunderbares enthalten, betrift.

Alle diese Anwendungen sind eine Folge von den Eigenschaften der Parabel. Man hätte sehr gewünschet, nach Maaßgabe, wie man die theoretischen Wahrheiten entdekt hätte, auf der Stelle die Anwendung davon in der Ausübung zu zeigen. Allein wie es sehr viele Sätze gibt, die keinen andern Nutzen haben, als daß sie zum Beweise derjenigen Wahrheiten dienen, die unmittelbar auf die Kunst anzuwenden sind, so hat man einer andern Methode folgen müssen. Der grosse Abstand, den man zwischen den mehrsten theoretischen Wahrheiten, wo eine von der andern abhanget, würde gehabt haben, würde ohnfehlbar in dem Verstande der Leser den Faden gebrochen haben. Dieses ist die Ursache warum man den Nutzen und die Anwendungen von einer krummen Linie nur erst als-

denn gezeigt hat, nachdem man die ganze Theo-
rie, die man nöthig hatte, vorher erklärt hatte.

Dieses ist der nämliche Gang in der Ellypse
und Hyperbel. Man gibt zuerst die Theorie
und wendet hernach diese krummen Linien auf
die Dioptrik an oder auf die Kunst Gläser zu
schleifen, die theils geschickt sind, die Fehler der
Augen zu verbessern, theils deren Stärke zu
vermehren. Man kommt daselbst wieder auf
die Sprachröhren und Hörröhren. Man zeigt,
daß diese Instrumente viel vollkommner sind,
wenn man jene aus einer Ellypse und Para-
bel zusammensetzet, diese aber blos Ellyptisch
macht. Man erkläret bey dieser Gelegenheit
die Echo, die sich nur bey einer schwachen Stim-
me, wie in den so genannten Sprachgewölbern
vernehmen lassen. Auch sind die Brenngläser
die durch die Refraction würken, wie auch die
Art, den körperlichen Innhalt von gedruckten
Gewölbern zu finden, nicht vergessen worden.
Die ganze Lehre von der Ellypse ist durch ein

Ab

Abhandlung geschlossen worden, worinn man zeigt, daß Cartesius der wahre Erfinder der Dioptrik sey. In einer Abhandlung am Ende der Hyperbel untersuchet man die Arten von Brennspiegeln, deren sich Archimedes und Proklus haben bedienen können um diejenigen wunderbaren Effekte hervorzubringen, die einige Geschichtschreiber ihnen zueignen.

Von den 4 nachfolgenden krummen Linien der Cissoide, Conchoide, Quadratrix und Spiral-Linie des Archimeds macht man in den nützlichen Künsten wenig oder gar keinen Gebrauch. Man hat sich vorgesetzet nur diejenigen Eigenschaften derselben zu erklären, die zum Verstande dessen, was zu ihrer Erfindung Gelegenheit gegeben hat, nothwendig sind. Und hier solte sich diese Abhandlung endigen, das heißt, man solte nur der alten krummen Linien Erwähnung thun. Man hatte es sich vorbehalten von den neuen krummen Linien, die in der Kunst brauchbar sind, in einem andern Werke zu re-

den, wenn dieses von dem Publicum wohl aufgenommen würde und wenn sich keine andere Umstände entgegen setzten (*a*). Allein viele Personen

---

(*a*) Der allgemeine Beyfall des Publicums, den dieses schöne Buch mit so vielem Rechte verdienet, hätte den Herrn Verfasser sehr stark reizen können, so viele Wünsche zu erfüllen und die begierige Welt mit einer ähnlichen Abhandlung über die neuen krummen Linien zu beschenken. Es ist aber bisher noch nicht geschehen. Und man erwartet noch mit einem eben so sehnlichen Verlangen seine in diesem Werke einigermassen versprochene weitläuftigere und genaue Untersuchung der Rechnung der Gewölber. Da ich die Ehre habe, mit diesem gelehrten Abt in einem freundschaftlichen Briefwechsel zu stehen, so kann ich es hier öffentlich versichern, daß man wenige Hofnung habe, diese gewünschten Ausarbeitungen von seiner Feder zu erhalten. So druckt sich dieser liebenswürdige Mann in einem seiner Briefe an mich selbst über diese Materie aus: „Meine sitzende Lebensart „und viele Meditationen haben meine Gesundheit gänzlich zu Grunde gerichtet, und ich bin genöthiget „worden, seit einigen Jahren durchaus die Bearbeitung „der mathematischen Wissenschaften liegen zu lassen. Das „heißt in Wahrheit allen Vergnügungen meines Lebens „entsagt haben: Aber sie waren Syrenen, die an meinem „Grabe arbeiteten. Auf diese Art habe ich mir allem Ansehen nach zu viel geschmeichelt, da ich mir vornahm dem „Publicum jene Abhandlungen zu überliefern. Ich habe „den Cirkel weggelegt; Geschicktere Hände werden vielleicht „den Riß vollenden, den ich nur skizzirt habe." O möchte die Vermuthung dieses wackern Gelehrten doch bald erfüllet werden. B.

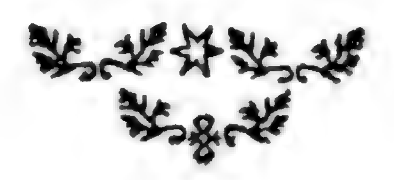
sonen haben in Absicht auf die Cykloide so viele Einwendungen gemacht, daß man es ihnen nicht hat abschlagen können, hier eine kleine Abhandlung davon zu liefern. Man hat sich hauptsächlich Mühe gegeben, diejenigen Eigenschaften derselben zu betrachten, welche uns dahin leiten können, die Anwendung dieser krummen Linie auf die Kunst der Pendeluhren zu verstehen. Man ist hier in alle Kleinigkeiten der Mechanik hineingegangen, die im Stande waren das Spiel dieser wunderbaren Maschine begreiflich zu machen. Endlich siehet man durch eine kurze Geschichte der Cykloide, wie wichtig blosse Speculationen der Geometrie sind, die vom Anfange nur unerhebliche Wahrheiten darzubieten schienen.

Dieses sind die Dinge, die ich nach meinem Plane ausgeführet habe. Dafür kan ich gar wohl Bürge seyn, daß man in Frankreich kein Werk von dieser Art und in diesem Geschmacke

 auf-

aufgesetzet habe. Das Publicum mag entscheiden, ob ich das Glück gehabt habe, da ich demselben auf eine neue Art nützlich zu seyn suchte, durch die verschiedenen Anwendungen und durch die Geschichte der Entdeckungen die Trockenheit zu vermeiden, deren diese Materien nur gar zu sehr fähig sind.

Inzwischen sind die Vorreden etwas verdächtig geworden, weil es viel leichter ist, zu versprechen als zu halten und weil die mehrste Zeit ein grosser Unterschied zwischen dem geleisteten und zwischen dem ist, was man hätte leisten sollen. Ich glaube daher den Lesern, die gerechter Weise dieses Vorurtheil haben, am besten die Besorgniß zu benehmen, wenn ich ihnen diese billigende Genehmigung der Königlichen Akademie der Wissenschaften vorlege.



Aus-



Auszug aus dem Protocolle
der Königl. Akademie der Wissenschaften.

Wir haben auf Befehl der Akademie einen Traktat von den Kegelschnitten und andern krummen Linien der Alten, wie auch von der Cykloide untersuchet. Dieser Traktat ist von dem Herrn de la Chapelle, Mitgliede der Königl Societät zu London aufgesetzet worden.

Nachdem der Verfasser die Eigenschaften dieser krummen Linien, vermittelst der Analysis gezeiget hat, so erkläret er auch den Gebrauch, den man davon in verschiedenen Künsten gemacht hat. Auf diese Art gibt er bey dem Artikel von der Parabel die Theorie vom Bombenwerfen (*) und von der Berechnung der Ausleerung der Minen. Bey dem Artikel von der Ellypse erklärt er den Gebrauch, den man davon bey den Brenngläsern und Augengläsern gemacht hat oder machen könne. Bey dem Artikel von der Hyperbel zeiget er auch die Anwendung dieser krummen Linie auf die Untersuchung der Catoptrik und Dioptrik. Endlich zeiget er bey dem Artikel von der Cykloide, wie die Theorie von dieser krummen Linie darzu gedienet habe, die Uhren vollkommener zu machen, und wie sie noch auf eine gewisse Art darzu diene, indem man die Pendeln sehr kleine Stücke von Cirkelbögen beschreiben läßt.

Herr

(*) Die Praxis ist auch weitläuftig gezeigt worden.

Herr de la Chapelle zeiget die Tangenten der verschiedene krummen Linien, wovon er handelt, indem er diese Tangen ten als Sekanten betrachtet, deren Durchschnittspunkte mit de krummen Linie zusammen fallen. Er findet auch die Qua dratur dieser nämlichen Linien, durch die Methode der Grän zen (Methode des limites), die er in seinen Institutic nen der Geometrie, die schon von der Akademie gebillig sind, erkläret hat. Er verfährt dabey auf eine solche Art daß er die Anfänger ohne die Differenzial- und Integral-Rech nung zu gebrauchen, die wahre Metaphysik dieses Calculs b greifen läßt.

Wir glauben daher daß dieses neue Werk vom Herrn d la Chapelle für diejenigen, die sich dem Studium der höher Geometrie und ihrer Anwendung auf die Physik widmen nützlich seyn werde, sowohl deswegen, weil der Autor hi viele Materien, die vorher in verschiedenen Büchern zerstreu waren, zusammenbringt, als auch, weil er dieselben mit vi ler Deutlichkeit und Sorgfalt abgehandelt hat.

Unterzeichnet

Cassini, d'Alember

Ich bezeuge, daß dieser Auszug dem Original und dem Urth der Akademie gemäß sey.

Grand Jean d'Fouchy.

beständiger Sekretair der Königl. Akadem der Wissenschaften.



Abhandlung von krummen Linien.

Von der Rechnung mit den Potenzen in Ansehung ihrer Exponenten.

Nachricht.

Die zwey folgenden Calculs, die Rechnung mit den Potenzen in Ansehung ihrer Exponenten und die Wurzel-Rechnung können von denen, die die neuere höhere Geometrie kennen wollen, nicht übergangen werden. Auch bey dem Studium der höhern Geometrie der Alten sind sie von besonderer Bequemlichkeit. Nichtsdestoweniger können die Anfänger dieselbe gänzlich vorbey lassen, weil der gröste Theil dieses Werkes ohne Hülfe derselben verstanden werden kann.

§. 1.

Man lehret in diesem Capitel das, was man in Absicht auf die Exponenten der Potenzen, in wiefern die verschiedenen Rechnungsarten bey ihnen angewendet werden, vorzunehmen habe.

Der Exponent einer Grösse ist eine jede Grösse, wodurch man anzuzeigen pfleget, wie oft die Grösse geschrieben wer-

werden müßte, wenn man ein solches Zeichen nicht gebrauch
Wenn also dieser Exponent ein Ganzes ist, so gibt er
ständig eine Multiplication zu erkennen. Man kann folgl
einen Exponenten nicht vergrössern, ohne diejenige Grösse,
welcher er gehöret, zu multiplieiren; und man kann ihn da
ro auch nicht kleiner machen, ohne diese nämliche Grösse zu
vidiren. Und da die Erhebung zu Dignitäten und die Au
ziehung der Wurzeln nur durch multipliciren und dividi
geschiehet, so folgt, daß man von den Exponenten nicht
ders handeln könne, als wenn man lehret, wie dadurch P
tenzen zu multipliciren und zu dividiren sind, wie dieselben
andern Dignitäten zu erheben und wie aus ihnen die Wurz
auszuziehen sind.

§. 2.

Anmerkung. Eine jede Grösse, die zu keiner Digni
erhoben zu seyn scheinet, wird jederzeit so betrachtet, als h
te sie die Einheit zum Exponenten. Folglich ist

$$b = b^1; \quad cd = c^1 d^1; \quad a + b = (a + b.)^1$$

§. 3.

**Wenn man Dignitäten aus einer und derselb
gen Wurzel, die zu ihren Exponenten ganze Zahl
haben, durcheinander multipliciren will, so schreib
man diese Wurzel ein einzigesmal und gebe derse
ben die Summe aus den Exponenten von den D
gnitäten, die sich einander multipliciren, zum Expo
nenten.** Z. E. $y^2 \times y^4 = y^{2+4} = y^6$; denn es ist $y^2 = y$
und $y^4 = yyyy$; Folglich ist $y^2 \times y^4 = yy \times yyyy = yyyy$
$= y^6$. Folglich ist die gegebene Regel augenscheinlich gew
Ebendeswegen zeiget man, wenn die Exponenten unbestimm
sind, die Summe derselben durch das Zeichen + an; da
heißt, $y^r \times y^s = y^{r+s}$.

§.

§. 4.

Hieraus folgt, daß, wenn man Potenzen, die den vorigen ähnlich sind, durch einander dividiren will, man den Exponenten der Dignität des Divisors von dem Exponenten der Dignität der zu dividirenden Grösse subtrahiren und daß man das, was bey der Subtraction übrig bleibt, der Wurzel zum Exponenten geben müsse: Wollet ihr z. E. c^5 durch c^3 dividiren so dürfet ihr nur schreiben $c^{5-3} = c^2$. Dieses wird der gesuchte Quotient seyn; denn der Divisor c^3 multiplicirt durch den Quotienten c^2 ist $= c^{3+2}$ (§. 3.) = dem Dividendus c^5; Folglich ist allgemein c^s dividirt durch $c^r = \frac{c^s}{c^r} = c^{s-r}$.

§. 5.

Es sey in dem vorigen Exempel $r = s$, so wird man finden, daß $c^{s-r} = c^{s-s} = c^0$ seyn. (§. 4.) Es ist aber $c^{s-r} = \frac{c^s}{c^r} = \frac{c^s}{c^s} = 1$. daher ist $c^0 = 1$. Hieraus siehet man, daß eine jede Grösse, die zu keiner Dignigtät erhoben worden ist, oder deren Dignität das Zero oder Null ist, der Einheit gleich werde.

§. 6.

Wenn man demnach den Exponenten $s = 0$ sezte, so würde $\frac{c^s}{c^r} = \frac{c^0}{c^r} = c^{0-r}$ (§. 4.) $= c^{-r}$ seyn. Dieses beweiset, daß eine Potenz einen negativen Exponenten haben könne. Sie stellet aber alsdenn einen wahren Bruch vor, ohngeachtet sie nicht so aussiehet. Denn es ist $c^0 = 1$. (§. 5.)

Fol-

Folglich $\frac{c^0}{c^r} = \frac{1}{c^r}$; Allein man hat augenblicklich gesehen, daß $\frac{c^0}{c^r} = c^{-r}$; Folglich ist c^{-r} = dem Bruch $\frac{1}{c^r}$.

§. 7.

Ein positiver Exponent kann folglich in einen negativen verwandelt werden und umgekehrt, ohne daß die Potenz, der er zugehöret, ihren Werth verändert. Denn 1.) ist $\frac{1}{c^r} = c^{-r}$ (§. 6.) 2.) behaupte ich, daß $c^r = \frac{1}{c^{-r}}$. Denn es ist $\frac{1}{c^r} = c^{-r}$ (§. 6.); Folglich ist $1 = c^r \times c^{-r}$. Daher $\frac{1}{c^{-r}} = c^r$.

§. 8.

Gleichermassen kann $d^4 f^{-3}$ folgende Grösse werden $\frac{d^4}{f^3}$. Denn weil $f^{-3} = \frac{1}{f^3}$ (§. 6.), so ist $d^4 \times f^{-3} = d^4 \times \frac{1}{f^3} = \frac{d^4}{f^3}$. Es kann auch aus der nämlichen Grösse $d^4 f^{-3}$ der Ausdruck $\frac{1}{d^{-4} f^3}$ werden; Denn da d^4 gleich ist $\frac{1}{d^{-4}}$ (§. 7.) und $f^{-3} = \frac{1}{f^3}$ (§. 6.) so ist $d^4 f^{-3} = \frac{1}{d^{-4}} \times \frac{1}{f^3} = \frac{1}{d^{-4} f^3}$.

Man

Man gebraucht diese Verwandlungen, wenn man in einem Calcul wissen will, ob Grössen sich gleich sind, wenn sie es gleich nicht zu seyn scheinen.

§. 9.

Weil die Potenzen auch negative Exponenten haben können (§. 6.) so muß man auch untersuchen, wie sie sich in diesem Betrachte multipliciren oder dividiren. Man hat keiner andern, als denjenigen Regeln zu folgen, die im 3. 4. § gegeben worden sind. Um also d^{-2} durch d^{-3} zu multipliciren, so schreibt man $d^{-2} \times d^{-3} = d^{-2-3} = d^{-5}$ (§. 3.) Auf gleiche Weise ist $d^{-r} \times d^{-s} = d^{-r-s}$. Denn es ist $d^{-r} = \frac{1}{d^r}$ und $d^{-s} = \frac{1}{d^s}$ (§. 6.) Folglich ist $d^{-r} \times d^{-s} = \frac{1}{d^r} \times \frac{1}{d^s} = \frac{1}{d^r \times d^s} = \frac{1}{d^{r+s}}$ (§. 3.) $= d^{-r-s}$ (§. 6.). Wollt ihr noch d^4 durch d^{-5} multipliciren, so werdet ihr finden, daß $d^4 \times d^{-5} = d^4 \times \frac{1}{d^5} = \frac{d^4}{d^5} = d^{4-5} = d^{-1}$ sey.

§. 10.

Wenn man der im §. 4. vestgesetzten und bewiesenen Regel folgt, so wird man auf eben diese Art mit der grösten Leichtigkeit Potenzen, deren Exponenten negativ sind, durch einander dividiren; es mag nun das Dividendum oder der Divisor diesen negativen Exponenten haben. Folglich, um d^{-5} durch d^{-3} zu dividiren, schreibt man $\frac{d^{-5}}{d^{-3}} = d^{-5+3} = d^{-2}$.

Dieses wird der gesuchte Quotient seyn. Wenn aber die Exponenten unbestimmt sind, das heißt, wenn man z. E. d^{-r} durch

durch d^{-s} zu dividiren hat, so schreibe man $\frac{d^{-r}}{d^{-s}} = d^{-r+s}$ als den Quotienten dieser Division. Denn dieser Quotient d^{-r+s} multiplicirt durch den Divisor d^{-s} ist $= d^{-r+s-s}$ (§. 9.) $= d^{-r}$ und wenn d^{-r} durch d^{s} dividiren würde, so würde man d^{-r-s} zum Quotienten haben, weil $d^{-r-s} \times d^{s} = d^{-s-r+s} = d^{-r}$ ist.

§. 11.

Vermittelst des Calculs der Potenzen in Ansehung ihrer Exponenten kann man eine Grösse, die mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ bezeichnet ist, von diesem Zeichen befreyen. Es ist aber nöthig, daß man vorher folgendes einsehe und davon durch einen tüchtigen Beweis überzeugt sey, **daß, um irgend eine Potenz y^{s} zu einem beliebigen Grade, dessen Exponent r oder $-r$, positiv oder negativ ist, zu erheben, man den Exponenten s der gegebenen Potenz durch den gegebenen Exponenten r oder $-r$ multipliciren und alsdenn veranstalten müsse, daß dieses Produkt der Exponent dieser nämlichen Potenz werde:** daß also y^{s} wenn man es zur Potenz r erhebt $= y^{rs}$ sey und daß y^{s} zur Potenz $-r$ erhoben $= y^{-rs}$ sey. Ich beweise dieses demnach:

I. Es muß aus y^{s} zur positiven Potenz r erhoben, nothwendig y^{rs} werden. Denn wenn man y^{s} zur positiven Potenz r erhebt, so multiplicirt man diese Grösse so oft durch sich selbst als Einheiten in r sind weniger Eins; das heißt, man schreibt diese Potenz so oft, als man in dem Buchstaben r Einheiten annimmt, so daß aus derselben $y^{s}, y^{s}, y^{s}, y^{s}$ ..... werde. Hier ist y^{s} so oft geschrieben worden, als man Einheiten in r annimmt. Es ist aber $y^{s}, y^{s}, y^{s}, y^{s} \ldots\ldots = y^{s+s+s+s} \ldots\ldots$ (§. 3.) In welchem Ausdruck der Exponent s so oft muß geschrieben oder genommen worden seyn, als der Buchstabe r Einheiten in sich fasset. Allein um s so vielmal zu nehmen, als r Einheiten in sich fasset, muß man s durch r multipliciren. Folglich ist in diesem Falle $y^{s+s+s+s \ldots\ldots} = y^{rs}$. Und ihr werdet euch insbesondere von der Wahrheit dieser Versi-

cherung überzeugen, wenn ihr die Grösse a^3 zur 4ten oder irgend einer andern bestimmten Potenz erhebet. Denn alsdenn muß man schreiben $a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$ oder $a^{3\times 4}$: So wie es die allgemeine Regel vorschreibt.

II. Es ist y^s zur negativen Potenz $-r$ erhoben $= y^{-rs}$. Man muß sich hierzu wieder erinnern daß $y^s = yyyy\ldots\ldots$ oder daß der Buchstabe y so oft geschrieben werden muß als man in dem Exponenten s Einheiten annimmt. Wenn man also y^s oder eine Grösse, die ihr gleich ist $yyyy\ldots\ldots$ zur Potenz $-r$ erhebt, so muß man schreiben $yyyy\ldots\ldots{}^{-r}$; dieses zeiget an, daß die vorgegebene Grösse zu betrachten sey, als sey sie zur Dignität $-r$ erhoben worden. Allein es ist

$$yyyy\ldots\ldots{}^{-r} = \frac{1}{yyyy\ldots{}^{r}} \text{ (§. 6.) und } \frac{1}{yyyy\ldots{}^{r}} \text{ ist } = \frac{1}{y^s}$$

erhoben zur positiven Dignität $r = \frac{1}{y^{s\,r}}$ (1) denn 1 zu irgend einer Dignität erhoben giebet beständig 1, und folglich darf man, um den Bruch $\frac{1}{y^s}$ zur positiven Dignität r zu erheben, nur simpel so, wie es im ersten Nummer dieses § vorgeschrieben worden ist, mit dem Nenner desselben verfahren, so wird aus diesem Bruche $\frac{1}{y^{rs}}$ werden. Es ist aber $\frac{1}{y^{rs}} = y^{-rs}$ (§. 6.) Folglich ist endlich y^s zur Dignität $-r$ erhoben $= y^{-rs}$ und wenn ihr die Reihe aller Gleichungen, die uns zu dieser lezten geführt haben, zu besitzen wünschet, so müsset ihr schreiben $yyyy\ldots{}^{-r} = \frac{1}{yyyy\ldots{}^{r}} = \frac{1}{y^{s^r}}$* (Num. 1.) $= y^{-sr}$ (§. 6.) Eben

* Der Ausdruck y^{s^r} zeiget an, daß die Grösse y^s zur Dignität r ist erhoben worden.

Eben so ist y^{-s}, zur negativen Dignität $-r$ erhoben, $= y^{rs}$. Denn $y^{-s} = \frac{1}{y^s}$ (§. 6.) Allein um den Bruch $\frac{1}{y^s}$ zur Dignität $-r$ zu erheben, so muß man seinen Zähler und Nenner zur Dignität $-r$ erheben und folglich $\frac{1^{-r}}{y^{-rs}}$ schreiben (Num. 2.) Es ist aber $1^{-r} = 1$. Denn es ist $1^{-r} = \frac{1}{1^r}$ (§. 6.) $= \frac{1}{1} = 1$. Folglich ist $\frac{1^{-r}}{y^{-rs}} = \frac{1}{y^{-rs}} = y^{rs}$.

§. 12.

Man wird vielleicht fragen, was eine Grösse, die zu einer negativen Dignität erhoben ist, bedeute? Es ist dieses eine Grösse, die kleiner wird als 1, und die also in einen Bruch verwandelt wird, wenn sie vorher, ehe sie zu dem bestimmten Grade erhoben wurde, einen positiven Exponenten hatte, die aber im Gegentheil ihrem Werthe nach ein Ganzes wird, wenn ihr Exponent negativ war. Ihr habet z. E. die Grösse a^3, die ihr zur negativen Dignität -2 erheben wollet, so muß diese Grösse alsdenn a^{-6} werden (§. 11. Num. 2.) $= \frac{1}{a^6}$ (§. 6.) hier sehet ihr daß die Grösse a^3, die einen positiven Exponenten hat, kleiner wird als die Einheit. Es sey im Gegentheil die Grösse a^{-3} zur Dignität -2 zu erheben, so wird man a^6 bekommen (§. 11. Num. 2.); das heißt, die Grösse a^{-3} oder $\frac{1}{a^3}$, welche ein Bruch oder kleiner als die Einheit war, wird grösser als die Einheit. Denn wir setzen bey allem diesem voraus daß $a > 1$ sey.

§. 13.

§. 13.

Bemerket, daß es ein grosser Unterschied sey, zwischen dem Ausdruck y^3 zur 4ten Dignität erhoben, und zwischen $y^3 \times y^4$. Denn es ist $y^{3^4} = y^{3 \times 4}$ (§. 11.) $= y^{12}$; Hingegen ist $y^3 \times y^4 = y^{3+4}$ (§. 3.) $= y^7$, welches sehr von y^{12} unterschieden ist. Eben so ist $p^{r^s} = p^{r \times s} = p^{rs}$. Es ist aber $p^r \times p^s = p^{r+s}$.

§. 14.

Nun werden wir leichtlich eine jede Grösse, die mit einem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ verbunden ist, wie z. E. $\sqrt[s]{y^p}$, von diesem Zeichen befreyen können, ohne dennoch ihren Werth zu verändern; Es habe dieses Wurzelzeichen auch einen Exponenten welchen es immer will. Denn, weil man, um eine Grösse zu irgend einer Dignität zu erheben, ihren Exponenten durch den Exponenten der geforderten Dignität multipliciren muß, und weil die Ausziehung der Wurzeln das entgegengesetzte von dem Erheben zu Dignitäten ist, so muß man, um die Wurzel s aus y^p zu ziehen, den Exponenten dieser Grösse durch den gegebenen Exponenten s dividiren; und es ist folglich $\sqrt[s]{y^p} = y^{\frac{p}{s}}$, wo kein Wurzelzeichen mehr ist. Es ist auch würklich $y^{\frac{p}{s}}$ zur Dignität s erhoben $= y^{\frac{p}{s} \times s}$ (§. 11.) $= y^p$, so wie es seyn mußte.

Auf gleiche Weise ist $\sqrt[2]{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$, so wie man dieses ohnehin schon weiß. $\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$. Auch dieses erkennet man als eine gewisse Wahrheit. Eben so ist $\sqrt[2]{x}$ oder $\sqrt{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$.

§. 15.

Man muß sich bey der Multiplication dieser Grössen, wie im §. 3 verhalten. Folglich ist $y^{\frac{s}{p}} \times y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{s}{p}+\frac{m}{n}}$ (A) $= y^{\frac{ns+pm}{np}}$, wenn man nämlich die beyden Theile des Exponenten der Grösse A unter einerley Benennung bringt.

Wollet ihr auf eine gleiche Weise $y^{\frac{n}{s}}$ durch $y^{-\frac{m}{t}}$ multipliciren, so werdet ihr bekommen $y^{\frac{n}{s}-\frac{m}{t}}$ (§. 9.) $= y^{\frac{nt-sm}{st}}$.

Und wenn ihr $y^{-\frac{n}{s}}$ durch $y^{-\frac{m}{t}}$ würdet zu multipliciren haben, so würde das Produkt seyn $y^{-\frac{n}{s}-\frac{m}{t}} = y^{\frac{-nt-sm}{st}}$.

§. 16.

Was die Division solcher Grössen, die den vorigen ähnlich sind, anbetrifft, so muß man sich nach der Regel des § 4. richten. Man wird alsdann finden daß $y^{\frac{s}{p}}$ dividiret durch $y^{\frac{m}{n}} =$ sey $y^{\frac{s}{p}-\frac{m}{n}} = y^{\frac{ns-pm}{pn}}$.

Eben so werdet ihr finden, daß $y^{\frac{s}{p}}$ dividirt durch $y^{-\frac{m}{n}} =$ sey $y^{\frac{s}{p}+\frac{m}{n}} = y^{\frac{ns+pm}{pn}}$ und daß $y^{-\frac{s}{p}}$ dividiret durch $y^{\frac{m}{n}}$ gleich sey $y^{-\frac{s}{p}-\frac{m}{n}} = y^{\frac{-ns-pm}{pn}}$. Endlich ist $y^{-\frac{s}{p}}$ dividiret durch $y^{-\frac{m}{n}} = y^{-\frac{s}{p}+\frac{m}{n}} = y^{\frac{-ns+pm}{pn}}$.

§. 17.

Es ist nützlich, daß man zum voraus wisse, daß es möglich sey, daß man bey der Verwandlung solcher Grössen, die mit

mit einem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ bezeichnet sind, in Grössen die kein solches Zeichen haben, wenn man z. E. macht, daß aus $\sqrt[3]{(a+b)}$ diese Grösse $(a+b)^{\frac{1}{3}}$ entstehe daß es möglich sey, sich bey dieser Verwandlung der Cubikwurzel von dieser Grösse $(a+b)$ unendlich zu nähern, und daß man dabey auf diejenige Rechnung stossen könne, die man den Calcul der Reyhen zu nennen pfleget. Eine Rechnung, die so nützlich in der Geometrie ist, wo man die Differential- und Integral-Rechnung anwendet. Da wir aber hier diese Kenntnisse nicht nöthig haben, so gehe ich sogleich zu der Wurzel-Rechnung fort, die in der analytischen Geometrie so bequem ist.

Von der Wurzel-Rechnung.

§. 18.

Eine Wurzel-Grösse ist diejenige Grösse, die mit dem hierbey stehenden Zeichen $\sqrt{}$ bezeichnet ist. Zwischen den Armen dieses Zeichens schreibet man irgend eine Grösse oder Zahl, welche man den Exponenten nennet, weil sie anzeigt, von welchem Grade diejenige Wurzel sey, die man als ausgezogen *annimmt*, oder so ansieht, daß sie vermöge des Zeichens $\sqrt{}$ solte aus der Grösse ausgezogen werden. Folglich bedeutet $\sqrt[2]{x}$ oder schlechtweg $\sqrt{x}$ die Quadrat-Wurzel oder die zwote Wurzel von x. Eben so druckt $\sqrt[5]{(b^2-x^2)}$ die Wurzel der 5ten Dignität von (b^2-x^2) aus. Mit einem Worte $\sqrt[s]{y}$ zeiget die unbestimmte Wurzel s von der Grösse y an, u. s. w.

§. 19.

Wenn der Exponent einer Wurzelgrösse der nämliche ist als der, den die positive Potenz, die unter dem Wurzelzeichen

stehet, hat, oder wann diese Grösse eine vollkommene Potenz und von einerley Grade mit dem Exponenten des Wurzelzeichens ist, so kann diese Grösse von dem Wurzelzeichen befreyet werden. So ist $\sqrt{xx} = x$; $\sqrt{16}$ oder $\sqrt[2]{4^2} = 4$; $\sqrt[3]{27}$ oder $\sqrt[3]{3^3} = 3$; $\sqrt{(aa - 2ac + cc)}$ oder $\sqrt[2]{(a-c)^2} = a - c$. Dieses alles ist evident.

§. 20.

Es kann eine Grösse folglich die Form von irgend einer Wurzelgrösse annehmen, ohne daß sie ihren Werth verändert, indem man nämlich diese Grösse zur Dignität von dem nämlichen Grade erhebet, den der Exponent des Wurzelzeichens, womit man sie bezeichnen wird, hat. Es sey die Grösse b^2x, die ihr in eine Wurzelgrösse von dem nämlichen Grade, als $\sqrt[3]{s}$, umformen wolltet. Erhebet deswegen b^2x zum Cubus oder zur 3ten Dignität und indem ihr sie unter dem Zeichen $\sqrt[3]{}$ setzet, so werdet ihr diese Gleichung bekommen: $b^2x = \sqrt[3]{(b^6x^3)}$. Diese Grösse hat das nämliche Wurzelzeichen als $\sqrt[3]{s}$. Noch ist alles ganz evident. (§. 19.)

§. 21.

Es folgt ferner aus dem (§. 19.) daß eine Grösse, deren Factores, das heißt, diejenigen Grössen, woraus sie durch die Multiplication entstanden ist, so beschaffen sind, daß einige von ihnen den nämlichen Exponenten haben, den das Wurzelzeichen hat, einige aber nicht, es folgt aus dem vorigen, sage ich, daß diese Grösse zum Theil von dem Wurzelzeichen könne befreyet werden.

So ist also 1) $\sqrt[3]{(a^3b)} = a\sqrt[3]{b}$, wo nur noch der Factor b mit dem Wurzelzeichen bezeichnet ist. Es sind nem-

nemlich zwo Grössen sich einander gleich, wenn sie zu gleicher Dignität erhoben worden sind und alsdenn gleiche Producte geben; Wenn man nun $\sqrt[3]{(a^3 b)}$ zum Cubus oder zur 3ten Dignität erhebet, so hat man die Grösse $a^3 b$; weil der Ausdruck $\sqrt[3]{(a^3 b)}$ anzeiget, daß man die Cubicwurzel aus $a^3 b$ ausziehen soll. Man nimmt also an, daß diese Grösse ein Cubus ist. Wenn man folglich das Wurzelzeichen $\sqrt[3]{}$ von dem Ausdruck $\sqrt[3]{(a^3 b)}$ wegnimmt, so wird diese Grösse blos dadurch zur 3ten Dignität erhöhet. Folglich ist $a^3 b$ der Würfel von $\sqrt[3]{(a^3 b)}$.

Eben so behaupte ich 2) daß $a^3 b$ der Würfel von $a\sqrt[3]{b} = a \times \sqrt[3]{b}$ sey, weil man keine Grösse zum Cubus erheben kann, wo nicht alle ihre Factores zum Würfel erhoben werden. So ist z. E. $(bcx)^3 = b^3 c^3 x^3$; Es wird also in der Grösse $a \times \sqrt[3]{b}$, die man zum Cubus erheben will, aus a die Grösse a^3 und aus $\sqrt[3]{b}$ wird b. (Nro. 1.) Folglich ist der Cubus von $a\sqrt[3]{b} = a^3 b$. Diese nämliche Grösse ist aber auch der Würfel von $\sqrt[3]{(a^3 b)}$. Folglich ist $\sqrt[3]{(a^3 b)} = a\sqrt[3]{b}$. Eben so werdet ihr finden, daß $\sqrt{8} = \sqrt{(4 \times 2)} = 2\sqrt{2}$ und daß $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{(27 \times 2)} = 3\sqrt[3]{2}$ sey, u. s. w.

§. 22.

Man kann also eine Grösse, die kein Wurzelzeichen vor sich hat und durch eine andere Wurzelgrösse multiplicirt wird, mit unter dem Wurzelzeichen setzen, ohne daß das Product dieser Grössen verändert wird. Man muß nur eine solche Grösse,

se, die man unter dem Wurzelzeichen setzen will zu der nämlichen Dignität erheben, die durch den Exponenten des Wurzelzeichens angezeiget wird, und sie alsdenn durch die unter dem Wurzelzeichen stehende multipliciren. Denn man hat kurz vorher gesehen (§. 21.) daß $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{(a^3b)}$ sey. Eben so ist $(a-b)^2\sqrt{c}=\sqrt{(aa-2ab+bb\times c)}=\sqrt{(a^2c-2abc+b^2c)}$. Man hat hier die Grösse $a-b$ unter das Wurzelzeichen gebracht, indem man sie zur 2ten Dignität erhoben und durch die Wurzelgrösse c multiplicirt hat. Auf diese Verwandelungen muß man wohl Achtung geben. Sie erleichtern die Wurzel-Rechnung gar ungemein. Wenn ihr also die Grösse $4\sqrt{5}$ hättet, so werdet ihr folgende daraus machen können, $\sqrt{(4^2\times5)}$ $=\sqrt{(16\times5)}=\sqrt{80}$ ohne im geringsten etwas von dem Werthe $4\sqrt{5}$ zu verändern.

§. 23.

Es gibt aber Grössen, aus welchen man die Wurzel von irgend einem Grade weder ganz noch aus einem Theile von ihnen ziehen kann, das heißt, es gibt Grössen, die man nach aller Strenge nicht von ihrem Wurzelzeichen befreyen kann. Unter solche gehören $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ u. s. w. Diese heissen Irrational-Grössen, das heißt, solche Grössen, die kein gemeinschaftliches Maaß mit der Einheit oder mit einigen Theilen der Einheit haben; so, daß man keine einzige Zahl habe, sie sey ganz oder gebrochen, die die Quadratwurzel von 5 sey; wie ich dieses in §. 72. der Algebra im ersten Theile meiner Institutionen bewiesen habe. * Indessen ohngeachtet es Grös-

* Der Beweis ist ungefehr dieser: Es kann die Quadrat-Wurzel aus 5 weder 2 noch 3 seyn. Denn 2 wäre zu klein, weil 2 mal 2 nur 4 ist, und 3 wäre zu groß; denn 3 mal 3 gibt schon 9. Es ist folglich die wahre Wurzel zwischen 2 und 3 enthalten und folglich keine ganze Zahl. Sie wäre also, wenn man

Grössen gibt, wovon man mit aller Genauigkeit die Wurzel nicht haben kann, so habe ich doch in meinen Institutionen gezeiget, daß man sich derselben unendlich nähern könne, und daß man also hierinn ein Supplement habe, welches grösser ist als die Bedürfnisse des gemeinen Lebens es verlangen.

§. 24.

Manchesmal findet man so gar Wurzelgrössen, bey welchen die Annäherung zur wahren Wurzel unmöglich, und die Aufsuchung derselben absurd ist. So ist z. E. $\sqrt{-a^2}$ weder $+a$ noch $-a$ und sie kann keines von beyden seyn. Denn

man sie anders genau bestimmen könnte, 2 und überdieß noch ein gewisser Theil der Einheit, das heißt, sie wäre $=2+$ einem Bruch. Allein auch dieses ist unmöglich. Warum? Sollte sie so groß seyn als 2 nebst einem Bruche, so müßte diese Grösse durch sich selbst multiplicirt endlich 5 geben. Es wird aber niemals eine ganze Zahl entstehen, wenn man einen wirklichen Bruch durch sich selbst multiplicirt. Denn wenn man den Bruch zu seinem einfachsten Ausdruck bringt, so hat dessen Zähler und Nenner keine Wurzel, die beyden gemeinschaftlich wäre. Man multiplicire daher diesen Bruch durch sich selbst, so bringt man ja dadurch keine neue Wurzeln hinzu. Folglich muß auch das Product noch ein Bruch seyn, dessen Zähler und Nenner keine gemeinschaftliche Wurzel hat. Will man nun zum Quotienten ein Ganzes, das heißt, einen Quotienten, wobey kein Bruch mehr ist, haben, so muß sich der Zähler durch den Nenner, ohne daß etwas übrig bliebe, dividiren lassen, und hierzu wird erfordert, daß Zähler und Nenner gemeinschaftliche Wurzeln haben. Da dieses nun nicht ist, so ist der Quotient ein Bruch und folglich kann keine ganze Zahl, deren Wurzel kein Ganzes ist, einen Bruch zur Quadrat-Wurzel haben: Folglich ist das Quadrat eines vermischten Bruchs unmöglich eine ganze Zahl. Da nun die Zahl 5 weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl zu ihrer Wurzel haben kann, so folgt, daß man nach aller Strenge genommen von 5 oder von jeder andern Zahl, die zur Wurzel keine ganze Zahl hat, die Quadrat-Wurzel nicht bestimmen könne. B.

wenn man $+a$ oder $-a$ zum Quadrat erhebet, so bekommt man niemals $-a^2$. Eben so ist $\sqrt{-9}$ weder $+3$ noch -3, weil 3×3 oder -3×-3 beydes $+9$ nicht aber -9 geben. Deswegen heissen diese Arten von Grössen **eingebildete oder unmögliche**, und man muß eine Grösse für eine eingebildete halten, wenn sie negativ ist, und sich unter einem Wurzelzeichen befindet, dessen Exponent eine grade Zahl ist. Z. E. $\sqrt[6]{-a^6}$, $\sqrt[4]{-a^4}$. u. s. w. Dieses sind **eingebildete** Grössen weil keine positive noch negative Grösse nach einer graden Anzahl durch sich selbst multiplicirt jemals ein negatives Product geben kann.

§. 25.

Allein was bedeutet eine **eingebildete** Grösse warum will man sie in der Rechnung annehmen. Wenn man eine Aufgabe auflösen will, so weiß derjenige, der diese Auflösung sucht vom Anfange noch nicht, ob er sich eine mögliche oder unmögliche Sache vorgenommen habe? Er ist folglich verbunden alle Bedingungen der Frage auszudrucken, ob es gleich seyn kann, daß sie sich unvermerkt widersprechen. Kommt nun, nachdem man alles, was zur gesuchten Auflösung führen kann, verglichen hat, ein Resultat heraus, welches durch eine **eingebildete** Grösse ausgedruckt ist, so ist es gewiß und er kann es beweisen, daß man ihm eine unmögliche Aufgabe vorgelegt habe und das Problem ist also würklich aufgelöset. Ich habe dieses in meinen Institutionen gezeiget. *

§. 26.

---

* In der Lehre von den eingebildeten Grössen sind nicht alle Gelehrten von einerley Meinung. Verschiedene halten sie für wirkliche Grössen, die so gar sich geometrisch construiren liessen. Diese Gedanken äussert Herr Kühn in seinen *meditationibus de quantitatibus imaginariis*. Man lese diese Schrift in dem 3ten Theil der Abhandlungen der Akademie zu Petersburg. Die gegründeten Erinnerungen, die der Herr Karsten dagegen gemacht hat, findet man in dem 3ten Stücke seiner Bey-

§. 26.

Eingebildete Grössen können und müssen also in den Calcul kommen. Sie können so gar recelle Grössen werden, wenn man die Unmöglichkeit, die sie daran verhindert, wegnimmt. Es ist —4 eine reelle Grösse und sehr möglich, weil man 4 weniger als 0 oder als Nichts haben kann. So ist der Zustand eines Menschen, der nichts besitzt und 100 Gulden schuldig ist. Er hat 100 Gulden weniger als Nichts, weil er, wenn man ihm 100 Gulden gäbe, noch im Zustande des Nichts seyn würde. Wenn man also aus —4 die Quadratwurzel auszuziehen forderte, wovon der Ausdruck folgender wäre, $\sqrt{-4}$, so würde man eine unmögliche Sache begehren und $\sqrt{-4}$ wäre eine eingebildete Grösse, die ei-

 ne

Beyträge zur theoret. Math. Kurz und artig hat diese Meynung Herr Holland in seiner kleinen Abhandlung über die Mathematik gleichfals widerleget. Andere Gelehrte geben zwar gerne zu, daß man sie nicht geometrisch construiren könne, daß es weder positive noch negative Grössen, am allerwenigsten aber Nullen sind. Aber sie wollen nicht haben, daß es contradictorische Grössen sind. Sie sollen vielmehr im philosophischen Verstande positive seyn, weil man sie sich vorstellen und einbilden kann. Vielleicht habe ich Gelegenheit an einem andern Orte mich weitläuftiger über diese Meynung einzulassen, die mir aus verschiedenen Gründen nicht vollkommen gefällt. Endlich halten die eingebildeten Grössen sehr viele, wie sie es auch in der That sind, für ein metaphysisches Nichts. So sagt Herr Holland: Sie sind Begriffe, die aus lauter Widersprüchen zusammengesetzt sind. Sie sind eine ungereimte Antwort des Calculs auf eine ungereimte Frage, wodurch wir etwas suchen, welches durch das angenommene bereits ausgeschlossen ist. Dieses ist auch vollkommen die Meynung des Herrn de la Chapelle, und wo ich nicht irre, die vernünftigste und beste die man hierinn haben kann. Eben deswegen werden sie auch von sehr vielen unmögliche Grössen genennet. B.

ne reelle werden könnte, wenn man sie durch sich selbst multiplicirte, das heißt, wenn man die Unmöglichkeit wegnähme, die sie verhinderte eine reelle zu seyn. So ist $\sqrt{-4} \times \sqrt{-4} = -4$. Denn da das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ allein die Unmöglichkeit des Ausdrucks $\sqrt{-4}$ macht, so wird allein die Unterdrückung desselben, die darunter stehende Grösse zu einer reellen machen. Man darf sich also in der Folge nicht wundern, wenn man siehet, daß es sich mit eingebildeten Grössen rechnen lasse, ja daß sie sogar reelle werden.

§. 27.

Bemerket wohl, daß ein sehr grosser Unterschied zwischen einer eingebildeten und einer solchen Grösse sey, die dem Nichts oder dem Zero gleich ist. Denn eine Grösse, die dem Nichts gleich ist, ist nicht unmöglich. Es ist ja möglich, daß eine Grösse durch die andere aufgehoben werde. Eine eingebildete Grösse hingegen ist unmöglich, oder enthält einen Widerspruch. Ihr werdet nicht sagen können, daß eine eingebildete Grösse als Nichts betrachtet werden könne. Sie ist noch etwas geringeres. Eben so kann eine Grösse, die dem Zero gleich ist, nicht für eine eingebildete genommen werden, weil es nicht unmöglich ist, daß eine Grösse Nichts werde.

§. 28.

Vermittelst der vorherigen Betrachtungen kann man zuweilen eine Wurzelgrösse einfacher machen, oder sie zu dem einfachsten Ausdrucke bringen. Es ist z. E. $\sqrt{27} = \sqrt[2]{(9 \times 3)} = \sqrt{(3^2 \times 3)} = 3\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{(27 \times 2)} = \sqrt[3]{(3^3 \times 2)} = 3\sqrt[3]{2}$. Eben so ist $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{(64 \times 3)} = \sqrt[3]{(4^3 \times 3)} = 4\sqrt[3]{3}$ (§. 21.). Auch ist $\sqrt[4]{(a^4c - a^4b)} = \sqrt[4]{(a^4 \times (c-b))} = a\sqrt[4]{(c-b)}$. Gleichfals ist $\sqrt[2]{(c^2s - 2bcs + b^2s)} = \sqrt[2]{(c^2 - 2bc + b^2) \times s)} = (c-b)\sqrt{s}$, u. s. w. Um also

so eine Wurzelgrösse zu ihrem einfachsten Ausdruck zu bringen, so muß man aus den Factoren der Grössen unter dem Wurzelzeichen, die Wurzel ausziehen und zwar aus denjenigen Factoren die Dignitäten von dem nämlichen Grade sind, als der Grad des Exponentens des Wurzelzeichens ist; * Man muß die andern Factores unter dem Wurzelzeichen lassen und durch die gefundene Wurzel dieses Zeichen multipliciren. Wie man dieses im §. 21. gezeiget hat.

§. 29.

---

* Hier, dünkt mich, hätte der Herr Verfasser gar füglich vorhero zeigen können, wie man die Grössen zu dieser Veränderung manchmal vorbereiten muß. Sie scheinen öfters gar nicht so beschaffen zu seyn, daß man aus ihnen eine solche Wurzel ausziehen könne. Von der Art ist z. E. folgende Grösse $\sqrt{(56\times4)}$ oder allgemein $\sqrt{(a^2y+2ayz+yz^2)}$. Hier muß man solche Grössen erst in schickliche Factores zerlegen, wovon einer oder einige oder alle Dignitäten von dem nämlichen Grade sind, den der Exponent des Wurzelzeichens hat. Die Exempel des Herrn Auctors führen zwar darauf. Allein wer kann von Anfängern verlangen, aus denselben, ohne weitere Anweisung darzu, sich Regeln zu abstrahiren. Man nehme nun die vorhin angeführten Beyspiele. Man will diesen Ausdruck $\sqrt[3]{(56\times4)}$ so einfach ausdrucken als möglich ist, so kann man nach den Regeln des Herrn de la Chapelle hier nichts weiter vornehmen. Denn aus 56 und 4 als den beyden Factoren läßt sich keine Cubikwurzel ausziehen. Man wende die itzt noch fehlende Regel an, daß man nämlich wenn es möglich ist diese Factores in andere Factores zerlegt, die von einerley Grade der Dignität mit dem Wurzelzeichen sind, z. E. 56 in 8 und 7 so ist $56=8\times7$ und $\sqrt[3]{(56\times4)}=\sqrt[3]{(8\times7\times4)}$. Nun ist $8=2^3$. Folglich ist $\sqrt[3]{(8\times7\times4)}=\sqrt[3]{(2^3\times7\times4)}=2\sqrt[3]{(7\times4)}=2\sqrt[3]{28}$. Eben so ist die unmittelbare Anwendung der Chapellischen Regel bey folgender Grösse $\sqrt[2]{(a^2y+2ayz+yz^2)}$ wenigstens für Anfänger nicht schicklich. Man verändere erst diese Grösse. Und da

§. 29.

Dieses zeiget uns, wie man eine Wurzelgrösse, die unter dem Wurzelzeichen einen Bruch hat, in eine andere von dem nämlichen Werthe verwandeln könne, wovon die Potenz, die unter dem Wurzelzeichen stehet, eine ganze Zahl ist. Denn man mache, daß der Nenner dieses Bruchs eine vollkommene Potenz von dem nämlichen Grade mit dem Exponenten des Wurzelzeichens werde; Man wird alsdenn durch die Ausziehung der Wurzeln, oder indem man die Grösse auf den einfachsten Ausdruck bringt, die Grösse, die unter dem Wurzelzeichen stehet, von der Grösse befreyen, wodurch sie bestimmt wird ein Bruch zu seyn. So kann $\sqrt{\frac{5}{8}}$ ohne Veränderung des Werths eine ganze Zahl unter dem Wurzelzeichen haben. Man darf nur den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch 8 multipliciren, so wird man folgende Gleichungen bekommen

$$\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\left(\frac{5\times 8}{8\times 8}\right)} = \sqrt{\left(40\times\frac{1}{8\times 8}\right)} = \frac{1}{8}\sqrt{40} \text{ (§. 28.)}$$

Durch eine ähnliche Methode werdet ihr die Grösse $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ verwandeln. Erhebet nur den Nenner dieses Bruchs $\frac{2}{3}$ zum Cubus, das heißt, multipliciret den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch das Quadrat seines Nenners, so ist

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2\times 3\times 3}{3\times 3\times 3}\right)} = \sqrt[3]{\left(18\times\frac{1}{3\times 3\times 3}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$$

(§. 21.)

---

da a^2 und $2az$ und z^2 alle durch y multiplicirt worden sind, so setze man statt $\sqrt{(a^2y+2ayz+yz^2)}$ folgende Grösse $\sqrt{(a^2+2az+z^2)\times y)}$. Hier ist der eine Factor ein vollkommenes Quadrat und es läßt sich also auch die Quadratwurzel daraus leicht ausziehen, welche $=$ ist $a+z$. Nun ist nach den im §. selbst angeführten Regeln $\sqrt{(a^2+2az+z^2)\times y)}$ $= (a+z)\sqrt{y}$ und diese Grösse ist also auch zu dem einfachsten Ausdruck gebracht worden. B.

(§. 21.). Es wird endlich aus $\sqrt[4]{\frac{bd}{c}}$ folgende Grösse werden können $\sqrt[4]{\left(\frac{bd\times c^3}{c\times c\times c\times c}\right)}=\sqrt[4]{\left(bc^3d\times\frac{1}{c^4}\right)}=\frac{1}{c}\sqrt[4]{(bc^3d)}$ u. s. w.

§. 30.

Es kann auch geschehen, daß eine Wurzelgrösse ihren Werth nicht verändert, ohngeachtet der Exponent von ihrem Wurzelzeichen in einen andern verwandelt wird. Es darf nur die Grösse, die unter dem Wurzelzeichen stehet, zu gleicher Zeit zu dem Grade erhoben werden, welchen die Zahl anzeigt, wodurch man den Exponenten, um ihn zu verwandeln multipliciret hat. Wollt ihr z. E. daß der Exponent von der Grösse $\sqrt[3]{b}$ 6 sey, so multipliciret den Exponenten 3 durch 2. Erhebt darauf die Grösse b zum Quadrat oder zur 2ten Dignität, so wird $\sqrt[3]{b}=\sqrt[3\times2]{b^2}=\sqrt[6]{b^2}$ seyn. Dieses Wurzelzeichen hat verlangter massen 6 zum Exponenten. Eben so verfährt man bey der Veränderung der Grösse $\sqrt[3]{c}$ in eine andere die zum Exponenten 12 hat. Man multiplicire den Exponenten 4 durch 3 und erhebe die Grösse c zur 3ten Dignität; Dieses gibt folgende Gleichung $\sqrt[4]{c}=\sqrt[4\times3]{c^3}=\sqrt[12]{c^3}$, wo man den verlangten Exponent erblickt.

Beweis. Es kommt darauf an, allgemein zu beweisen, daß $\sqrt[s]{b}=\sqrt[sx]{b^x}$ sey. Dieses ist aber evident. Denn es ist $\sqrt[s]{b}=b^{\frac{1}{s}}$ (§. 14.) und $\sqrt[sx]{b^x}=b^{\frac{1}{s}}$. Ein Beweis der in die Augen fällt.

§. 31.

Diese Verwandelung ist sehr bequem, wenn man verschiedenen Wurzelgrössen, die nicht einerley Exponenten haben, einerley Exponenten geben will; Solche Grössen sind $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[4]{f}$. Denn es ist $\sqrt[3]{c} = \sqrt[3\times4]{c^4}$ und $\sqrt[4]{f} = \sqrt[4\times3]{f^3}$ (§. 30.) Wenn man folglich statt der gegebenen Wurzelgrössen nachstehende Grösse $\sqrt[12]{c^4}$ und $\sqrt[12]{f^3}$ nimmt, die den vorigen gleich sind, so wird man Wurzelgrössen haben, deren Exponenten sich gleich sind. Damit folglich zwey Wurzelzeichen, die nicht einerley Exponenten haben, solche bekommen mögen, so muß man den Exponenten des ersten durch den Exponenten des zweyten multipliciren; darauf die Grösse, die unter dem ersten Wurzelzeichen stehet zu der Dignität erheben, die der Exponent des 2ten anzeigt; Umgekehrt muß man alsdenn den Exponenten des 2ten Zeichens durch den Exponenten des ersten multipliciren und die Grösse, die unter dem 2ten Zeichen stehet, zu derjenigen Dignität erheben, die der Exponent des ersten Zeichens anzeiget.

§. 32.

Diese Regel ist nur in dem Falle einer Ausnahme unterworfen, wo man sie einfacher machen kann, wenn die Exponenten der Wurzelgrössen einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Hier dividiret man diese Exponenten durch ihren grösten gemeinschaftlichen Divisor, und durch die Quotienten multiplicirt man wechselsweise die Exponenten der gegebenen Wurzelgrössen: So werden die Grössen, die unter dem Wurzelzeichen stehen, zu dem Grade erhoben werden, der durch diejenige Zahl angezeiget wird, durch welche der Exponent ihres Wurzelzeichens wird multiplicirt worden seyn. Da z. E. die beyden Wurzelgrössen $\sqrt[9]{b}$ und $\sqrt[9]{c}$ als den grösten gemeinschaft-

schaftlichen Divisor 3 haben, so muß man 6 durch 3 dividiren so ist der Quotient =2 und 9 : 3=3. Wenn man darauf den Exponenten 6 des 1sten Wurzelzeichens, durch den 2ten Quotienten 3 und den Exponenten 9 des 2ten Wurzelzeichens, durch den 1sten Quotienten 2 multiplicirt, so bekommt man $\sqrt[6]{b}=\sqrt[6\times3]{b^3}=\sqrt[18]{b^3}$ und $\sqrt[9]{c}=\sqrt[9\times2]{c^2}=\sqrt[18]{c^2}$. Hierdurch werden $\sqrt[6]{b}$ und $\sqrt[9]{c}$ in $\sqrt[18]{b^3}$ und $\sqrt[18]{c^2}$ verwandelt, deren Wurzelzeichen einerley Exponenten haben, ohne daß die Wurzelgrössen selbst ihren Werth verändert hätten. (§. 30.)

Beweis. Was die Nenner anbetrift, nach welcher man in Ansehung der Grössen, die unter dem Wurzelzeichen sind, verfährt, so liegt der Beweis darvon in §. 30. Es ist also nur noch in Ansehung der Exponenten zu zeigen, daß 2 verschiedene Grössen sich gleich werden, wenn man sie zuerst durch ihren grösten gemeinschaftlichen Divisor dividiret und darauf die erste durch den 2ten Quotienten und die 2te durch den ersten Quotienten multiplicirt. Es mögen a und c zwo Grössen seyn und d ihr gemeinschaftlicher gröster Divisor. Wir wollen setzen, es sey $\frac{a}{d}=p$ und $\frac{c}{d}=r$. Es ist also zu beweisen, daß $a\times r=c\times p$. Dieses ist aber unlaugbar. Denn weil $\frac{a}{d}=p$ so ist $a=dp$ und aus der nämlichen Ursache $c=dr$. Folglich ist $a\times dr=c\times dp$; wenn man folglich mit d dividirt, so ist $a\times r=c\times p$.

§. 33.

Das, was man so eben im §. 31. und 32 erklärt hat, kann darzu dienen, mit einer Leichtigkeit zu zeigen, ob zwo Grössen, die einzeln genommen **irrational** sind, nicht unter sich **rational** sind, wenn man eine mit der andern vergleichet: Das will so viel sagen, ob sie sich nicht zu einander verhalten, wie eine ganze oder gebrochene Zahl zu einer andern ganzen

oder

gebrochenen. Denn, man gebe den Wurzelzeichen der gegebenen Grössen einerley Exponenten und bringe alles auf den einfachsten Ausdruck. Findet sich nun unter den Wurzelzeichen die nämliche Grösse, so sind diese Grössen rational, wo nicht, so sind sie irrational. Man wird z. E. auf diese Art finden, daß $\sqrt{27}$ und $\sqrt{12}$ die für sich irrational sind, dennoch unter einander rational sind. Denn sie verhalten sich unter einander, wie 3 : 2. Denn es ist $\sqrt{27}=\sqrt{(9\times3)}=3\sqrt{3}$ (28) und $\sqrt{12}=\sqrt{(4\times3)}=2\sqrt{3}$. Folglich ist $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}$. Folglich verhält sich $\sqrt{27} : \sqrt{12}=3:2$.

Wenn man aber der Vorschrift im §. 31. folgt, so wird man finden daß die Wurzelgrössen $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, die für sich irrational sind, auch unter einander irrational sind. Denn aus den gegebenen Grössen wird $\sqrt[3]{(2^3\times2)}$, $\sqrt[2]{(3^2\times2)}$. Wenn diese in Wurzelgrössen von einerley Exponenten verwandelt werden, so werden sie $\sqrt[6]{(2^6\times4)}$, $\sqrt[6]{(3^6\times8)}$ [§. 31.] und haben den nämlichen Werth, als die gegebenen. Werden diese auf den einfachsten Ausdruck gebracht, so wird daraus $2\sqrt[6]{4}$ und $3\sqrt[6]{8}$ (§. 28.) Diese haben nicht einerley Grössen unter dem Wurzelzeichen und sind daher irrational, weil, wenn sie sich unter einander verhalten sollten, wie eine Zahl zur andern, man bey ihrer Vergleichung die Wurzelzeichen müßte verschwinden lassen können. Dieses ist nur in dem Falle möglich, wo die Grössen unter dem Wurzelzeichen sich gleich sind.

§. 34.

Von der Addition der Wurzelgrössen.

Wir werden, ehe wir diese Operation anfangen, voraus setzen, daß man mit den Wurzelgrössen, wenn es nöthig ist, diese

diese Vorbereitung, die wir eben angezeiget haben, vorgenommen habe, damit man leichter die Aehnlichkeit der Grössen von dieser Art beurtheilen könne. Auch muß man wohl bemerken, daß ähnliche Wurzelgrössen solche sind, die vollkommen die nämliche Grösse unter ihrem Wurzelzeichen haben, deren Exponent auch derselbige ist, und die ausserdem noch ähnliche Coëfficienten haben. Solche Grössen sind $3b\sqrt{cd}$ und $5b\sqrt{cd}$: Allein die Grössen $a\sqrt[3]{f}$ und $a\sqrt[4]{f}$ sind sich nicht ähnlich. Dieses vorausgesetzt, so verfährt man folgendermassen, wenn man nachstehende Grössen addiren will: $2a\sqrt{(bc)} - 5b\sqrt{(df)} + c\sqrt{f} + s$ (A) und $3c\sqrt{f} - a\sqrt{(bc)} - r - b\sqrt{(df)}$ (B). Man muß diese Grössen so ordnen, daß die ähnlichen Glieder der einen unter den ähnlichen Gliedern der andern zu stehen kommen, wie man dieses in der Operation selbst ausgeübet siehet.

$$\begin{array}{rl} & 2a\sqrt{(bc)} - 5b\sqrt{(df)} + c\sqrt{f} + s \;(A) \\ & -a\sqrt{(bc)} - b\sqrt{(df)} + 3c\sqrt{f} - r \;(B) \\ \hline \text{Summe.} & a\sqrt{(bc)} - 6b\sqrt{(df)} + 4c\sqrt{f} + s - r. \;(D) \end{array}$$

Wenn man hierauf die Reduction der ähnlichen Glieder vornimmt, so wird man finden, daß die Summe der vieltheiligen Grössen A und B die Grösse D sey.

§. 35.

Von der Subtraction der Wurzelgrössen.

Man muß hier eben so, wie in der vorhergehenden Operation verfahren, ausgenommen, daß man die Zeichen der Glieder der vieltheiligen abzuziehenden Grösse verwechselt: Wenn man folglich die vieltheilige Grösse $2\sqrt[3]{(ad)} - b\sqrt{(fg)} - a\sqrt[4]{(fm)} + b$ (G) von der Grösse $3b\sqrt{(fg)} - 2a\sqrt[4]{(fm)} + 4\sqrt[3]{(ad)} - d$ (M) abziehet, so wird man die Grösse L für

die gesuchte Differenz erhalten: Wie dieses die Operation zeiget:

$$3b\sqrt{(fg)} - 2a\sqrt[4]{(fm)} + 4\sqrt[3]{(ad)} - d \quad (M)$$
$$+b\sqrt{fg} + a\sqrt[4]{(fm)} - 2\sqrt[3]{(ad)} - b. \quad (G)$$

Differ. $4b\sqrt{(fg)} - a\sqrt[4]{(fm)} + 2\sqrt[3]{(ad)} - d - b.$ (L)

§. 36.

Von der Multiplication der Wurzelgrössen.

Wir werden in der Folge im Gegensatze der Wurzelgrössen oder Irrationalgrössen, diejenigen Grössen Rationalgrössen nennen, die mit keinem Wurzelzeichen bezeichnet sind, oder die durch kein Wurzelzeichen multipliciret werden. Man muß auch darauf aufmerksam seyn, daß man bey einer jeden Wurzelgrösse, die keine Coefficienten hat, die Einheit zum Coefficienten annehmen müsse. So ist also $\sqrt{c} = 1\sqrt{c}$. Wenn man daher

I. eine Irrationalgrösse durch eine Rationalgrösse multipliciren will, so ist man darinn einig geworden, die Rationalgrösse unmittelbar vor der Irrationalgrösse ohne das geringste andere Zeichen zu schreiben, aber dennoch die Regeln der Multiplication in Absicht auf die Zeichen + und — zu beobachten. Folglich ist $\sqrt{(ab)} \times c$ oder $c \times \sqrt{(ab)} = c\sqrt{(ab)}$; Eben so ist $-b \times \sqrt{(df)}$ oder $-\sqrt{(df)} \times b = -b\sqrt{(df)}$; Imgleichen ist $(c-d) \times \sqrt{(f^2 - g^2)} = (c-d)\sqrt{(f^2 - g^2)}$. Um aber

II. zwo Irrationalgrössen durch einander zu multipliciren, so macht man damit den Anfang, daß man ihren Wurzelzeichen einerley Exponenten gibt, wenn sie solche nicht haben. Hierauf multiplicirt man diejenigen Grössen durcheinander, die ausserhalb dem Wurzelzeichen sich befinden, und durch dasselbe multipliciret werden sollen. Endlich multiplicirt man auch diejenigen Grössen, die unter dem Wurzelzeichen stehen, durcheinander und setzt vor diesem Produkte das gemeinschaftliche Wurzelzeichen, so, daß es zu diesem ganzen Produkte

kte gehöre. Diese ganze so bezeichnete Grösse muß unmittelbar an dem Produkte der Grössen geschrieben werden, die ausserhalb dem Wurzelzeichen sich befinden werden. Man muß dabey nur immer die Regeln in Ansehung der Zeichen + und — beobachten und nicht vergessen, alles auf den simpelsten Ausdruck zu bringen. Es ist also $2b\surd(cd) \times 4b\surd(cd) = 8b^2\surd(c^2d^2) = 8b^2cd$ [§. 19.] Gleichermassen ist $2c\surd(bd) \times -3b\surd(bc) = -6bc\surd(b^2cd) = -6b^2c\surd(cd)$ [§. 21.] Eben so ist $-\surd(c-d) \times +\surd(c-d) = -\surd(c-d)^2 = -1 \times (c-d)$ [§. 19.] $= -c+d$. Auch wird man finden, daß $2a\surd(3bc) \times 3b\surd(4ab) = 6ab\surd(12ab^2c) = 6ab\surd(4b^2 \times 3ac) = 12ab^2\surd(3ac)$ sey [§. 21.] So ist auch $-\sqrt[4]{c^3} \times -\sqrt[4]{c} = +\sqrt[4]{c^4} = +c$ [§. 19.] Wollet ihr wissen, welches das Product aus $\sqrt[2]{(cd)} \times \sqrt[3]{(c^2d)}$ sey, so verwandelt diese Grössen zuerst in solche, deren Wurzelzeichen einerley Exponenten haben; Dann werdet ihr bekommen: $\sqrt[6]{(c^3d^3)} \times \sqrt[6]{(c^4d^2)}$ [§. 31.] $= \sqrt[6]{(c^7d^5)} = \sqrt[6]{(c^6+cd^5)} = c\sqrt[6]{(cd^5)}$ [§. 21.] Soll man endlich folgende Irrationalgrössen durcheinander multipliciren, nämlich $\sqrt[6]{(cd)}$ und $\sqrt[4]{(df)}$; So gebe man ihren Wurzelzeichen einerley Exponenten; alsdenn wird $\sqrt[12]{(c^2d^2)}$ und $\sqrt[12]{(d^3f^3)}$ daraus: [§. 32.] Und diese, durch einander multiplicirt, geben $\sqrt[12]{(c^2d^5f^3)}$ für das Produkt aus $\sqrt[6]{(cd)} \times \sqrt[4]{(df)}$. Hätte man inzwischen

III. eine eingebildete Grösse durch eine eingebildete oder reelle zu multipliciren, so wird es besser seyn, die Multiplication blos anzuzeigen, damit man während der Rechnung und am Ende derselben jederzeit eine eingebildete Grösse wieder erkennen könne. Um also $\surd a$ durch $\surd -cc$ zu mul-

tipliciren, so schreibe man: $\sqrt{a} \times \sqrt{-cc}$; Eben so wird das Product aus $\sqrt{-c^2}$ und $\sqrt{-d^2}$ folgendes seyn: $\sqrt{-c^2} \times \sqrt{-d^2}$; So ist auch $c\sqrt{(df)} \times -f\sqrt{-d^2} = -cf\sqrt{df} \times \sqrt{-d^2}$; Und endlich $2c\sqrt{-d^2} \times -3b\sqrt{-d^2} = -6bc\sqrt{-d^2} \times \sqrt{-d^2} = -6bc \times -d^2$ [§. 26.] $= 6bcd^2$.

Beweis. Es kommt darauf an, zu zeigen, daß, wenn die Wurzelzeichen einerley Exponenten haben, man die Grössen, die unter dem Wurzelzeichen stehen, durch einander multipliciren und dieses Produkt mit dem gemeinschaftlichen Wurzelzeichen bezeichnen müsse. Denn was die Grössen, die ausserhalb dem Wurzelzeichen stehen, anbetrifft, so hat es nicht die geringste Schwürigkeit. Folglich ist zu beweisen, daß $\sqrt[s]{c} \times \sqrt[s]{d} = \sqrt[s]{cd}$ sey. Dieses ist aber evident. Denn, wenn ihr diese beyden Grössen zur Dignität s erhebet, so werdet ihr von der einen und der andern Seite das nämliche Produkt cd finden. (Beweis des §. 21.) Da

IV. polynomische Irrationalgrössen nur aus uninomischen zusammen gesetzet sind, so ist es sichtlich, daß, wenn man zwo solche polynomische Grössen durch einander zu multipliciren gibt, man nur die uninomischen Grössen so oft multipliciren müsse, als es nöthig ist, und daß man hier folglich alles dasjenige beobachten müsse, was man im § 36. gesagt und bewiesen hat. Wir setzen beständig voraus, daß man Sorge getragen habe, ehe man die Operation anfängt, allen Wurzelzeichen einerley Exponenten zu geben. Es wird folglich hinreichend seyn, Beyspiele anzuführen.

$$
\begin{array}{llll}
2b\sqrt{c} & + d\sqrt{f} & & \\
 & \times & & \\
2b\sqrt{c} & + d\sqrt{f} & & \\
\hline
4b^2c & + 2bd\sqrt{(cf)} & & \\
 & + 2bd\sqrt{(cf)} & + d^2f & \\
\hline
4b^2c & + 2bd\sqrt{(cf)} & + d^2f. &
\end{array}
$$

$=$ dem ganzen Product.

$$3c + \sqrt{-d^2}$$
$$\times$$
$$3c + \sqrt{-d^2}$$
$$9c^2 + 3c\sqrt{-d^2}$$
$$-3c\sqrt{(-d^2)} - 1\times -d^2$$
$$9c^2 \quad * \quad + d^2.$$

$=$ dem ganzen Product.

$$\sqrt{(fg)} - \sqrt{(cc - dd)}$$
$$\times$$
$$\sqrt{(fg)} - \sqrt{(cc - dd)}$$
$$fg - \sqrt{(c^2fg - d^2fg)}$$
$$-\sqrt{(c^2fg - d^2fg)} + c^2 - d^2.$$
$$fg - 2\sqrt{(c^2fg - d^2fg)} + c^2 - d^2.$$

$=$ dem ganzen Product.

$$\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d} - \sqrt[3]{f}$$
$$\times$$
$$\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{f}$$
$$\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{(cd)} - \sqrt[3]{cf}$$
$$-\sqrt[3]{(cd)} - \sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{df}$$
$$+\sqrt[3]{(cf)} + \sqrt[3]{(df)} - \sqrt[3]{f^2}.$$
$$\sqrt[3]{c^2} \quad * \quad -\sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{(df)} - \sqrt[3]{f^2}.$$

$=$ dem ganzen Product.

---

§. 37.

Von der Division der Irrationalgrössen.

Da die Division das entgegengesetzte der Multiplication ist, so muß alles, was in der vorigen Operation durcheinander multiplicirt worden ist, in dieser dividiret werden. Um also

I.) eine uninomische Irrationalgrösse durch eine uninomische Rational- oder Irrationalgrösse zu dividiren, so muß man damit anfangen, sie zu lauter Irrationalgrössen zu machen. (§. 20.) Und nachdem man den Wurzelzeichen des Dividendus und des Divisors einerley Exponenten gegeben hat, (§. 31.) so muß man ganz simpel die Grössen, die unter dem Wurzelzeichen des Dividendus seyn werden, durch die nämlichen Grössen des Divisors dividiren. Hierdurch wird eine Grösse entstehen, die, wenn sie mit dem gemeinschaftlichen Wurzelzeichen bezeichnet ist, der gesuchte Quotient seyn wird. Wenn man folglich $c\sqrt{d}$ durch $-\sqrt{(cd)}$ dividiren soll, so schreibe man $\frac{c\sqrt{d}}{-\sqrt{(cd)}} = \frac{\sqrt{(c^2d)}}{-\sqrt{(cd)}}$ [§. 20.] $= -\sqrt{\left(\frac{c^2d}{cd}\right)}$ $= -\sqrt{c}$. Dieses ist der gesuchte Quotient. Denn es ist der Divisor $-\sqrt{cd}\times$ durch den Quotienten $-\sqrt{c} = \sqrt{(c^2d)}$ [§. 36.] $=$ dem Dividendus $c\sqrt{d}$ [§. 28.]

Wollet ihr 3 durch $\sqrt{5}$ dividiren, so schreibet $\frac{3}{\sqrt{5}}$ $= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}$ [§. 20.] $= \sqrt{\tfrac{9}{5}} = \sqrt{(9\times\tfrac{1}{5})} = \sqrt{(3\sqrt{\tfrac{1}{5}}}$ [§. 21.] Denn es ist $3\sqrt{\tfrac{1}{5}}$ oder $\sqrt{(\tfrac{9}{5})}\times\sqrt{5} = \sqrt{9}$ [§. 36.] $=$ dem Dividendus 3. Eben so, wenn man $\sqrt[3]{21}$ durch 7 dividiren soll, so muß man schreiben: $\frac{\sqrt[3]{21}}{7} = \frac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{7^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3\times 7}{7\times 7\times 7}\right)} = \sqrt[3]{\tfrac{3}{49}}$.

Wenn

Wenn man uns $-\sqrt{(c^2-d^2)}$ durch $-\sqrt{(c+d)}$ zu dividiren giebt, so muß man schreiben $\frac{-\sqrt{(c^2-d^2)}}{-\sqrt{(c+d)}}$ $=+\sqrt{\frac{(c-d)\times(c+d)}{c+d}}=+\sqrt{(c-d)}$. Es sey noch $\sqrt{(c^4d^2)}$ durch $\sqrt{(c^2d)}$ zu dividiren; So setze man $\frac{\sqrt{(c^4d^2)}}{\sqrt{(c^2d)}}=\sqrt{\frac{(c^4d^2)}{(c^2d)}}=\sqrt{(c^2d)}=c\sqrt{d}$. Dieses ist der gesuchte Quotient. [§. 28.]

Lasset uns endlich annehmen, daß man $\sqrt[3]{(cd)}$ durch $\sqrt[2]{(cd)}$ dividiren wolle. So ist $\frac{\sqrt[3]{(cd)}}{\sqrt[2]{(cd)}}=\frac{\sqrt[6]{(c^2d^2)}}{\sqrt[6]{(c^3d^3)}}$ [§ 31.] $=\sqrt[6]{\frac{(c^2d^2)}{(c^3d^3)}}=\sqrt[6]{\frac{1}{cd}}$. Dieses alles bestätigt sich, wenn man den Quotienten durch den Divisor multiplicirt. Denn man findet immer den Dividendus wieder. Wenn man aber

II.) eine eingebildete Wurzel durch eine eingebildete zu dividiren hat, so ist es genug, die Division derselben anzuzeigen, indem man den gegebenen Grössen die Form eines Bruchs gibt, und sie immer auf den einfachsten Ausdruck bringt. Dieses geschiehet deswegen, damit man die eingebildeten Grössen wieder erkennen könne. So ist also $\sqrt{-aa}$ dividirt durch $\sqrt{-bb}=\frac{\sqrt{-aa}}{\sqrt{-bb}}$. Eben so $\sqrt{-4}$ dividirt durch $\sqrt{-2}=\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}}$; und $cd\sqrt{-cc}$ dividirt durch $d\sqrt{-cc}$ gibt $\frac{cd\sqrt{-cc}}{-d\sqrt{-cc}}=-c$ als den Quotienten. Auch wird man finden, daß $-d^2$ dividirt durch $\sqrt{-d^2}=$ sey $\frac{-d^2}{\sqrt{-d^2}}$

$= \frac{\sqrt{-d^2} \times \sqrt{-d^2}}{\sqrt{-d^2}} = \sqrt{-d^2}$, als dem gesuchten Quotienten. Wenn

III.) der Dividendus eine vieltheilige Grösse ist, und der Divisor nur ein Glied hat, so muß man nach und nach jedes Glied des Dividendus durch den Divisor dividiren. Alsdenn werden alle particulaire Quotienten den gesuchten Quotienten geben. Hier ist ein Exempel:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{24}+\sqrt{48}-\sqrt{72} & \sqrt{6} \\ \hline (*)\ -2\sqrt{6} \text{ oder } -\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{72} & 2+\sqrt{8}-\sqrt{12} \text{ oder} \\ \hline \quad * \quad * \quad * & -2\sqrt{3}, \text{ als der Quotient.} \end{array}$$

Es sey ferner $c\sqrt{cd}-f\sqrt{cf}-c\sqrt{df}$ durch $-\sqrt{c}$ zu dividiren. Man muß alsdenn damit den Anfang machen, daß man den Dividendus in eine vieltheilige Grösse verwandelt, deren Glieder insgesammt alle ihre Buchstaben unter dem Wurzelzeichen stehen haben, (§. 22.) wie man dieses bey B siehet. Darnach verfährt man wie oben.

$$\begin{array}{l|l} (B)\ \sqrt{c^3d}-\sqrt{cf^3}-\sqrt{(c^2df)} & -\sqrt{c} \\ \hline -\sqrt{c^3d}+\sqrt{cf^3}-\sqrt{(c^2df)} & -c\sqrt{d}+f\sqrt{f}+\sqrt{(cdf)} \\ \hline \quad * \quad * \quad * & \text{der Quotient.} \end{array}$$

IV.) Es ist leicht möglich, daß sowohl der Dividendus als der Divisor vieltheilige Grössen sind. Alsdenn muß man, wenn kein Hinderniß da ist, so verfahren wie im §. 64. der Algebr.

(*) Man vergleiche hiermit den §. 35, in welchem von der Subtraction gehandelt wurde. Sonst mögte man sich wundern, daß man das Factum aus 2 und $\sqrt{6}$ als $-\sqrt{24}$ angegeben hätte, da es doch $+\sqrt{24}$ seyn sollte. Es wurde nämlich in dem angezogenen §. von dem Herrn Verfasser die Regel gegeben, daß man die Zeichen der Glieder des Subtrahendus umkehren und alsdenn so, wie bey der Addition, verfahren solle. B.

Algebr. im I B. der Instit., allwo man die Methode angegeben hat, zusammengesetzte algebraische Grössen, unter welchen keine Irrationalgrösse ist, durcheinander zu dividiren.* Wir setzen hierbey immer die Vorbereitungen, wovon wir oben geredet ha-

D 5

---

* Die Regeln, wovon unser Herr Auctor hier redet, sind folgende. Gesetzt, man soll $3cy^2 + c^3 - 3c^2y - y^3$ durch $c - y$ dividiren, so ist das erste, was man vorzunehmen hat, daß man die Grössen gehörig ordne. Dieses geschiehet, wenn man sie so neben einander schreibet, wie es der Grad der Dignität erfordert. Man fängt nämlich allemal von der höchsten Dignität an. Diese ist hier nun z. E. c^3 oder y^3. Daher können diese vorgegebene Grössen folgendermassen gesetzet werden, und alsdenn die Division selbst geschehen.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
c^3 & -3c^2y & +3cy^2 & -y^3 & c-y \\
\cline{5-5}
-c^3 & +c^2y & & & c^2-2cy+y^2. \text{ der Quotient.} \\
\hline
 & -2c^2y & +3cy^2 & & \\
 & +2c^2y & -2cy^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & +cy^2 & -y^3 & \\
 & & -cy^2 & +y^3 & \\
\cline{3-4}
 & & * & * &
\end{array}
$$

Bey der Operation selbst verfährt man also. Man fragt, wie oft der erste Theil des Divisors im ersten Theile des Dividendus z. E. hier in diesem Exempel c in c^3 enthalten ist? Man findet c^2. Dieses schreibt man an der Stelle des Quotienten und nun multiplicirt man durch diesen Quotienten den ganzen Divisor $c - y$, wie in der gewöhnlichen Division, und schreibt die einzelnen Produkte unter den ähnlichen Grössen mit verwechselten Zeichen, z. E. hier $-c^3 + c^2y$. Nun ziehet man einen Strich darunter und addirt, so entsteht $-2c^2y$. Hierzu nimmt man den nächsten Theil des Dividendus $3cy^2$ herunter und untersucht wieder, wie oft c in $-2c^2y$ enthalten sey? Nämlich $-2cy$ mal. Diese Grösse wird gehörig zum Quotienten geschrieben, und der ganze Divisor dadurch wieder multipliciret und die Producte, wie vorher, geschrieben und alsdenn addiret, so bleibt noch $+cy^2$. Hierzu kommt der letzte Theil des Dividendus $-y^3$ herunter und nun verfährt man auf die nämliche Art, so wird sich alles aufheben. Mehreres von

haben, voraus; denn diese gehören nur für die Irrationalgrößen. Um also $c\sqrt{(bc)} - c\sqrt{(bd)} + d\sqrt{(cm)} - d\sqrt{(dm)}$ durch $\sqrt{c} - \sqrt{d}$ zu dividiren, so muß man anfänglich alle Buchstaben, die ausser den Wurzelzeichen stehen und durch die Multiplication damit verbunden sind, unter die Wurzelzeichen bringen. Darauf muß man so verfahren, wie man es in G siehet, allwo der Dividendus die nöthige Vorbereitung bekommen hat.

$$
\begin{array}{llll|l}
(G)\ \sqrt{bc^3} & -\sqrt{bc^2d} & +\sqrt{cd^2m} & -\sqrt{d^3m} & \sqrt{c}-\sqrt{d} \\
-\sqrt{bc^3} & +\sqrt{bc^2d} & -\sqrt{cd^2m} & +\sqrt{d^3m} & c\sqrt{b}+d\sqrt{m} \\
\hline
* & * & * & * &
\end{array}
$$

V.) Da es inzwischen in der Befolgung dieser Methode öfters geschiehet, daß man die Division der Irrationalgrößen nicht gänzlich zu Ende bringen kan, so hat man seine Zuflucht zu andern Veränderungen genommen, die zuweilen diesem Uebel abhelfen. Um das Kunststück davon begreiflich zu machen, so sey die Grösse $4\sqrt{7} + 3\sqrt{5}$ durch $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ zu dividiren. Setzet man diese Grösse in der Form eines Bruchs, so wird man bekommen $\frac{4\sqrt{7} + 3\sqrt{5}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$. Es ist aber unstreitig, daß dieser Bruch nichts von seinem Werthe verändert, wenn man den Zähler und Nenner desselben durch einerley Grösse multiplicirет. Wenn man folglich beyde durch $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ multiplicirt, so wird man diesen neuen Bruch finden $\frac{12\sqrt{14} + 9\sqrt{10} - 8\sqrt{21} - 6\sqrt{15}}{6}$, der einerley Werth mit dem vorigen hat. Wenn man nun die Division vollen-

von dieser Division, wobey noch verschiedene Anmerkungen und Cautelen gegeben werden könnten, auszuführen, erlaubet der Raum hier nicht. Man lese den angeführten §. der Institut. des Herrn Verfassers oder irgend eine andere algebraische Anweisung, deren wir ja eine ziemliche Menge haben. B.

enden will, so muß man ein jedes Glied des Zählers durch den Nenner 6 dividiren, alsdenn wird man zum gesuchten Quotienten bekommen: $2\sqrt{14}+\frac{3}{2}\sqrt{10}-\frac{4}{3}\sqrt{21}-\sqrt{15}$.

Die ganze Kunst, auf solche Art zu dividiren, bestehet augenscheinlich darinn, zu machen, daß der Divisor von den Irrationalgrössen befreyet werde, wodurch alsdenn die Operation sehr simpel wird. Allein dieses ist nicht immer sehr leicht, sondern zuweilen ist es sehr schwer und mühsam, eine Grösse zu finden, die geschickt ist, die Wurzelzeichen des Divisors wegzuschaffen. Dieses ist eines von den Geheimnissen einer sehr feinen Kunst, die man die Analysis * nennet, wovon ich aber in diesem Werke gar nicht handeln werde.

§. 38.

Eine Irrationalgrösse zu irgend einer gegebenen Dignität zu erheben.

Da die Operation gar nicht von der Multiplication unterschieden ist, so muß man in diesem Betracht allem folgen, was man im §. 36. gelehret und bewiesen hat. Man wird folglich eine Irrationalgrösse zur 2ten Dignität erheben, indem man sie einmal durch sich selbst multipliciret. Man muß sie zweymal durch sich selbst multipliciren für die 3te Dignität, und dreymal für die 4te Dignität. Wollet ihr das Quadrat von $\sqrt[s]{d}$ haben, so schreibet $\sqrt[s]{d}\times\sqrt[s]{d}=\sqrt[s]{d^2}$ [§. 36.] Dieses ist das Quadrat oder die 2te Dignität von der gegebenen Irrationalgrösse. Der Cubus davon oder die 3te Dignität wird folgende Grösse seyn: $\sqrt[s]{d}\times\sqrt[s]{d}\times\sqrt[s]{d}=\sqrt[s]{d^3}$ u. s. w. Ueberhaupt wird man eine Irrationalgrösse zu einer Dignität p erheben, wenn man die Grösse, die unter dem Wurzelzeichen

---

* Analysis heißt eigentlich die Kunst aufzulösen oder die Grössen zu finden, die zur Formirung einer Grösse etwas beygetragen haben.

zeichen stehet, zu dieser Dignität erhöhet. Folglich ist $\sqrt[s]{y}$ zur Dignität p erhoben $= \sqrt[s]{y^p}$. Denn es ist $\sqrt[s]{y} = y^{\frac{1}{s}}$ [§. 4.] Nun ist aber $y^{\frac{1}{s}}$ zur Dignität p erhoben $= y^{\frac{p}{s}}$ [§. 11.] $= \sqrt[s]{y^p}$. [§. 14.] Folglich rc.

Eben so ist $\sqrt[s]{y^p}$ zur Dignität n erhoben $= y^{\frac{pn}{s}}$ [§. 11.] $= \sqrt[s]{y^{pn}}$ [§. 14.] Folglich rc.

§. 39.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus Irrationalgrössen.

Man darf bey dieser Operation nur an der Stelle des Exponenten der gegebenen Irrationalgrösse das Product aus diesem Exponenten und aus dem Exponenten der gesuchten Wurzel setzen, und darauf alles auf den einfachsten Ausdruck bringen. Um also die 2te Wurzel aus $\sqrt[3]{c}$ zu bekommen, schreibe man: $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{c}\ *)} = \sqrt[3\times 2]{c} = \sqrt[6]{c}$. Denn es ist $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$ [§. 14.] Folglich aus dem nämlichen Grunde ist $\sqrt[2]{c^{\frac{1}{3}}} = c^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{c}$; Folglich ist auch $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{c})} = \sqrt[6]{c}$.

Es

(*) Dieser Ausdruck $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{c})}$ zeiget die 2te Wurzel aus der 3ten Dignität von c an.

Es ist gleichfalls die Cubikwurzel aus $\sqrt[5]{8} = \sqrt[5\times3]{8} = \sqrt[15]{8}$

Denn, weil $\sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}}$, und weil $\sqrt[3]{8^{\frac{1}{5}}} = 8^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{8}$ ist,

so ist auch $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[15]{8}$.

Eben so ist $\sqrt[2]{\sqrt[3]{c^2}} = \sqrt[3\times2]{c^2} = \sqrt[6]{c^2} = \sqrt[3]{c}$ wenn man die Grösse zu dem einfachsten Ausdruck bringt. Dieses läßt sich thun, indem man den Exponenten des Wurzelzeichens und der Grösse, die unter demselben stehet, durch einerley Grösse dividiret. Ausserdem ist es leicht einzusehen daß $\sqrt[6]{c^2}$ auf das simpelste ausgedrucket $= \sqrt[3]{c}$ sey. Denn es ist $\sqrt[6]{c^2}$ $= c^{\frac{2}{6}} = c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$ [§. 14.]

Ueberhaupt ist die Wurzel r aus $\sqrt[s]{c^3} = \sqrt[rs]{c}$. Denn es ist $\sqrt[s]{c} = c^{\frac{1}{s}}$; Folglich ist $\sqrt[r]{(\sqrt[s]{c})} = \sqrt[r]{c^{\frac{1}{s}}} = c^{\frac{1}{rs}}$ $= \sqrt[rs]{c}$ [§. 14.]

Endlich ist die Wurzel r aus $\sqrt[s]{c^r} = \sqrt[r\times s]{c^r} = \sqrt[s]{c}$. Denn es ist $\sqrt[s]{c^r} = c^{\frac{r}{s}}$. Folglich ist $\sqrt[r]{(\sqrt[s]{c^r})} = \sqrt[r]{c^{\frac{r}{s}}} = c^{\frac{r}{rs}}$ $= c^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{c}$ [§. 14.]

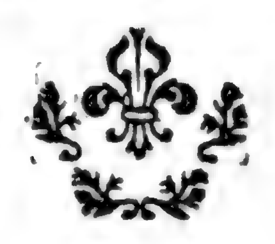
§. 40.

Hieraus erkennet man, daß es sehr leicht sey, einer Grösse nur ein einziges Wurzelzeichen zu verschaffen, wenn sie mehrere

rere derselben haben sollte. Man darf hierzu nur an der Stelle des Exponenten des Wurzelzeichens, unter welchem die Rationalgrösse stehet, das Product aus allen Exponenten dieser Wurzelzeichen setzen. Folglich ist $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{(\sqrt[4]{a^3})})} = \sqrt[2\times3\times4]{a^3}$ $= \sqrt[24]{a^3} = \sqrt[8]{a}$. Denn es ist $\sqrt[3]{(\sqrt[4]{a^3})} = \sqrt[12]{a^3}$ [§. 39.] Folglich ist $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{(\sqrt[4]{a^3})})} = \sqrt[2]{(\sqrt[12]{a^3})} = \sqrt[24]{a^3}$ [§. 39.] $= a^{\frac{3}{24}}$ [§. 14.] $= a^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a}$.

Eben so werdet ihr finden, daß $\sqrt[2]{(x^2\sqrt[4]{(x^3\sqrt[5]{x^4})})}$ $= \sqrt[2\times4\times5]{x^{59}} = \sqrt[40]{x^{59}}$ sey. Lasset anfänglich diejenigen Grössen, die ausserhalb dem Wurzelzeichen stehen und durch die Multiplication mit demselben verbunden sind, unter die Wurzelzeichen gehen. (§. 22.) Multiplicirt darauf alle Exponenten der Wurzelzeichen durcheinander, damit das Product aus denselben der Exponent des einzigen noch übrigen Wurzelzeichens seyn möge. (§. 39.)

Wir werden nicht tiefer in diese Rechnung hineingehen, ob man gleich darinn viele andere schöne Entdeckungen gemacht hat, die von einer unentbehrlichen Brauchbarkeit für diejenigen sind, die sich der Analysis widmen wollen. Sie sind aber für unser jetziges Object überflüßig.



Von

Von der Parabel.

§. 1.

Erklärungen.

Man nehme irgend einen Triangel HDC (Fig. 1.) Man stelle sich vor, daß durch dessen eine Seite HC Linien wie BS gezogen sind, die mit der Grundlinie CD parallel laufen. Wenn man sich itzund einbildet, daß der Triangel HDC sich um seine Seite HD, wie um ein Gewinde herum drehe, so daß er einen Umkreiß mache, so wird er einen Raum beschreiben, der, wenn man ihn als voll annimmt, den Namen Kegel führt. HD ist die Axe desselben; CHF der Triangel, der entstehet, wenn man den Kegel nach der Axe durchschneidet *; Der Cirkel CLF ist die Grundfläche desselben; H dessen Spitze.

Es ist klar, daß bey diesem herumwälzen die Linien CD und BS parallele Cirkel beschreiben, weil man voraus setzt, daß sie ihre parallele Lage während der ganzen Bewegung behalten. Wenn man nun annimmt, daß man einen Kegel durch eine Fläche, die mit seiner Basis parallel ist, durchschneidet, so wird dadurch ein Parallel-Cirkel entstehen, und der Axentriangel, der diese beyden Cirkel durchschneidet, wird verursachen, daß ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte BM und CF parallel seyn werden. (369. Institut II Band). Nun hat man aber den verschiedenen Durchschnitten, die man durch einen Kegel machen kann, den Namen der Kegelschnitte gegeben. Und ob zwar der Triangel und Cirkel mit zu diesen Kegelschnitten gehören,

* Wir wollen diesen in Zukunft im teutschen immer der Kürze wegen den Axentriangel nennen. B.

gehören, so rechnet man sie doch ordentlicher Weise nicht hieher, weil man voraussetzet, daß man deren Eigenschaften schon aus der Elementargeometrie kennet. Wir werden hier also besonders nur diejenigen Kegelschnitte abhandeln, die vom Triangel und Cirkel verschieden sind. Man wird in der Folge sehen, daß man deren nur 3 haben kann.

Die Geschichte lehret uns nicht, ob die ersten Geometer sich durch den Zug einer Curiosität oder durch den Zwang der Bedürfnisse auf die seinen Untersuchungen dieser Schnitte geleget haben. (a) Allein wenn auch diese Speculationen im Anfange eine Würkung der Bewegungsgründe der erstern Art waren, so sind sie itzt doch eine Frucht der letztern geworden.

Man

(a) Die Geometrie scheint mir von der äussersten Nothwendigkeit zu seyn, das heißt, es hat diese Geometrie, die zur Erhaltung unsers Wohls in der menschlichen Gesellschaft durchaus nöthig ist, sehr bald erfunden werden müssen. So viele Personen haben an dergleichen Entdeckungen ein so dringendes Interesse gehabt, daß man sich gar nicht wundern darf, daß die nützlichsten Erfindungen auch zugleich die ältesten sind. Allein was die Geometrie der krummen Linien anbetrifft, so siehet man nicht, daß die ersten Bedürfnisse der Menschen sie dahin geführet haben. Denn die blosse Nothwendigkeit fordert keine so tiefe Betrachtungen. Folglich muß ihr Ursprung der Curiosität des menschlichen Verstandes zugeschrieben werden, welcher beständig durch neue Empfindungen gerührt zu werden suchet.

Der erste Erfinder der Kegelschnitte und der genaue Zeitpunkt ihrer Erfindung sind gleich unbekannt. Man weiß nur dieses, daß die krummen Linien sehr alt sind. Archimedes, der für mehr als 2000 Jahren lebte, gedenket in seinen Schriften der Lehre der Kegelschnitten nnd erwähnet ihrer, als solcher krummen Linien, die schon seinen Vorgängern bekannt waren. Kurze Zeit nach ihm arbeitete Apollonius Pergaeus über diese Kegelschnitte mit solchem Erfolg, daß er deswegen den Namen des grossen Geometers erhalten hat. Durch die

Neuern

Man hat entdeckt, daß die Natur in vielen Fällen nach den Gesetzen der krummen Linien, die diese Schnitte hervorbringen, sich richte, und daß sie zur Erreichung der Vollkommenheit in den Künsten unentbehrlich sind. Man muß also die Eigenschaften derselben selbst zur Vermehrung unsers Wohlseyns studieren.

§. 2.

Erster Satz. Eine Linie DA (Fig. 2.) die auf einer Ebene BM perpendiculair stehet, ist nothwendig gegen alle Linien dieser Fläche AB, AC, AM, und gegen andere, die durch den Endpunkt A dieser Perpendiculairlinie gezogen sind, gleichfals perpendiculair.

Beweis. Denn eine Linie, die auf einer Ebene perpendiculair steht, ist eine solche Linie, welche von keiner Seite gegen ihre Ebene, über welcher sie aufgerichtet ist, mehr geneigt ist, als von einer andern. Wäre nun diese Linie AD nicht gegen alle diese Linien, die durch den Endpunkt A auf der Ebene BM gezogen sind, perpendiculair, so müßte sie nothwendig gegen eine Seite sich mehr neigen, welches wider die Voraussetzung ist. Folglich . . . . W. z. E. W.

§. 3.

Zweyter Haupt-Satz. Aus einem Punkte A, den man auf einer Ebene annimmt, kann man über diese Ebene nur

---

Neuern ist indessen Apollonius in Vergessenheit gerathen. Gregorius von St. Vincent hat sich durch die Deutlichkeit in seinen Beweisen besonders hervorgethan, und ich weiß nicht, warum unsere Zeitgenossen ihn so wenig suchen. Heut zu Tage scheint man in Frankreich nur den Herrn de la Hire und vornämlich den Herrn Guisnee und von Hospital zu kennen. Ohne Zweifel, weil diese letzte zu ihren Untersuchungen die Algebra gebrauchen. Ein Mittel, das zu Entdeckungen das bequemste, das geschwindeste, das allgemeinste und folglich das schönste ist, was der menschliche Verstand jemals erfunden hat.

nur eine Perpendiculairlinie AD aufrichten. Es ist auch nicht möglich zwo Perpendiculairlinien aus einem Punkte D, der über einer Ebene angenommen ist, auf diese Fläche fallen zu lassen.

Beweis I. Weil AD auf der Fläche BM perpendiculair stehet, so macht sie mit allen Linien dieser Fläche, welche durch den Punkt A gehen rechte Winkel. Folglich wird eine jede Linie AS, die von AD unterschieden ist, grössere oder kleinere Winkel machen, und folglich nicht perpendiculair seyn.

II. Aus der nämlichen Ursache kann jede andere Linie DO auf der Ebene BM nicht perpendiculair seyn. Denn wäre sie es, so würde sie es auch gegen AB seyn, welche durch den Punkt O gezogen ist, und es würde der Winkel AOD, so wie der Winkel DAO, ein rechter Winkel seyn. Folglich würden die drey Winkel in einem Triangel mehr als zween rechte Winkel betragen, welches unmöglich ist. Folglich ist es auch unmöglich daß die Linie DO eine Perpendiculairlinie sey. W. z. E. W.

§. 4.

Dritter Haupt-Satz. Der gemeinschaftliche Durchschnitt DA von zween Flächen BM, CT, die auf einer 3ten Ebene OS perpendiculair stehen, ist auch gegen diese 3te Ebene perpendiculair.

Beweis. Lasset uns aus dem Punkte A über die Ebene OS eine Perpendiculair-Linie aufrichten. Diese muß sich nothwendig in der Fläche BM und in der Fläche CT befinden. Denn eine Perpendiculairlinie auf einer Ebene neiget sich gegen keine Seite. Wenn sie sich also nicht in beyden Ebenen BM und CT befände, so müßten sich diese Ebenen davon entfernen und sie müßten nothwendig auf die Ebene OS mehr gegen die eine als gegen die andere Seite sich neigen, welches wider die Bedingung ist. Folglich befindet sich die

die Perpendiculairlinie, die aus dem Punkte A über die Ebene OS aufgerichtet ist, nothwendig in den beyden Flächen BM und CT. Nun gibt es aber nur eine einzige solche Perpendiculairlinie. (§. 3.) Sie kann sich also nur in der gemeinschaftlichen Ausdehnung dieser Ebenen, das heißt, in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt befinden. Folglich ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt nicht von der Perpendiculairlinie unterschieden, die man aus dem Punkt A auf die Ebene OS aufrichtet. Folglich ist dieser gemeinschaftliche Durchschnitt gegen die Ebene OS perpendiculair. W. z. E. W.

§. 5.

Erklärungen. Lasset uns annehmen, daß der Triangel HCF (Fig. 4.) der Durchschnitt eines graden oder schiefen Kegels sey, daß dieser Durchschnitt durch die Axe dieses Körpers gehe, und daß man von einem Punkte A der Seite HC dieses Triangels die Linie AB innerhalb seiner Fläche parallel mit der andern Seite HF ziehe, und daß man durch diese Linie AB eine Fläche gehen lasse, die perpendiculair gegen die Ebene des Triangels HCF ist, so wird diese Ebene in dem Körper des Kegels eine neue Oberfläche DiMATS machen, welcher man den Namen **Parabel** gegeben hat. (*a*) Die Linie AB ist die Axe derselben, der Punkt A ihr **Scheitelpunkt**; Eine jede Linie MP oder DB, die von einem Punkte D oder M des Umkreises perpendiculair auf die Axe gezogen ist, heißt die **Ordinate** gegen diese Axe. Ein jeder Theil dieser Axe, welcher zwischen der Spitze und zwischen dem Punkt, wo eine Ordinate die Axe durchschneidet, enthalten ist, heißt eine **Abscisse**. Folglich sind die Linien AB, AP Abscissen. Zuweilen nennet man sie auch **Abschnitte** oder **Pfeile** **Sagittae** (*b*).

(*a*) Man wird bald die Ursache davon sehen.

(*b*) Aus dem Verhältnisse aller dieser Linien gegen einander ist man auf die Bestimmung der Eigenschaften dieser krummen Linien gekommen.

§. 6.

Vierter Haupt-Satz. In einer Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die ihnen zugehörige Abscissen. Das heißt: $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$.

Beweis. Wir wollen uns einbilden, daß man durch irgend einen Punkt M des Umkreises der Parabel eine Fläche durchgehen lasse, welche den Körper des Kegels parallel mit seiner cirkelförmigen Grundfläche durchschneide, so wird diese Fläche, deren Durchschnitt auch ein Cirkel ist (§. 1.) perpendiculair gegen die Fläche des Axentriangels und zwar deswegen seyn, weil man die Grundfläche des Kegels perpendiculair auf der Fläche dieses nämlichen Triangels angenommen hat. Folglich sind die Parabel DAS und der Cirkel CDFS gegen die nämliche Ebene HCF perpendiculair. Folglich ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt DBS auch gegen diese Ebene perpendiculair. (§. 4.) Folglich ist dieser Durchschnitt auch gegen den Diameter CF und gegen die Axe AB perpendiculair, weil diese beyde Linien durch desselben äussersten Punkt B gehen. (§. 2.) Denn diese Linien liegen in der Ebene des Axentriangels. Folglich ist DB eine Ordinate gegen die Axe AB (§. 5.) und DB = BS (vermöge der Natur des Cirkels). Und wenn wir auf eben die Art in Absicht auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt MPT der Parabel und des Cirkels OMGT schliessen, so werden wir finden, daß MPT sowohl perpendiculair gegen den Diameter OG als gegen die Axe AB sey; daß folglich MP eine andere Ordinate der Parabel und MP = PT sey.

Wenn man dieses hier wohl verstanden hat, so laßt uns die ähnlichen Triangel APO und ABC betrachten. Es verhält sich alsdenn AP : AB = PO : BC und PO : BC = PO × PG : BC × BF. Denn es ist PG = BF wegen die Parallellinien AB und HF und PG und BF (constr.) Folglich verhält sich AP : AB = PO × PG : BC × BF. Es ist

aber

oder $PO \times PG = \overline{PM}^2$ und $BC \times BF = \overline{BD}^2$ (nach der Natur des Cirkels); Folglich wenn man diese letzten Werthe substituirt, so haben wir folgendes Verhältniß: $AP : AB = \overline{PM}^2 : \overline{BD}^2$ oder $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$. W. z. E. W.

* §. 7.

Wenn umgekehrt der Durchschnitt eines Kegels, der perpendiculair gegen den Axentriangel dieses Körpers HCF und weder parallel noch antiparallel mit seiner cirkelförmigen Grundfläche ist (*a*) ein solcher Durchschnitt ist, daß die Quadrate der Ordinaten der Axe dieses Durchschnitts sich zu einander verhalten wie die ihnen zugehörige Abscissen, so wird dieser Durchschnitt eine Parabel seyn; Das heißt, wenn man in diesem Falle das Verhältniß hat: $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$, so wird die Axe dieses Durchschnitts mit der Seite HF des Triangels HCF parallel seyn.

Beweis. Lasset uns annehmen, daß, wie man diesen Durchschnitt machte, alle Cirkel, die perpendiculair gegen die Ebene des Axentriangels dieses Kegels sind, schon beschrieben waren, so ist es klar, daß dieser Durchschnitt durch die Fläche *mehrerer* dieser Cirkel habe gehen müssen; z. E. durch die Cirkel OMGT und CDFS, und daß folglich die gemeinschaftlichen Durchschnitte PM und BD, die der Schnitt dieser Ebene macht auf die Fläche des Triangels HFC perpendiculair sind. (§. 4.) Da also PM und BD deswegen perpendiculair gegen die Axe AB des Durchschnitts und gegen die Diameter OG und CF der Cirkel sind (§. 2.), so siehet man, daß diese Linien zu gleicher Zeit Ordinaten gegen die Axe des Schnittes und Ordinaten gegen die Diameter der

(*a*) Man sehe im § 4. der Ellypse, was ein antiparalleler Durchschnitt sey.

Cirkel sind. Folglich ist $\overline{PM}^2 = OP \times PG$ und $\overline{BD}^2 = CB \times BF$; Es verhält sich aber nach der Bedingung $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$ Wenn man folglich in diesem Verhältnisse den Werth von $\overline{PM}^2$ und $\overline{BD}^2$ setzet, so bekommt man $OP \times PG : CB \times BF = AP : AB$. Nun verhält sich wegen der Aehnlichkeit der Triangel APO und ABC, $AP : AB = OP : CB$. Folglich auch $OP \times PG : CB \times BF = OP : CB$. Folglich ist $OP \times PG \times CB = CB \times BF \times OP$. Wenn man folglich mit $(OP \times CB)$ dividiret, so wird man finden, daß $PG = BF$ sey. Folglich, weil die Cirkel OMG und CDF parallel sind (constr.), so sind auch ihre gemeinschaftliche Durchschnitte OG, CF, die durch die Ebene HCF gemacht sind, gleichfals parallel, (§. 369. Instit. T. II.) Folglich sind auch die Linien AB, HF, die durch die äussersten Punkte gleicher Parallel-Linien PG, BF gehen und in der nämlichen Ebene sind, parallel und folglich ist der angenommene Kegelschnitt eine Parabel. (*a*)

§. 8.

(*a*) Wenn man von einem Axentriangel eines Kegels redet, so muß man nicht glauben, daß das, was man davon behauptet, einzig und allein eine besondere Eigenschaft dieses bestimmten Triangels sey und daß dieses nicht noch unzählig andern Triangeln dieses nämlichen Kegelschnitts zukomme. Denn der erzeugende Triangel dieses Körpers gehet beständig durch seine Axe, und wird so vielmal wiederhohlet als man in der Basis des Kegels Punkte hat.

Wenn inzwischen ein Axentriangel einmal bestimmt ist, so gehört der Kegelschnitt der perpendiculair durch seine Ebene gehet, nur ihm zu, das heißt, wenn man die 4te Figur wieder vor sich nimmt, es ist von allen möglichen Axentriangeln dieses Kegels, wenn man sich einmal für den Triangel HCF bestimmt hat, er allein derjenige, auf welchem der gemeinschaftliche Durchschnitt DBS perpendiculair fallen kann. Es ist nämlich klar, daß eine Linie, die gegen eine von zwoen oder

§. 8.

Anmerkung. Der Axentriangel HCF, der auch ein Kegelschnitt durch die Axe ist, zeigt, daß der Umfang eines Kegelschnittes nicht allemal eine krumme Linie sey. Man kann es also nicht ohne Beweis annehmen daß die äussere Einfassung der Parabel eine krumme Linie sey.

§. 9.

Erster Zusatz. Ein jedes Stück AMD von dem Umfange der Parabel ist eine krumme Linie. Denn, wenn die Linie AMD grade wäre, so würde man folgendes Verhältnis haben: $PM : BD = AP : AB$. Es verhält sich aber nach § 6. $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$. Folglich $PM : BD = \overline{PM}^2 : \overline{BD}^2$. Daher ist $PM \times BD \times BD = PM \times$

---

oder mehreren Flächen, die sich durchschneiden, perpendiculair ist, nicht zugleich auch perpendiculair gegen alle übrigen seyn könne.

Dieses heißt so viel, daß durch den Schnitt einer Ebene, welche nicht gegen den ausgesuchten Axentriangel perpendiculair wäre, kein Kegelschnitt entstehen könne. Denn, wenn die schneidende Fläche nicht gegen einen erwählten Axentriangel perpendiculair wäre, so würde sie es nothwendig gegen einen andern seyn. Daher ist der Grund, wodurch man bewegt wird, den Kegel durch eine Ebene, die gegen die Fläche des einmal angenommenen Axentriangels perpendiculair ist, durchschneiden zu lassen, dieser, weil diese Art des Schnitts zu den nöthigen Beweisen geschikter als jede andere ist, und weil sonst ohne diese Bedingung die gemeinschaftlichen Durchschnitte wie DBS und MPT durch die Diameter CF, OG nicht in 2 gleiche Theile getheilet wären. Dieses kann nur in dem Falle geschehen, wo DBS und MPT perpendiculair gegen diese Diameter sind. Daß aber diese Linien perpendiculair sind, hängt von dem ab, daß die durchschneidende Fläche gegen den Axentriangel perpendiculair sey. Dieses ist evident.

$PM \times BD$. (*a*) Wenn man folglich mit $(PM \times BD)$ dividiret, so findet man daß $BD = PM$ und also $AB = AP$ sey. Dieses ist aber unmöglich. Es kann also die Linie AMD keine grade Linie seyn. Folglich ist sie nothwendig eine krumme.

Weil die Parabel, ihre Axe, und ihre Ordinaten sich in der nämlichen Fläche befinden, so können wir diese krumme Linie unabhänglich von dem Kegel betrachten, aus welchem sie entstanden ist. Wir können sie auf eine ebene Fläche tragen und ihre andern Eigenschaften, die sie charakterisiren, aufsuchen, so daß alle zu dieser Absicht gezogene Linien beständig in der Fläche dieser Parabel angenommen werden.

§. 10.

Zweyter Zusatz. Folglich entfernt sich eine Parabel immer mehr und mehr von ihrer Axe. Denn es verhält sich $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$. Wenn nun AB grösser als AP ist, so muß auch $\overline{BD}^2$ grösser als $\overline{PM}^2$ seyn, und folglich, je mehr die Axe sich verlängert, desto mehr wachsen die Ordinaten, das heißt, ihre äussersten Punkte sind weiter von der Axe entfernet. Diese äussersten Punkte sind aber in der Parabel. Folglich entfernt sich die Parabel immer weiter von ihrer Axe.

§. 11.

Dritter Zusatz. Hieraus folgt, wenn man mit der Axe der Parabel eine Parallel-Linie OV (Fig. 5.) ziehet, daß diese Parallel-Linie mit der krummen Linie nothwendig in einem

(*a*) Ich mache ein für allemal bekannt, daß, wenn ich aus einer Proportion eine Gleichung schliesse, es deswegen geschehe, weil ich das Produkt der äussersten und mittelsten Glieder gemacht habe.

einem einzigen Punkte zusammen stossen muß und daß sie in den parabolischen Raum hineingehen werde, oder bestimmt seyn, hineinzugehen. Denn eine Linie, die mit der Axe parallel ist, ist beständig in gleicher Weite von der Axe. Wir haben aber so eben gezeigt, daß die Parabel sich immer weiter davon entferne. Sie muß also über diese Parallel-Linie hinausgehen und kann nur einen einzigen Punkt mit ihr gemein haben.

§. 12.

Vierter Zusatz. Wenn man die Punkte D und M durch eine Sehne mit einander vereiniget, so wird diese nothwendig in irgend einem Punkte T sich mit der Axe vereinigen; denn wäre sie mit der Axe parallel, so könnte sie die krumme Linie nur in einem Punkte durchschneiden. (§. 11.) Diese schneidet sie aber, vermöge der Bedingung in zween Punkten, folglich ist sie mit der Axe nicht parallel; Folglich ist sie bestimmt in irgend einem Punkte T mit ihr zusammen zu stossen.

§. 13.

Fünfter Zusatz. Eine Tangente an der Parabel wird auch nothwendig mit der Axe dieser krummen Linie zusammen kommen. Denn entweder wird sie bestimmet seyn mit der Axe zusammen zu stossen oder sie wird mit ihr parallel seyn. Wäre sie mit derselben parallel, so würde sie in den Raum der Parabel hineingehen (§. 11.). Dieses ist unmöglich, weil man sie als eine Tangente annimmt; Folglich wird eine Tangente endlich die Axe dieser krummen Linie berühren.

§. 14.

Sechster Zusatz. Jede 2 Tangenten an einem Arme der Parabel TRG und CHL durchschneiden sich nothwendig, oder, sind bestimmt in irgend einem Punkte I sich zu durchschneiden. Denn, wenn eine von den Tangenten CHL

gegen die andere parallel wäre, so müßten nothwendig, da einer von ihren Punkten H in Ansehung der Axe unter der andern Tangente TRG ist, alle ihre Punkte unterhalb dieser Tangente seyn und folglich müßte sie in die parabolische Fläche gehen. Dieses ist aber unmöglich. Denn man hat sie als eine Tangente angenommen. Wenn nun CHL nicht mit TRG parallel ist, so schneidet sie die e letztere nothwendig oder ist bestimmt sie in einem Punkte I zu durchschneiden.

§. 15.

Siebender Zusatz. Wenn man folglich von einem Punkte K der Parabel eine Linie KS parallel mit einer Tangente TRG dieser krummen Linie ziehet, so wird diese Parallellinie nothwendig die krumme Linie in einem andern Punkte Q schneiden. Denn, wenn man durch irgend einen Punkt H unterhalb R eine andere Tangente CHL zöge, so würde diese nothwendig die vorige in einem Punkt I schneiden (§. 14.) Folglich schnitte sie auch deren Parallellinie KS. Sie würde diese aber nicht anders als ausserhalb der krummen Linie schneiden. Es müßte also diese Parallellinie über die Parabel heraus gehen und folglich zum zweytenmal sie durchschneiden.

§. 16.

Erklärung. Suchet eine dritte Proportionallinie zu einer Abscisse AP und der ihr zugehörigen Ordinate PM, das heißt, setzet das Verhältnis an: AP : PM = PM: zu einem 4ten Gliede. Diese Linie, die ihr auf diese Art finden werdet, ist diejenige, die die alten Geometer das *Latus rectum* nannten, und die die neuern Parameter nennen. Wir werden sie in Zukunft mit dem Buchstaben *p* bezeichnen, weil diese 4te Proportional-Grösse eine beständige Grösse ist, das heißt, weil man für sie immer den nämlichen Werth findet, man mag sich einer Abscisse bedienen, welcher man will. Wir werden dieses sogleich zeigen.

§. 17

§. 17.

Achter Zusatz. Setzet man demnach das Verhältniß an: AP : PM = PM : p. und AB : BD = BD. m. (die Punkte B und P mögen in der Axe liegen, wo sie wollen) so behaupte ich, daß man jederzeit dieses finden werde, daß $p = m$ sey. Den es ist $\overline{PM}^2 = AP \times p$ und $\overline{BD}^2 = AB \times m$ und folglich $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP \times p : AB \times m$. Allein es verhält sich nach §. 6. $\overline{PM}^2 : \overline{BD}^2 = AP : AB$. Folglich verhält sich auch $AP \times p : AB \times m = AP : AB$. Folglich ist $AP \times AB \times p = AP \times AB \times m$ und folglich, wenn man durch $(AP \times AB)$ dividiret, $p = m$ (*a*).

* §. 18.

Andere Art den Parameter zu finden.

Dieses ist sehr leicht, wenn die Parabel und die Axe gegeben ist. Man ziehe auß der Spitze A eine beliebige Sehne AN (Fig 19.) Ueber diese richte man aus dem Punkt N die Perpendiculairlinie NB auf, die in einem Punkte B die Axe durchschneiden wird. Wenn man nun darauf zu dem Punkte N die Ordinate NF ziehet, so wird FB der Parameter seyn. (§. 16.) Weil AF : NF = NF : FB. (*b*).

*§. 19.

(*a*) Da diese dritte Proportional-Linie zu einer jeden Abscisse und der ihr zugehörigen Ordinate immer dieselbige ist, so ist dieses der Grund gewesen, warum man ihr den Namen Parameter gegeben hat: Weil diese Linie eine Art von Maaß ist, welches die Weite der Parabel in jedem angenommenen Punkte, bestimmt. Ohne diese Linie, die durch die Natur des Durchschnitts bestimmt wird, würde es schwer seyn, diese krumme Linie unabhänglich von einem Kegel zu construiren, und wenigstens würde man davon die Abmessungen nicht bestimmen können, weil die Abscissen und Ordinaten unbestimmt sind.

(*b*) Denn AFN und FNB sind ähnliche Triangel, worinnen der Winkel ANF = NBF und NAF = BNF: Wie dieses

* §. 19.

Die dritte Art den Parameter zu finden.

Ziehet aus der Spitze der Axe eine Sehne, welche mit der Axe die Hälfte eines rechten Winkels oder 45 Grade macht und von dem Punkt M, wo diese Sehne die krumme Linie durchschneidet, ziehet eine Perpendiculairlinie oder Ordinate gegen die Axe: So wird diese Ordinate oder die ihr zugehörige Abscisse dem Parameter gleich seyn. Denn vermöge der Construction ist $AP = PM$. Folglich ist $AP \times AP = PM \times PM = AP \times p$. (§. 16.) Folglich ist $p = AP = PM$.

§. 20.

Neunter Zusatz. Weil der Parameter p eine beständige Grösse ist, und weil er immer eine dritte Proportionallinie zu einer jeden Abscisse und ihrer correspondirenden Ordinate ist, so ist es klar, daß das Quadrat einer jeden Ordinate in einer Parabel beständig dem Rectangulum aus dem Parameter und ihrer correspondirenden Abscisse = sey. Wenn man würklich die Verhältnisse $AP : PM = PM : p$ und $AB : BD = BD : m$ aus dem §. 17. (Fig. 5.) wieder vor sich nimmt, und wenn man p an der Stelle von m setzet, (§. 17.) so wird man beständig finden, daß $\overline{PM}^2 = AP \times p$ und $\overline{BD}^2 = AB \times p$ sey und so bey den übrigen gleichfalls. Setzet man daher eine jede Ordinate $PM = y$ und die ihr zugehörige Abscisse $= x$, so bekommt man die Gleichung $yy = px$. Dieses ist eine Gleichung, die die Parabel charakterisirt und woher sie ihren Namen bekommen hat; denn das griechische Wort παραβάλλειν bedeutet gleich machen. Wenn es sich folglich in der Auflösung eines Problems zuträgt, daß

ses aus der Elementar-Geometrie bekannt seyn muß. Folglich stehen die angegebenen Linie würklich in dem bestimmten Verhältnisse. B.

daß das Quadrat einer Ordinate oder einer jeden andern perpendiculairen Linie PM gegen eine Linie AB, deren Anfang A vest ist, dem Rectangel aus der Abscisse AP und einer beständigen Grösse gleich ist, so kann man sicher behaupten, daß die äussersten Punkte M aller dieser Ordinaten sich in einer Parabel befinden, und daß man, um die ganze Auflösung des Problems zu haben, diese krumme Linie construiren müsse. Denn, wenn man eine andere Ordinate BD $= z$ und deren Abscisse AB $= u$ setzet, so wird man nach der Bedingung haben $yy = px$ und $zz = pu$. Es verhält sich folglich $yy : zz = px : pu = x : u$, indem man die beyden letzten Glieder mit p dividiret, das heißt, die Quadrate der Ordinaten yy und zz verhalten sich unter einander wie die ihnen zugehörigen Abscissen x und u. Wenn nun dieses sich eräugnet, so ist die Linie die durch die äussersten Punkte dieser Ordinaten gehet, eine Parabel (§. 7.) Folglich drücket die Gleichung $yy = px$ oder $zz = pu$ eine Parabel aus, und es ist die Ordinate y oder PM $= \sqrt{px}$.

* §. 21.

Zehenter Zusatz. Lasset von irgend einem Punkte der Parabel H (Fig. 6.), der von der Spitze A verschieden ist, auf die doppelte Ordinate MC eine Perpendiculairlinie fallen, so werdet ihr beständig die Gleichung finden $MD \times DC = HD \times p$.

Beweis. $MD \times DC = (MP + PD) \times (PC - PD) = (MP + PD) \times (MP - PD)$ (denn es ist $PM = PC$) $= \overline{MP}^2 - \overline{PD}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$ (weil $HG = PD$); Folglich ist $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$. Nun ist $\overline{MP}^2 = AP \times p$ und $\overline{HG}^2 = AG \times p$. (§. 20.) Folglich $\overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 = AP \times p - AG \times p = (AP - AG)p = GP \times p = HD \times p$. Folglich ist $\overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 = HD \times p$. Folglich weil $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$ (wie man dieses gesehen hat) so ist es klar, daß $MD \times DC = HD \times p$. W. z. E. W.

* §. 22.

Eilfter Zusatz. Hieraus folgt, daß $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$. Denn es ist $\overline{MP}^2 = AP \times p$. (§. 20.) Und $MD \times DC = HD \times p$. (§. 21.) Folglich verhält sich $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP \times p : HD \times p = AP : HD$ (wenn man mit p dividiret); Folglich $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$.

* §. 23.

Wenn im umgekehrten Falle eine Linie MC, die durch eine Perpendiculairlinie AP in zweene gleiche Theile getheilet wird, so beschaffen ist, daß, wenn sie in einem jeden andern Punkte D durch eine Perpendiculairlinie HD getheilet wird, man immer das Verhältniß finde: $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$, so sage ich, daß die Punkte M. H. A. C. in einer Parabel sind, deren Axe AP ist.

Beweis. Wir wissen schon, daß $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$ (Beweis des §. 21.) und $HD = AP - AG$. Nun verhält sich nach der Annahme $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$. Folglich $\overline{MP}^2 : \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 = AP : AP - AG$. Folglich $\overline{HG}^2 : \overline{MP}^2 = AG : AP$ (a).

Folg-

(a) Dieses Verhältniß entstehet aus dem vorhergehenden so, wenn man spricht: Die Differenz des ersten und zweyten Gliedes verhält sich zum ersten, wie die Differenz des dritten und vierten Gliedes zum dritten; Und es ist diese Art zu verfahren richtig. Dieses siehet man, wenn man einen allgemeinen Ausdruck einer geometrischen Proportion nimmt, ihn auf vorbenannte Art verändert und alsdenn das Factum der beyden mittelsten und äussersten Glieder macht. Es werden die-

se

Folglich verhalten sich die Quadrate der Ordinaten HG und MP unter einander, wie die ihnen zugehörigen Abscissen AG, AP. Folglich sind die Punkte M. H. A. in einer Parabel, deren Axe AP ist, (§. 7.) da auch noch PC=PM ist, (Beding.) so ist auch der Punkt C in der nämlichen Parabel.

Dieser Zusatz und derjenige, der aus dessen Umkehrung entstanden ist, sind in der Lehre von dem Bombenwerfen nützlich.

§. 24.

Aufgabe. Wenn nach der 5ten Figur die Linie BD als der Parameter einer Parabel gegeben ist, diese krumme Linie zu zeichnen.

Auflösung. Nehmet eine Linie AB von unbestimmter Länge an, auf welcher ihr den Anfang oder die Spitze A bestimmen müsset und betrachtet diese als die Axe der zu construirenden krummen Linie. Theilet diese Linie in so viele gleiche oder ungleiche Theile als ihr wollet. Machet sie aber so klein als möglich. Auf den Theilungspunkten P. E richtet die Perpendiculair-Linie PM, EN auf. (Man ziehet hier nur zwo derselben um die Verwirrung der Linien zu vermeiden.) Eine jede derselben sey die mittlere Proportionallinie zwischen ihrer Abscisse und dem gegebenen Parameter BD. Lasset endlich durch die äussersten Punkte M, N dieser Perpendiculair-linien eine krumme Linie gehen. Diese wird die verlangte Parabel seyn.

Beweis.

---

se Produkte alsdenn noch immer sich gleich seyn; Ein Beweis, daß in dem Verhältnisse nichts verändert worden ist. Es sey dieser allgemeine Ausdruck folgender: $a : am = b : bm$ so ist er verändert dieser: $a - am : a = b - bm : b$ und die Produkte sind $(a - am)\, b$ und $a\,(b - bm)$ oder $ab - amb$ und $ab - amb$; folglich sind sie einander gleich. In Zahlen siehet man es noch deutlicher: $12 : 6 = 8 : 4$: verändert: $12 - 6 : 12 = 8 - 4 : 8$ oder $6 : 12 = 4 : 8$, welches ein jeder für eine wahre Proportion erkennen wird. W.

Beweis. Es verhält sich vermöge der Construction $AP : PM = PM : BD$. Folglich ist $AP \times BD = \overline{PM}^2$. Eben so $AE : EN = EN : BD$. Folglich ist $AE \times BD = \overline{EN}^2$. Und so bey allen übrigen Punkten. Man findet also in jedem Punkte, daß das Quadrat der Ordinate PM gleich sey dem Rectangel aus der Abscisse AP und dem Parameter BD; Folglich hat man die gesuchte Parabel. (§. 20.)

§. 25.

Andere Art. Es sey die Linie von unbestimmter Länge AL (Fig. 7.) deren Theil AC dem gegebenen Parameter gleich ist. Aus dem Punkte C lasset uns die unbestimmte Perpendiculairlinie ds aufrichten. Alsdenn lasset uns aus einem gewissen Punkte D der auf der Linie AL angenommen ist, und mit einem Radius DA, der grösser ist als BA und also grösser ist als die Helfte von AC den Cirkel HmA beschreiben. Lasset uns bey den Punkten F. G. C. u. s. w. eben so mit den Halbmessern FA, GA, CA u. s. w. verfahren. Wir werden alsdenn Cirkel bekommen, die die unbestimmte Linie ds in den Punkten m, o, p, r. u. s. w. durchschneiden. Lasset uns endlich aus den beyden Linien Cm, CH das Rectangel Ct construiren, um den Punkt t zu bekommen, welcher in der gesuchten Parabel seyn wird. Verfahren wir eben so mit den beyden Linien CO, CI; wie auch mit den Linien Cp, CK oder auch noch mit Cr, CL, so werden wir auf dieser Art Punkte u. x. y. u. s. w. finden, welche in der Parabel seyn werden.

Beweis. Es sey der Parameter $AC = p$, so verhält sich vermöge der Natur des Cirkels $CH : Cm = Cm : AC$ oder p. Folglich ist $\overline{Cm}^2 = CH \times p$. Nun ist aber $\overline{Cm}^2 = \overline{Ht}^2$; Folglich ist $\overline{Ht}^2 = CH \times p$; Folglich ist (§. 20.) der Punkt t in einer Parabel, deren Parameter $= AC$ ist. Eben so muß man sich bey dem Beweise verhalten, daß die andern Punkte u. x. y. u. s. w. in dieser Parabel sind. W. z. E. und z. E. W.

§. 26.

§. 26.

Ich habe mich über die ersten Begriffe, die uns die Grundeigenschaften oder charakteristischen Eigenschaften der Parabel haben entdecken lassen und uns auf die Construction derselben geführet haben, sehr weit ausgebreitet. Allein, da dieses ein ähnlicher Gang für die übrigen Kegelschnitte ist, so ist dieses hier ein für allemal bewiesen. Es müssen daher die Anfänger, welche den Geist der Geometrie, das heißt, die Methode recht erlernen wollen, nach welcher man verfährt, um daselbst Entdeckungen zu machen, herzhaft bey diesen Grundwahrheiten stehen bleiben, und müssen überzeugt seyn, daß etwas gut wissen, so viel sey, als vieles wissen.

§. 27.

Aufgabe. Wenn eine Parabel DAH (Fig. 5.) und ihr Scheitelpunkt A gegeben ist, die Axe, ihren Parameter, die Ordinate und doppelte Ordinate, die dem Parameter gleich ist, zu finden.

Auflösung. 1.) Aus dem Punkte A beschreibe man mit einer willkührlichen Eröfnung des Cirkels einen Cirkelbogen, der die Parabel in zween Punkten M und R durchschneidet und ziehe die Sehne MR. Ziehet durch die Mitte derselben P eine Linie von unbestimmter Länge AB aus dem Punkte A. So ist klar, daß PM = PR perpendiculair gegen AB und daß folglich (§. 5.) AB die Axe und PM oder PR eine Ordinate seyn werde.

2.) Setzet das Verhältniß an AP : PM = PM zu einer 4ten Linie, so bekommet ihr den Parameter p. (§. 16.)

3.) Nehmet die Abscisse AP, die dem gefundenen Parameter p gleich ist und ziehet die Ordinate PM. Diese wird dem Parameter gleich seyn. Denn, weil $\overline{PM}^2 = AP \times p$ (§. 20.) $= pp$ (vermöge der Bedingung), so ist PM $= p$.

 4.) Man

4.) Machet $AP = \frac{p}{4}$ und ziehet die Ordinate PM, die ihr bis R, wo sie mit dem andern Arm der Parabel zusammenstößt, verlängern müsset, so wird $MR = p$ seyn. Denn es ist $\overline{PM}^2 = AP \times p$. (§. 20.) $= \frac{p}{4} \times p$ (Beding.) $= \frac{pp}{4}$. Folglich ist $PM = \frac{p}{2}$. Folglich 2PM oder $MR = p$.

§. 28.

Erklärungen. Wir haben schon gesehen, (§. 13.) daß eine Tangente an der Parabel NT (Fig. 8.) nothwendig mit der Axe dieser krummen Linie in einem Punkt zusammen kommen müsse. Wenn man folglich von dem Berührungspunkt N eine Ordinate NE ziehet, so werden die Tangente NT, die Ordinate NE und das Stück der Axe TE, welches man die Subtangente nennet, ein rechtwinklichtes Dreyeck TEN machen. Man weiß aber, daß, wenn zwo Seiten eines rechtwinklichten Triangels bestimmt sind, die dritte es nothwendig auch sey. Wenn man folglich forderte, daß man eine Methode erfinden sollte, eine Tangente zu irgend einem Punkt N einer Parabel oder andern krummen Linie zu ziehen, worinn man das Verhältniß der Abscissen und Ordinaten gegen einander kennet; so siehet man, daß wenn man zu dem Punkt N die Ordinate gezogen hat, es nur darauf ankomme, die Subtangente TE zu bestimmen, das heißt, das Verhältniß zu finden, welches diese gegen die Abscisse AE oder gegen eine andere bekannte Linie hat. Dieses ist nun die allgemeine Methode, welcher ich mich bediene, und die kein anderer, so viel ich weiß, gegeben hat. Sie ist sehr simpel; Doch das folgende Beyspiel wird sie besser verstehen lehren als das blosse Raisonnement.

§. 29.

Fünfter Hauptsatz. In der Parabel ist die Subtangente TE allemal doppelt so groß, als die Abscisse AE.

Beweis. Wenn man sich nach der 5ten Figur gleich anfangs die Sekante TMD vorstellet, die durch den

Punkt M oder wo man sonst eine Tangente haben will, durchgehet. Wenn man nun die Linie TMD sich um den Punkt T gegen die linke Hand drehen liesse, bis sie aufhörte die krumme Linie zu durchschneiden, so ist es klar, daß die Durchschnittspunkte M und D, wovon sich der letztere immer dem erstern nähert, endlich zusammen fliessen werden, wenn nämlich TMD die Tangente wird, und daß alsdenn PT die Subtangente seyn wird. Es sey nun $AP = x$; $PB = d$. Folglich $AB = x + d$, $PT = s$ und $\overline{PT}^2 = ss$. Folglich $BT = s + d$ und $\overline{BT}^2 = ss + 2sd + dd$.

Dieses vorausgesetzet, so haben wir folgendes Verhältniß (§ 6.) $\overline{BD}^2 : \overline{PM}^2 = AB\,(x+d) : AP\,(x)$ und wegen der ähnlichen Triangel TBD und TPM, $\overline{BD}^2 : \overline{PM}^2 = \overline{BT}^2\,(ss+2ds+dd) : \overline{PT}^2\,(ss)$. Folglich $x+d : x = ss+2ds+dd : ss$. Wenn man folglich das 2te Glied vom ersten und das 4te vom 3ten subtrahiret, $d : x = 2ds + dd : ss$. Folglich ist $dss = 2dsx + ddx$. Folglich, wenn man mit d dividiret $ss = 2sx + dx$ (A) oder $2s + d : s = s : x$. Folglich ist das Verhältniß von s zu x, das heißt der Subtangente zur Abscisse dem Verhältniß $2s + d$ zu s gleich, wenn man nämlich annimmt, daß TMD eine Secante sey. In dem Augenblick aber, wenn TMD die Tangente wird, so fallen die Punkte D und M in einander und es wird der Unterschied der Abscissen PB oder $d = 0$. Lasset uns also in der Gleichung A, das Glied wo d sich findet ausstreichen, so wird die Gleichung folgende werden: $ss = 2sx$ oder, wenn man mit s dividiret $s = 2x$. Dieses zeiget an, daß die Subtangente PT das Duplum der ihr zugehörigen Abscisse AP sey. Und da dieses in einem jeden Punkte der krummen Linie geschiehet, so erkennet man, daß wenn man in der 8ten Figur TN für die Tangente annimmt, man die Subtangente TE bekomme, die doppelt so groß ist, als die Abscisse AE. W. z. E. W.

§. 30.

Wenn man umgekehrt aus dem Punkt N einer Parabel eine Ordinate NE auf die Axe ziehet, und nun AT=AE machet, um das Duplum der Abscisse AE zu bekommen, so behaupte ich, daß TN von dem Punkte T an den äussersten Punkt N der Ordinate NE gezogen, die Tangente der Parabel seyn werde.

Beweis. Sie wird entweder eine Tangente oder eine Sekante seyn. Nun ist es aber unmöglich, daß sie eine Sekante sey. Denn sonst würde man aus dem Punkte N eine Tangente NS ziehen können, welche die Axe in einem Punkte *s* über oder unter T durchschneiden würde. (§. 13.) Allein, wenn NS eine Tangente ist, so haben wir augenblicklich gesehen, daß die Subtangente das Duplum der Abscisse AE sey. Folglich würde ES=2AE seyn. Nun ist aber nach der Bedingung TE=2AE. Folglich müßte ES=TE, das heißt, der Theil dem ganzen gleich seyn, welches unmöglich ist. Folglich ist TN unmöglich eine Sekante. Folglich muß sie eine Tangente seyn.

§. 31.

Erster Zusatz. Hieraus folgt, daß, wenn man aus dem Berührungspunkt N auf der Tangente NT die Perpendicularlinie NL aufrichtet, diese mit der Axe in einem Punkt L zusammenstossen werde, und zwar so, daß die Subnormallinie EL (*a*) der Helfte des Parameters gleich sey. Es ist also zu beweisen daß EL$=\frac{p}{2}$ sey.

Beweis. Wenn wir NE$=y$ setzen, AE$=x$. TE$=2x$ (§. 29.) so werden wir dieses Verhältnis haben: $2x$ (TE) : y(NE)$=y$ (NE) : EL (weil der Triangel TNL

(*a*) Eine Subnormallinie ist dasjenige Stück der Axe EL, welches zwischen der Normallinie LN und der Ordinate EN lieget. B.

TNL bey N einen rechten Winkel hat und weil NE perpendiculair auf TL stehet, (nach der Construction.) Folglich ist $EL = \frac{yy}{2x}$. Nun ist aber $yy = px$. (§. 20.) Folglich ist $EL = \frac{px}{2x} = \frac{p}{2}$.

* §. 32.

Zweyter Zusatz. Aus irgend einem Punkt der Parabel ziehet eine Ordinate MPQ auf die Axe AO dieser krummen Linie (Fig. 9.); Jngleichem eine Tangente MG und aus dem Punkte Q eine Perpendiculairlinie QG. Wenn man hernach eine Linie MT oder Mt ziehet, biß sie die krumme Linie in einem Punkt T oder t über oder unter MQ durchschneidet und biß sie auf die Linie QG in einem Punkte R oder r stößt; Wenn man ferner von dem Punkte T oder t die Perpendiculairlinie TS oder ts auf MQ, die im Nothfall verlängert wird, ziehet: So behaupte ich, daß, wenn die Linie MT über oder unter MQ fällt und man verbindet die beyden Punkte S und R oder s und r durch eine grade Linie SR oder sr, daß alsdenn die Linie SR nothwendig mit der Tangente MG parallel sey.

Beweis des ersten Falls. Man muß folgendes Verhältniß beweisen: MQ : QG = QS : QR. Es sey $AP = x$, $PL = 2x$ (§. 29.); der Parameter $= p$, $PQ = MP = \sqrt{(px)}$ (§. 20.) $MQ = 2\sqrt{px}$; $QG = 4x$. (Denn es ist $MQ = 2MP$; Folglich $QG = 2PL = 4x$); $PS = d$, $MS = MP + PS = \sqrt{(px)} + d$; $QS = PQ - PS = \sqrt{(px)} - d$. Ziehet man nun die Ordinate $TO = PS = d$, so ist $AO \times p = \overline{TO}^2 = dd$ (§. 20.) Folglich $AO = \frac{dd}{p}$. Daher $PO = AP - AO = x - \frac{dd}{p} = ST$. Es verhält sich aber MS : ST = MQ : QR, das heißt, (wenn man in diesem Verhältnisse die analytischen Werthe für MS, ST und

und MQ setzet), $\surd(px)+d : x-\frac{dd}{p}=2\surd px$: QR.

Daher ist $QR=\frac{(x-\frac{dd}{p})\times 2\surd px}{\surd(px)+d}$. Hier folgen nun die analytischen Werthe von den vier Grössen MQ, QG, QS, QR : $2\surd px$, $4x$, $\surd(px)-d$, $\frac{(x-\frac{dd}{p})\times 2\surd px}{\surd(px)+d}$.

Nun behaupte ich aber folgendes Verhältniß als richtig: $2\surd px$: $4x=\surd(px)-d : \frac{(x-\frac{dd}{p})\times 2\surd px}{\surd(px)+d}$ oder (wenn man die beyden letzten Glieder durch $[\surd(px)+d]$ multiplicirt) $=px-dd : (x-\frac{dd}{p})\times 2\surd px.$) Dieses ist ganz gewiß, weil das Product der beyden äussersten Glieder dem Product der beyden innersten Glieder gleich ist, oder $2\surd(px)\times(x-\frac{dd}{p})\times 2\surd px=4x\times(px-dd)$; Denn man hat an beyden Seiten $4pxx-4ddx$. Folglich verhält sich MQ : QG = GS : QR und folglich ist SR parallel mit MG. W. z. E. W.

Beweis des zweyten Falls. Wenn rs parallel mit MG ist, so sind die Triangel sQr und MQR sich ähnlich. Es muß also folgendes Verhältniß bewiesen werden; MQ : QG = Qs : Qr.

Es sey alles wie oben, Ps = d; Folglich Qs = Ps — PQ = $d-\surd px$; und wenn man die Ordinate to = Ps = d ziehet, so ist A$o=\frac{dd}{p}$. Folglich Po = Ao — AP $=\frac{dd}{p}-x=st$. Es verhält sich aber Ms : st = MQ : Qr oder $\surd(px)+d:\frac{dd}{p}-x=2\surd px: \frac{(\frac{dd}{p}-x)\times 2\surd px}{\surd(px)+d}=$ Qr.

Qr. Folglich kommt es darauf an folgendes Verhältniß zu beweisen: $2\sqrt{px} : 4x = d - \sqrt{px} \mid \frac{(\frac{dd}{p} - x) \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{(px)} + d}$ oder (wenn man die letztern zwey Glieder durch $[\sqrt{(px)} + d]$ multiplicirt) $= dd - px : (\frac{dd}{p} - x) \times 2\sqrt{px}$. Dieses ist aber ohnfehlbar, weil $(2\sqrt{px} \times (\frac{dd}{p} - x) \times 2\sqrt{px}) = (4x \times (dd - px))$ Folglich verhält sich $MQ : QG = Qs : Qr$. Folglich ist rs mit MG parallel. W. z. E. W.

* §. 33.

Umgekehrt, wenn man MR oder Mr oberhalb oder unterhalb der Horizontallinie MQ so weit ausziehet, bis sie in einem Punkte R oder r die auf MQ perpendiculair stehende Linie GQr berühret, und wenn man RS oder rs parallel mit der Tangente MG ziehet, und wenn man aus den Punkten S oder s, wo diese Linie die doppelte Ordinate MQ durchschneidet, die perpendiculaire Linie ST oder st ziehet; so werden diese die krumme Linie in den nämlichen Punkten T, t durchschneiden, in welchen die schiefen Linien MR oder Mr, die nach Erforderniß verlängert werden, mit der Parabel zusammenstossen.

Beweis. Wenn die Perpendiculairlinien ST, und st die krumme Linie in den Punkten T, t nicht durchschnitten, so würden sie dieselbe in andern Punkten durchschneiden. Wenn man folglich aus den Punkten T, t auf MQs Perpendiculairlinien fallen liesse, so würden sie auf Punkte stossen, die von S, s unterschieden wären. Wenn man also von diesen neuen Punkten nach R und r Linien zöge, so würden diese letzten Linien mit MG parallel laufen, wie man oben gesehen hat. Allein es ist vermöge der Bedingung RS oder rs auch mit MG parallel. Folglich würde man aus den nämlichen Punkten R

oder *r* zwo Linien haben die mit einer Linie parallel wären. Dieses ist unmöglich. Von dem §. 32. 33 macht man beym Bombenwerfen Gebrauch.

§. 34.

Sechster Hauptsatz. Es sey, wie oben, die Tangente TM, die Ordinate PM (Fig. 10.) und man ziehe aus dem Berührungspunkt M die Linie ME mit der Axe parallel. Wenn man nun durch den Punkt A eine Linie AG, die auf der Axe perpendiculair stehet, so weit ausziehet, bis sie die Linie ME, die nach G zu verlängert ist, berühret, so wird der Triangel TOA dem Triangel OMG gleich seyn.

Beweis. Denn es sind die Triangel TOA und OMG offenbar sich ähnlich. Folglich verhält sich AT : MG = AO : OG. Nun ist aber AT = AP (§. 29.) und AP = MG nach der Construction. Folglich ist AT = MG. Folglich auch AO = OG. Folglich ist der Triangel TOA = OMG.

§. 35.

Siebender Hauptsatz. Es ist der Triangel TPM dem Rectangel APMG gleich, und wenn man AQ mit TM parallel ziehet, so findet man auch, daß der Triangel AQG dem Parallelogramm AQMT gleich sey.

Beweis I. Weil der Triangel TOA = OMG (§. 34.), so ist TOA + AOPM = OMG + AOPM, das heißt, der Triangel TMP ist dem Rectangel APMG gleich.

II. Es ist der Triangel AQG dem Parallelogramm AQMP gleich. Denn diese beyden Figuren haben den Theil QMOA gemeinschaftlich und die zwey andern Theile TOA und OMG, die noch zu ihnen gehören, wenn sie vollständig seyn sollen, sind sich gleich (§. 34.). Folglich u. s. w.

§. 36.

Achter Hauptsatz. Lasset uns durch einen Punkt x der Axe, der zwischen A und P ist, mit der Tangente AG eine Parallellinie ziehen, und durch den Punkt u, wo sie die krumme Linie durchschneidet, ziehe man SuK mit der Tangente TM parallel, so wird der Triangel Sxu dem Rectangel $AxeG$ gleich seyn.

Beweis. Es ist klar, daß die Triangel TPM und sxu sich ähnlich sind. Folglich verhält sich $TPM : sxu = \overline{PM}^2 : \overline{xu}^2$ (a). Nun verhält sich aber (§. 6.) $\overline{PM}^2 : \overline{xu}^2 = AP : Ax$. Folglich $TPM : sxu = AP : Ax = AP \times PM : Ax \times xe$. (weil $PM = xe$). Folglich $TPM : sxu = AP \times PM : Ax \times xe$, oder verwechselt, $TPM : AP \times PM = sxu : Ax \times xe$. Es ist aber $TPM = AP \times PM$ (§. 35.) Folglich ist der Triangel $sxu =$ dem Rectangel $Ax \times xe$. W. z. E. W.

§. 37.

Neunter Hauptsatz. Der Triangel SAi ist $=$ dem Trapez $iueG = udoi + odeG$.

Beweis. Es ist der Triangel $sxu = AxeG$ (§. 36.) Wenn man folglich von beyden Seiten den gemeinschaftlichen

(a) Denn die beyden Triangel TMP und sxu sind sich einander ähnlich, weil bey x und P vermöge der Construction rechte Winkel sind, und weil der Winkel bey S dem Winkel bey T gleich ist. Es sind nämlich nach der Construction TM und Su Parallellinien, die von einer dritten graden Linie xT durchschnitten werden. Folglich ist der äussere Winkel S dem innern Winkel T gleich. Sind diese Triangel aber ähnlich, so verhalten sie sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer gleichnamigten Seiten. Folglich $TPM : Sxu = \overline{PM}^2 : \overline{xu}^2$. B.

Theil $AxuI$ wegnimmt, so findet man, daß der Triangel $SAI =$ dem Trapez $IueG = udoI + OdeG$ sey. W. z. E. W.

§. 38.

Zehenter Hauptsatz. Wenn man die Parallellinie Sr so lange verlängert, bis sie mit der krummen Linie in einem Punkte K zusammen kommt (§. 15.), und wenn man aus dem Punkte K eine Ordinate KDB auf die Axe ziehet, so wird dadurch ein Triangel rDK entstehen, welcher dem Triangel reu gleich seyn wird.

Beweis. Weil die Triangel sxu und SBK sich ähnlich sind, so verhält sich $sxu : SBK = \overline{xu}^2 : \overline{BK}^2$ (§. 306. Instit. B. II.) Nun verhält sich aber $\overline{xu}^2 : \overline{BK}^2 = Ax : AB$ (§. 6.) $= Ax \times xe : AB \times BD$ (weil $xe = BD$); Folglich verhält sich der Triangel sxu zum Triangel SBK, wie das Parallelogramm $AxeG$ zum Rectangel $ABDG$, oder wenn man die Glieder verwechselt, $sxu : AxeG = SBK : ABDG$. Es ist aber $sxu = AxeG$ (§. 36.) Folglich $SBK = ABDG$. Allein diese beyden letzten Flächen haben den Theil $BDrIA$ gemeinschaftlich. Folglich ist die Summe der übrigen ungleichen Theile von einer Seite der Summe der übrigen Theile von der andern Seite gleich, das heißt, $SAI + rDK = reu + IueG$. Es ist aber $SAI = IueG$. Folglich ist endlich $rDK = reu$. W. z. E. W.

§. 39.

Erster Zusatz. Weil der Triangel rDK dem Triangel reu gleich ist, und weil diese Triangel noch ausserdem augenscheinlich sich ähnlich sind, so folgt, daß $ur = rK$ (a) das heißt, daß

(a) Ich behaupte, daß zwey ähnliche Triangel rDK und reu, die sich auch den Flächen nach gleich sind, auch lauter Seiten ha-

daß die Sehne uK, die mit der Tangente TM parallel ist, durch die Linie ME, die durch den Berührungspunkt M mit der Axe parallel gezogen ist, in zwene gleiche Theile getheilet werde. Und weil ur nach Belieben angenommen worden ist, so ist es klar, daß alle Parallellinien mit einer Tangente einer Parabel, die durch einen Punkt dieser krummen Linie gezogen und so lange verlängert worden sind, bis sie in einem andern Punkt K mit der Parabel zusammen treffen (§. 15.) durch eine Linie, die wie ME gezogen ist, in zwey gleiche Theile getheilet werden. Dieses ist die Ursache, warum die Linie ME oder jede andere ähnliche Linie die parallel mit der Axe gezogen wird, ein **Diameter** genennet worden ist und weswegen ur oder rK, die durch einen Punkt r des Diameters mit der Tangente TM an dem Scheitelpunkt, parallel gezogen sind, Ordinaten genennet werden.

§. 40.

Zweyter Zusatz. Eine jede Sehne Az, (Fig. 10. 11.) die durch einen Puukt y eines Diameters NH unterwärts dem Scheitelpunkt N, mit der Tangente an diesem Scheitelpunkte nicht parallel gezogen wird, kann durch diesen Diameter nicht in zweene gleiche Theile getheilet werden. Denn, wenn Az in y in 2 gleiche Theile getheilet wäre, so würde, wenn man aus dem Punkt A die Linie AC mit der Tangente TN parallel zöge, diese Parallellinie, sie mögte oberhalb Az (Fig. 10.) oder unterhalb Az (Fig. 11.) fallen, gleichfals in dem Punkte r, durch den Diameter NH in zwey gleiche Theile getheilet werden. (§. 39.) Man würde also

---

haben, die in beyden Triangeln einander gleich sind. Denn, wenn sich die Triangel ähnlich sind, so verhalten sich $DK : eu = rD : re$, und weil man voraussetzt, daß die Oberflächen sich gleich sind, so ist $rd \times DK = eu \times re$, oder es verhält sich $rD : re = eu : DK$. Folglich $DK : eu = eu : DK$. Folglich $\overline{DK}^2 = \overline{eu}^2$ oder $DK = eu$. Folglich auch $rD = re$ und $rK = ru$.

also dieses Verhältnis bekommen: $Ay : yz = Ar : rc$. Wenn man folglich die Sehne cz zöge, so würde diese mit yr oder mit der Axe AB parallel seyn. (a). Folglich könnte eine Linie, die mit der Axe der Parabel parallel wäre, diese krumme Linie in zwey Punkten durchschneiden. Welches unmöglich ist. (§. 11.)

§. 41.

Dritter Zusatz. Folglich wird eine Sehne AC, die durch den Diameter NH in zwey gleiche Theile getheilet worden ist, nothwendig mit der Tangente an dem Scheitelpunkte N dieses Diameters parallel laufen.

Lasset uns annehmen, sie sey nicht mit derselben parallel; Man würde folglich aus dem Punkte A eine andere Parallellinie mit Az ziehen können. Diese mögte nun oberhalb oder unterwärts AC fallen, so würde sie diese Gleichung geben $ay = yz$. (§. 38.) Wenn man aber annimmt, daß AC in zwey gleiche Theile getheilet worden ist, so ist es unmöglich, daß $Ay = yz$ sey. (§. 40.) Folglich kann eine Sehne durch einen Diameter der Parabel nicht in zwey gleiche Theile getheilet werden, ohne parallel mit dem Scheitelpunkte dieses Diameters zu seyn.

§. 42.

Vierter Zusatz. Ziehet durch den Scheitelpunkt M (Fig. 10.) mit einer Ordinate ur an den Diameter ME eine Parallellinie MT; so behaupte ich, daß diese Parallellinie nothwendig die Tangente dieser krummen Linie an dem Punkt M seyn werde.

Wäre

(a) Denn sollte das angegebene Verhältniß statt haben, so müßten die beyden Triangel Ayr und Azc sich so ähnlich seyn, daß der Winkel Ayr dem Winkel Azc gleich sey. Dieses könnte aber nicht anders geschehen, als wenn mit der Basis zc eine Parallellinie yr gezogen würde. Folglich müßten yr und zc parallel seyn. B.

Wäre sie es nicht, so könnte man nothwendig durch diesen Punkt eine Tangente ziehen, gegen welche die Ordinate ur parallel wären, es würde (§. 41.) folglich aus einem Punkt zwo Parallellinien mit der nämlichen Linie gezogen werden können, welches unmöglich ist. Folglich ꝛc.

§. 43.

Fünfter Zusatz. Wenn zwey Sehnen AH, und uK einer Parabel, (Fig. 12.) die unter sich parallel sind in dem Punkte Q und r in zwey gleiche Theile getheilet sind, so behaupte ich, daß die Linie Qr, die durch die Theilungspunkte gezogen ist, nothwendig parallel mit der Axe der krummen Linie sey, das heißt, daß sie eine von ihren Diametern sey.

Denn gesetzt Qr sey kein Diameter oder nicht parallel mit der Axe TB, so könnte man durch die Mitte r der Sehne uK, die Linie srP mit TB parallel ziehen. Und alsdenn würde die Sehne uK parallel mit der Tangente sT seyn, die durch den Scheitelpunkt s des Diameters sP gezogen wäre; (§. 41.) Es würde folglich auch AH mit dieser Tangente parallel seyn. Folglich würde auch AH in dem Punkt x durch den Diameter sxP in zwey gleiche Theile getheilet seyn. (§. 39.) Sie ist aber auch, vermöge der Bedingung, in dem Punkt Q in zwey gleiche Theile getheilet. Es müßte folglich $AQ = Ax$ seyn, welches unmöglich ist. Folglich ist eine Linie, die zwey parallellaufende Sehnen einer Parabel in zwey gleiche Theile theilet, nothwendig einer von den Diametern dieser krummen Linie.

§. 44.

Aufgabe. In einer gegebenen Parabel einen von den Diametern derselben, ihre Axe und ihren Scheitelpunkt zu finden.

Auflösung. 1.) Ziehet in der Parabel zwey parallellaufende Sehnen AH und uK (Fig. 12.) Theilet eine jede die-

dieser Linien in zwey gleiche Theile in den Punkten Q und *r* und ziehet durch diese Punkte die Linie Q*r*; Verlängert diese, bis sie in einem Punkte M die krumme Linie durchschneidet; so wird die Linie MQ eine von den Diametern der Parabel seyn. (§. 43.)

2.) Von irgend einem Punkte K (Fig. 10.), wo eine von den Parallellinien *u*K die krumme Linie durchschneidet, lasset auf dem Diameter MQ, der nach Erforderniß verlängert werden muß, eine Perpendiculairlinie KD fallen. Verlängert dieselbe, bis sie die Parabel in einem andern Punkt *q* durchschneidet. Aus der Mitte dieser neuen Sehne K*q* richtet eine Linie BT von unbestimmter Länge auf. Diese wird die verlangte Axe, und der Punkt A, wo sie die krumme Linie durchschneidet, der Scheitelpunkt derselben seyn.

§. 45.

Aufgabe. Den Diameter zu finden, welcher durch einen gegebenen Punkt N einer Parabel gehet; wie auch die Lage der Ordinaten gegen diesen Diameter. (Fig. 11.)

Auflösung. 1.) Suchet nach Belieben einen andern Diameter MQ, (§. 44.) und ziehet durch den Punkt N die Linie NH mit MQ parallel, so werdet ihr den gesuchten Diameter haben. Denn MQ ist mit der Axe der krummen Linie parallel, (§. 39.) Folglich ist auch NH mit derselben parallel und also ein Diameter.

2.) Um die Lage der Ordinaten gegen diesen Diameter zu bekommen, so nehmet einen gewissen Punkt C unter N an. Ziehet die Sehne CN und verlängert sie bis NT=CN; ziehet durch den Punkt T mit NH eine Parallellinie TH und durch den Punkt A, wo diese Parallellinie die krumme Linie berühret, die Linie AC. Diese Linie wird in *r* in zwey = Theile getheilet werden. Denn es verhält sich CN : NT = C*r* : *r*A. Nun ist aber, vermöge der Construction, CN = NT. Folglich auch C*r*=*r*A. Folglich AC eine Sehne, die

die durch den Diameter NH in zwey gleiche Theile getheilet ist, und folglich ist AC parallel mit der Tangente, die an dem Scheitepunkte N dieses Diameters gezogen worden ist. Dieses bestimmet aber die Lage der Ordinaten gegen den Diameter NH. (§. 39).

§. 46.

Aufgabe. Durch einen beliebigen Punkt M einer gegebenen Parabel eine Tangente zu ziehen, ohne seine Zuflucht zur Axe zu nehmen. (Fig. 10.)

Auflösung. Suchet gleich Anfangs den Diameter ME, welcher durch den Punkt M der gegebenen Parabel gehen muß; Suchet auch die Lage der Ordinaten gegen diesen Diameter. (§. 45) Ziehet durch den Scheitelpunkt M mit einer dieser Ordinaten des Diameters ME eine Parallellinie MT. Diese Parallellinie wird die Tangente dieser Parabel an dem Punkte M seyn. (§. 42.)

§. 47.

Aufgabe. An einer gegebenen Parabel den Diameter NH (Fig. 10.) zu finden, der mit seinen Ordinaten Ar rc. so wie mit seiner Tangente Nt an dem Scheitelpunkte N einen Winkel ArN macht, der einem gegebenen schiefen Winkel g gleich ist.

Auflösung. 1.) Suchet nach Belieben einen Diameter AB (§. 44.) an dem Punkte A, wo dieser Diameter die Parabel durchschneidet, setzet einen Winkel $rAB = g$. Verlängert Ar, bis sie die krumme Linie in einem andern Punkt C durchschneidet; durch den Mittelpunkt r der Linie AC ziehet NrH mit AB parallel, so wird NH ein Diameter seyn (§. 39.) woran Ar eine Ordinate seyn wird (§. 39. 41.) diese wird mit ihrem Diameter einen Winkel $ArN = g$ machen. Denn wegen der Parallellinien AB und NH ist der Winkel $ArN = rAB$. Nun ist vermöge der Construction $rAB = g$. Folglich ist $ArN = g$. W. D. 1ste zu Th. W.

2.) Wenn man folglich durch den Scheitelpunkt N dieses Diameters mit der Ordinate Ar eine Parallellinie Nt ziehet, so wird man eine Tangente bekommen (§. 42.) welche mit der Axe oder einem jeden andern Diameter einen Winkel macht, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

§. 48.

Eilfter Hauptsatz. Der Triangel reu oder der Triangel rDK der ihm gleich ist (§. 38.), ist = dem Parallelogramm $rmTS$ (Fig. 10.)

Beweis. Es haben diese beyden Figuren den gemeinschaftlichen Theil $rMdu$. Folglich ist noch übrig zu beweisen, daß der Triangel dMe von der einen Seite gleich sey von der andern Seite $udTS = udOI + IOTS$. Es ist aber der Triangel MGO oder $dMe + deGO = TAO$ oder $SAI + IOTS$. (§. 34.) Addirt man nun zu dem einen und dem andern Theile das Viereck $udOI$, so ist $dMe + deGO + udOI = SAi + IOTS + udOI$. Nun ist aber (§. 37.) $udOI + deGO = SAI$. Folglich ist $dMe + IOTS + udOI = udTS$ und also $dMe + rMdu = udTS + rmdu$, das heißt, der Triangel reu oder rDK ist = dem Perallelogramm $rMTS$. W. z. E. W.

§. 49.

Zwölfter Hauptsatz. Die Quadrate der Ordinaten AQ und ur eines jeden Diameters einer Parabel, verhalten sich zu einander, wie die correspondirenden Absciſſen MQ und Mr. Es ist also zu beweisen, daß $\overline{AQ}^2 : \overline{ur}^2 = MQ : Mr$.

Beweis. Wenn man die beyden ähnlichen Triangel AQG und reu miteinander vergleichet, so verhält sich $AQG : reu = \overline{AQ}^2 : \overline{ur}^2$ (306. Instit. B. 11.) (a) Es ist aber der

(a) Man sehe meine Anmerkung zum §. 36. B.

der Triangel AQG = dem Parallelogramm AQMT (§. 35.) und der Triangel *reu* = dem Parallelogramm *r*MTS (§. 48.) Folglich verhält sich AQMT : *r*MTS $= \overline{AQ}^2 : \overline{ur}^2$. Es haben aber die beyden Parallelogramme AQMT und *r*MTS gleiche Höhen, weil sie zwischen den nämlichen Parallellinien AT und QM liegen. Folglich verhalten sie sich zu einander wie ihre Grundlinien MQ und M*r*, das heißt, AQMT : *r*MTS = MQ : M*r*. Folglich verhält sich $\overline{AQ}^2 : \overline{ur}^2 = MQ : Mr$. W. z. E. W.

§. 50.

Erklärung. Eine dritte Proportionallinie (Fig. 11.) zur Abscisse N*r* von einem Diameter NH einer Parabel, und zu der correspondirenden Ordinate A*r*, heißt der **Parameter** dieses Diameters. (*a*)

§. 51.

Zusatz. Es ist vermöge des zwölften Hauptsatzes klar, daß dieser Parameter eine beständige Linie ist, das heißt, daß man immer die nämliche dritte Proportionallinie finden wird, welcher Abscisse man sich auch bedienet. Wie dieses schon in Ansehung des Parameters von der Axe gezeiget ist. (§. 17.)

§. 52.

Dreyzehnter Hauptsatz. Das Quadrat einer jeden Ordinate AQ eines Diameters MD ist = dem Rectangel aus der Abscisse MQ und dem Parameter *t* dieses Diameters (Fig. 10.)

Beweis. Denn weil (§. 51.) beständig folgendes Verhältniß statt hat MQ : AQ = AQ : *t*, so ist $\overline{AQ}^2$ = MQ

(*a*) Aus der nämlichen Ursache, wie bey der Axe.

$= MQ \times t$. Und wenn man eine andere Ordinate ur annimmt, so verhält sich $Mr : ur = ur : t$ (§. 51.) Hieraus ziehet man die Gleichung $\overline{ur}^2 = Mr \times t$. u. s. w. Folglich ist das Quadrat einer Ordinate gleich dem angegebenen Rectangel. W. z. E. W.

* §. 53.

Erster Zusatz. Wenn man folglich eine Linie von unbestimmter Länge annähme, auf welcher man den Anfangspunkt N bestimmt; Wenn man diese Linie in eine grosse Anzahl gleicher oder ungleicher Theile theilte; Wenn man sie in den Theilungspunkten durch die Parallellinien Ar ꝛc. durchschnitte, die mit derselben einen solchen Winkel machten, daß sie die mittlere Proportionallinie zwischen ihren Abscissen Nr und einer beständigen Linie t ausmachten, so würde die krumme Linie, die man durch alle äusserste Punkte A, C ꝛc. dieser mittlern Proportionallinien gehen liesse, eine solche Linie seyn, daß das Quadrat einer jeden Ordinate dem Rectangel aus ihrer Abscisse und dem Parameter gleich wäre, und sie würde folglich eine Parabel seyn. Denn alsdann würden sich die Quadrate der Ordinaten zu einander verhalten, wie die ihnen zugehörigen Abscissen. Denn wäre dieses nicht, so würde man eine von der Parabel unterschiedene krumme Linie haben, in welcher alle Punkte gegen die nämliche Linie die nämlichen Eigenschaften, wie die Parabel, zeigte. Dieses ist aber unmöglich, weil alle Punkte dieser krummen Linie in diesem Falle die äussersten Punkte der nämlichen Linie wären oder seyn könnten, und folglich alle Punkte dieser 2 krummen Linien auf einander fallen und sie also nur eine einzige krumme Linie ausmachen müßten. Folglich ist die angenommene krumme Linie nicht von der Parabel unterschieden.

§. 54.

Dieser Zusatz ist der umgekehrte dreyzhente Satz und er ist bloß deswegen wahr, weil überhaupt alle Punkte

der

der krummen Linie die nämlichen Eigenschaften haben. Denn wenn diese Eigenschaften nur in Ansehung einiger Punkte bewiesen wären, so könnte man nicht grade zu darau schliessen, daß es eine Parabel seyn würde, weil eine andere rumme Linie, indem sie die erste in den nämlichen Punkten durchschnitte, in Ansehung dieser Punkte die nämlichen Eigenschaften als die erste haben, aber doch in andern Punkten durch andere Eigenschaften charakterisirt seyn könnte. Ich werde dieses weiter unten zeigen.

Anmerkung. Hieraus erkennet man, wie unumgänglich nothwendig es sey, die umgekehrten Sätze zu beweisen. Weil diese beständig solche Sätze sind, die zur Auflösung der Aufgaben dienen.

* §. 55.

Aufgabe. Wenn die Linie von unbestimmter Länge *AB* (Fig. 13.), deren Anfang in A ist, als der Diameter einer Parabel, so wie das verlängerte Stück AP als der Parameter dieses Diameters gegeben ist, eine solche Parabel zu beschreiben, daß der Winkel, den die Ordinaten mit diesem Diameter machen, einem gegebenen Winkel PAO gleich sey.

Auflösung. Ziehet aus dem Punkt A die Linie von unbestimmter Länge A*h* und aus einem Punkt K, der so angenommen ist, daß KP > KA sey, beschreibet mit KP einen Cirkel P*eb*. Beschreibet ferner aus dem Punkt I weiter unterwärts und so nahe bey K als möglich ist, einen andern Cirkel P*fc* und so weiter fort, indem ihr immer unterhalb K und so nahe als möglich bey einander Punkte annehmet, und beständig P in der Peripherie seyn lasset. Wenn ihr nun aus den Punkten *b*, *c*, *d* ꝛc. in welchen diese Cirkel den Diameter AB durchschneiden, die Linien *br*, *cs*, *dt* ꝛc. ziehet, die mit dem Diameter einen solchen Winkel machen, der dem gegebenen PAO gleich ist, und wenn ihr endlich *br* = A*e* machet und C*s* = A*f*, *dt* = A*g* ꝛc. so behaupte ich, daß

die Linie $Arst$ ꝛc. welche durch die äussersten Punkte der vorigen Linien gehet, eine Parabel sey.

Beweis. Es verhält sich nach der Natur eines Cirkels $AP : Ae = Ae : Ab$. Es ist aber $Ae = br$. (construct.); Folglich verhält sich $AP : br = br : Ab$. Eben so verhält sich $AP : Af = Af : Ac$. Es ist aber $Af = cs$. Folglich verhält sich $AP : cs = cs : Ac$, und so auch mit den übrigen Parallellinien. Diese sind demnach die mittlern Proportionallinien zwischen den ihnen zugehörigen Abscissen, und einer beständigen Linie AP. Folglich sind ihre äussersten Punkte r, s, t ꝛc. in einer Parabel. (§. 53.) worinn AB einer von den Diametern ist, welcher mit seinen Ordinaten einen Winkel macht, der dem gegebenen PAO gleich ist. (constr.)

* §. 56.

Zweyter Zusatz. Wenn man folglich von allen Punkten m, n, o ꝛc. der graden Linie von unbestimmter Länge AO, deren Anfang in A ist, Parallellinien mr, ns, ot ꝛc. ziehet, die sich unter einander verhalten, wie die Quadrate $\overline{Am}^2, \overline{An}^2, \overline{Ao}^2$ ihrer correspondirenden Abscissen, so sind die äussersten Punkte r, s, t ꝛc. dieser Parallellinien auch in einer Parabel.

Denn, wenn man die unbestimmte Linie AB parallel mit mr ziehet, und $Ab = mr$ machet und $Ac = ns$ und $Ad = ot$ so ist $\overline{br}^2 = \overline{Am}^2$; $\overline{cs}^2 = \overline{An}^2$; $\overline{dt}^2 = \overline{Ao}^2$; Folglich da $\overline{Am}^2 : \overline{An}^2 = mr : ns = Ab : Ac$ (Beding.); so verhält sich auch $\overline{br}^2 : \overline{cs}^2 = Ab : Ac$. Folglich sind die Punkte r, s, t ꝛc. in einer Parabel (§. 53.)

§. 57.

Dritter Zusatz. Erinnert euch wieder an den fünften Hauptsatz (§. 29.) worinn man bewiesen hat, daß in Ansehung

hung der Axe die Subtangente jederzeit das Duplum einer Abscisse sey, wenn man eine Tangente als gezogen annimmt; und daß man im umgekehrten Falle nothwendig eine Tangente bekomme, wenn man die Subtangente doppelt so groß, als die Abscisse annimmt; Ihr werdet alsdenn, ohne daß es nöthig wäre den Beweis zu wiederhohlen, erkennen, daß, wenn man in der eilften Figur von einem Punkt f eine Tangente fO ziehet, die mit dem Diameter in O zusammen stößt, und wenn man von dem nämlichen Punkt f die Ordinate fS an diesen ziehet (§. 45.) so werdet ihr erkennen, sage ich, daß die Subtangente OS das Duplum der Abscisse MS oder daß $OM = MS$ sey.

Denn man hat diese Eigenschaft in Absicht auf die Axe nur daher bewiesen, weil die Quadrate der Ordinaten der Axe sich unter einander verhielten, wie die ihnen zugehörigen Abscissen. Nun findet aber bey jedem Diameter der Parabel gleichfalls das Verhältniß zwischen den Quadraten der Ordinaten und den ihnen zugehörigen Abscissen statt (§. 49.) Folglich kann man daraus schliessen, wie in dem fünften Satze, daß $OS = 2MS$ und umgekehrt daß, wenn $OS = 2MS$ oder $OM = MS$ und wenn man die Ordinate Sf ziehet, (§. 45.) die Linie Of die Tangente seyn werde.

* §. 58.

Aufgabe. Von einem Punkte O ausserhalb der Parabel eine Tangente an diese krumme Linie zu ziehen. (Fig. 11.)

Auflösung. Habt ihr weder die Axe noch einen andern Diameter, so suchet einen derselben (§. 44.) Ich will annehmen, daß es NH sey. Darauf müsset ihr aus dem Punkt O die Linie OQ von beliebiger Länge, doch parallel mit NH ziehen. Diese wird in einem Punkte M mit der Parabel zusammen stossen, (§. 11.) und ein Diameter von derselben seyn. (§. 39.) Nun müsset ihr $MS = MO$ machen und durch den Punkt S müsset ihr die Ordinate Sf ziehen

hen (§. 45.), so wird alsdenn die Linie O*f*, die durch den Punkt O an den Punkt *f* gezogen ist, die Tangente seyn. (§. 57.); Denn die Subtangente OS ist das Duplum der Absciſſe MS (construct.)

* §. 59.

Vierter Zusatz. Wenn man folglich von den äussersten Punkten einer Sehne ED (Fig. 14.) die Tangenten EK und KD ziehet, so werden diese in dem nämlichen Punkt K mit dem verlängerten Diameter K*r*, der durch die Mitte der Sehne gehet, zusammenstossen müssen.

Denn nach der Construction sind die Linien EL und LD mit der Tangente an dem Scheitelpunkt N dieses Diameters parallel (§. 41.) und folglich Ordinaten dieses Diameters. (§. 39.) Folglich wird NL die Absciſſe der beyden Ordinaten seyn. Nun ist aber die Subtangente das Duplum der Absciſſe (§. 57 und 29.) Folglich wird die Subtangente in beyden Fällen sich gleich seyn, das heißt, sie wird sich in dem nämlichen Punkt K des Diameters K*r* endigen.

* §. 60.

Nun wollen wir sogleich durch Hülfe der folgenden Aufgabe die Quadratur eines jeden parabolischen Segments geben. Es ist dieses ein jedes Stück von der Oberfläche einer Parabel, wie ANCA (Fig. 14.), welches von einem Bogen ANC der krummen Linie und von der Sehne AC die unter demselben gezogen ist, eingeschlossen ist. Auch sagt man, daß ein Triangel in einem parabolischen Segmente eingezeichnet sey, wenn er zur Grundlinie die Sehne AC dieses Segments hat und wenn seine Spitze in einem Punkt N des Bogens ANC ist.

* §. 61.

Aufgabe. In dem Segmente einer Parabel ANCA den grösten möglichen Triangel zu beschreiben. (Fig. 15.)

Auflö-

Auflösung. Ziehet durch die r der Sehne AC, den Diameter Nr (§. 44.), und von dem Punkt N, wo er die krumme Linie durchschneidet, ziehet die graden Linien NA, NC: Alsdenn behaupte ich, daß der Triangel ANC der gröste Triangel sey, den man in dem Abschnitte ANCA beschreiben kann.

Beweis. Vermöge der Construction ist Ar oder Cr eine Ordinate des Diameters Nr, das heißt, diese Linie ist nothwendig parallel mit der Tangente NT an dem Scheitelpunkt N dieses Diameters. (§. 41.) Folglich ist von allen Punkten des Bogens ANC der Punkt N derjenige, der am weitesten von der Grundlinie AC entfernet ist; Alle übrige Punkte befinden sich unterhalb der Tangente NT. Folglich haben die verschiedenen Triangel NAC, die man hinein zeichnen kann, die nämliche Grundlinie als dieser Triangel, aber eine kleinere Höhe. Sie sind also nothwendig kleiner. Folglich ist der Triangel ANC der gröste.

* §. 62.

Fünfter Zusatz. Der gröste Triangel, der in dem Segmente eingezeichnet werden kann, ANC ist allemal grösser als die Helfte des Abschnitts ANCA, in welchem er verzeichnet ist. Denn wenn wir die Tangente TP an dem Scheitelpunkt N ziehen und die Linien AT und CP parallel mit dem Diameter ND machen, so ist es evident, daß der Triangel ANC, die Helfte des Parallelogramms CATP sey, mit welchem er gleiche Grundlinie und Höhe hat; Nun ist aber CATP grösser, als der Abschnitt ANCA. Folglich ist der Triangel ANC grösser als die Helfte des Abschnitts.

* §. 63.

Sechster Zusatz. Wenn man folglich fortführe die grösten möglichen Triangel in den neuen Abschnitten NCN und NAN zu verzeichnen, so würde man auf diese Art mehr, als

die Helfte von einem jeden Segmente wegnehmen, und wenn man beständig fortfahren würde, diese Triangel hinein zu zeichnen, so würde man endlich so, wie man immer neue Abschnitte bekommen würde, das heißt, indem man von dem Abschnitte ANCA immer mehr als die Helfte von dem Reste wegnehmen würde, so würde man, sage ich, endlich auf eine Grösse kommen die kleiner als eine jede gegebene Grösse wäre (*a*). Dieses zeiget an, daß die Summe aller dieser Triangel von diesem parabolischen Segmente, um weniger als eine jede noch so klein angenommene Grösse unterschieden seyn würde. Wenn man folglich das Verhältniß der Summe aller dieser Triangel gegen eine bekannte und zu quadrirende Grösse bestimmen könnte, so ist es klar, daß man die Quadratur des parabolischen Segmentes haben würde, welche nichts anders ist, als die Summe aller dieser Triangel. Dieses Verhältniß werde ich sogleich im folgenden Zusatze bestimmen.

* §. 64.

Siebender Zusatz. Wenn man in dem Segmente ANCA (Fig. 14.) den grösten möglichen Triangel ANC (§. 61.) beschreibet, so wird dieser Triangel viermal so groß seyn, als die Summe der beyden grösten Triangel CEN und ADN, die man in den Abschnitten CENC und ADNA beschreiben kann, oder welches einerley ist, der Triangel N*r*C, welcher die Helfte von dem grossen Triangel CNA ist, wird viermal so groß seyn, als der Triangel CEN, und seine andere Helfte A*r*N wird viermal so groß seyn, als ADN.

Beweis.

(*a*) Es ist klar, daß wenn man von irgend einer Grösse z. E. einem Schuh die Helfte nimmt; Darauf die Helfte von der Helfte, und immer die Helfte von dem, was übrig bleibt, so ist es klar, sage ich, daß man durch diese Theilung endlich auf einen Rest komme, der kleiner ist, als eine jede gegebene Grösse. Noch schneller wird man dahin kommen, wenn man immer mehr, als die Helfte wegnimmt.

Beweis. Ziehet die Tangente EK bis sie in irgend einem Punkt K mit dem verlängerten Diameter Nr zusammenstößt (§. 13.). Ziehet auch durch den Scheitelpunkt N die Tangente NI, biß sie in einem Punkt I den verlängerten Diameter EQ berühre. Endlich ziehet durch die Punkte E und F die Linien EL und FM mit der Tangente NI parallel und erwäget, daß, da EQ vermöge der Construction mit Kr parallel ist, auch EK mit FN parallel sey (§. 41.); so werdet ihr finden, daß EF=KN. Nun ist aber KN=NL (§. 57.) und NL=EI, weil ELNI ein Parallelogramm ist; Folglich ist EF=EI. Folglich ist FI das Duplum von FE. Folglich ist der Triangel NFI das Duplum von dem Triangel NFE, weil diese beyden Triangel gleiche Höhe in N haben, und der erste eine doppelt so grosse Grundlinie hat, als der zweyte. Es ist aber auch der Triangel CEN das Duplum vom Triangel NFE (constr.) Folglich ist der Triangel CEN=NFI. Nun ist NFI=NFM, weil die Figur FMNI ein Parallelogramm ist; Folglich ist CEN=NFM. Es ist aber NFM nur der vierte Theil vom Triangel NrC (*a*), weil die Seiten des erstern Triangels nur halb so groß sind, als die correspondirenden Seiten des zweyten (constr.); Folglich ist CEN auch nur der vierte Theil von NrC, oder NrC ist viermal so groß als CEN.

Wenn man in Ansehung des Triangels ADN die nämliche Construction macht, das heißt, wenn man die Tangente DK ziehet (§. 59.) ꝛc. so wird man durch eine, dem vorigen ähnliche Art zu schliessen finden, daß der Triangel ArN viermal so groß sey als ADN. Folglich, daß der ganze Triangel ANC viermal so groß sey, als die Summe der beyden Triangel CEN und ADN. W. z. E. W.

(*a*) Das heißt: Es verhält sich der Triangel NFM zum Triangel NrC wie $\overline{NF}^2 : \overline{NC}^2$ oder wie das Quadrat von 1. zu dem Quadrate von 2. und folglich wie 1. zu 4.

Das, was man den Augenblick von dem Triangel ANC in Ansehung der beyden Triangeln CEN und ADN bewiesen hat, dieses wird man auch von dem Triangel CEN in Ansehung der grösten Triangel die in den Segmenten CEC und ENE können verzeichnet werden, und von dem Triangel ADN in Ansehung der grösten Triangel die in den Abschnitten ADA und DND können beschrieben werden, und so beständig fort beweisen können, indem man immer, so, wie neue Abschnitte entstehen, die grösten Triangel darinn verzeichnet.

* §. 65.

Achter Zusatz. Man wird demnach eine Progreßion oder eine Reihe von Triangeln haben, die in dem gegebenen parabolischen Segmente eingezeichnet sind, die immer mehr als die Helfte von den Segmenten, worinn sie gezeichnet sind, (§. 62.) abschneiden, und eine Summe geben werden, die für die Oberfläche des parabolischen Abschnitts wird angenommen werden können (§. 63.). Es ist aber diese Progreßion so beschaffen, daß ihr erstes Glied viermal so groß ist, als das zweyte, das zweyte viermal so groß, als das dritte und das dritte viermal so groß, als das vierte, und so ins unendliche fort (§. 64.) Nun verhält sich aber die Summe aller Glieder einer solchen Progreßion zu dem ersten oder grösten Gliede wie 4 : 3 (*a*). Folglich verhält sich das parabolische Segment ANCA

(*a*) Folgende Erläuterung hierüber wird vielen nicht unangenehm seyn. Was eine geometrische Progreßion sey, wird ein jeder wissen, der dieses Buch lieset. Abnehmend heisset sie, wenn die vorhergehenden Glieder immer grösser als die nachfolgenden sind. Z. E. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. 2c. Unendlich heißt sie, wenn man die Anzahl ihre Glieder ohne Aufhören vermehret. Die Summe einer solchen Progreßion entstehet aus der Addition aller der einzelnen Glieder. Nun fragt sich, wie kann man auf eine leichte Art die Summe einer abnehmenden Pro=

ANCA zu dem grösten Triangel ANC, welches das gröste Glied ist, wie 4 : 3, das heißt, ein solches parabolisches Se-

---

Progreßion finden, deren Anzahl der Glieder unendlich ist? Wir wollen die Antwort auf folgende Art zu erfinden suchen. Es sey die Progroßion $a : b = b : c = c : d = d : e \ldots$ oder kürzer: $a. b. c. d. e \ldots$ In dieser Progreßion sind $a. b. c. d.$ die vorhergehenden Glieder und $b. c. d. e.$ die nachfolgenden. Nun sey die Summe S zu finden. Man erkennet ohne Schwürigkeit, daß die Summe aller vorhergehenden Glieder aus der Summe alle Glieder weniger dem lezten bestehe; und die Summe der nachfolgenden Glieder aus der Summe aller Glieder der Progreßion weniger dem ersten. Es sey nun das letzte Glied e; So ist folglich die Summe der vorhergehenden Glieder $= S - e$ und die Summe der nachfolgenden $= S - a$. Es sey z. E. die Progreßion in Zahlen 16. 8. 4. 2. 1. so ist die Summe aller vorhergehenden Glieder $= 16 + 8 + 4 + 2$ und Summe der nachfolgenden Glieder $= 8 + 4 + 2 + 1$. Die Summe aller Glieder $= 16 + 8 + 4 + 2 + 1$. Folglich ist die Summe der vorhergehenden Glieder $= (16 + 8 + 4 + 2 + 1) - 1$ das heißt $=$ der ganzen Summe weniger dem lezten Gliede und die Summe aller nachfolgenden Glieder $= (16 + 8 + 4 + 2 + 1) - 16 =$ der ganzen Summe weniger dem ersten Gliede. Es verhält sich aber die Summe aller vorhergehenden Glieder zur Summe aller nachfolgenden Glieder, wie das erste Glied zum zweyten. Folglich in unser Progreßion $(a + b + c + d) : (b + c + d + e) = a : b$. Die Richtigkeit dieses Verhältnisses kann folgender Gestalt erkannt werden: Das Verhältniß ist ein wahres Verhältniß, wenn man darthun kann, daß das Produkt der äussern Glieder $=$ sey dem Produkt der mittlern Glieder (nach der Arith.). Es ist folglich zu beweisen, daß $(a + b + c + d) b = (b + c + d + e) a$, oder daß $ab + bb + cb + db = ab + ca + da + ea$ sey. Dieses erhellet aber folgendermassen: Denn es ist

1.) $ab = ab$
2.) $bb = ca$ (Denn in der Progroßion ist folgende Proportion $a : b = b : c$. Folglich ist $ca = bb$).
3.) $cb = da$ (Denn in einer Progreßion verhalten sich alle Glieder auf einerley Art zu einander. Folglich auch $a : b = c : d$. Folglich $da = cb$).
4.) $db = ea$. (Aus vorigen Gründen).

Segment ist jederzeit $\frac{4}{3}$ von dem grösten Triangel, der in demselben beschrieben werden kann. Der Innhalt dieses Triangels

---

Folglich ist $ab + bb + cb + db = ab + ca + da + ea$. Folglich $(a + b + c + d)b = (b + c + d + e)a$. Folglich verhält sich $(a+b+c+d) : (b+c+d+e) = a : b$. Folglich verhält sich auch nach dem obigen $S - e : S - a = a : b$. Folglich ist auch $bS - be = aS - aa$, und da es eine absteigende Progreßion ist und also $a > b$, so ist auch $aa - be = aS - bS = (a - b) S$. Folglich ist $\frac{aa - be}{a - b} = S$. Setzet man nun die Progreßion ins unendliche fort, so wird, da die Glieder immer kleiner werden, man endlich auf ein Glied kommen, das kleiner ist, als jede angebliche Grösse. In diesem Falle kann man das leztere Glied oder $e = 0$ setzen. Alsdenn wird aus der vorigen Gleichung $\frac{aa - be}{a - b} = S$ folgende werden $\frac{aa - b0}{a - b} = S$. Allein wenn man eine 0 auch noch so vielmal nimmt, so ist das Produkt immer $= 0$. Folglich ist auch $b0 = 0$. Folglich ist $\frac{aa - 0}{a - b} = S$. Folglich $\frac{a\ a}{a - b} = S$. Nun wird man die hier folgende Anmerkung des Herrn Verfassers verstehen. B.

Da man die Summe S einer unendlich abnehmenden Progreßion, deren beyde ersten Glieder a, b sind durch diese Formel ausdrücket $S = \frac{a\ a}{a - b}$, und da in dem gegenwärtigen Exempel das zweyte Glied b nur der vierte Theil des ersten Gliedes a ist, das heißt, da $b = \frac{a}{4}$, so wird man statt der Formel $S = \frac{a\ a}{a - b}$, wenn man den Ausdruck $\frac{a}{4}$ an der Stelle von b setzt, folgende bekommen $S = \frac{a\ a}{a - \frac{a}{4}}$

gels kann aber genau gefunden werden. Folglich hat man auch die Quadratur der Parabel (*a*).

* §. 66.

Neunter Zusatz. Wenn man daher die Grundlinie AC des Triangels ANC in drey gleiche Theile theilet und alsdenn diese Grundlinie um den dritten Theil verlängert, so hat man einen Triangel, welcher $\frac{4}{3}$ von ANC und folglich dem parabolischen Abschnitte gleich ist. (§. 65.)

* §. 67.

Zehnter Zusatz. Wenn man ferner aus den Punkten A und C mit dem Diameter N*r* die Parallellinien AZ und CV ziehet und sie so lange verlängert, bis sie in den Punkten Z und V mit der Tangente an dem Scheitelpunkte N dieses Diameters zusammenstossen, so wird man das von aussen beschriebene Parallelogramm ACVZ bekommen, wovon der parabolische Abschnitt $\frac{2}{3}$ enthalten wird. Denn es ist evident, daß der Triangel ANC nur die Helfte des Parallelogramms ACVZ ist. Nun enthält aber das parabolische Segment (§. 65.) $\frac{4}{3}$ des Triangels ANC. Folglich enthält es nur $\frac{2}{3}$ von dem Duplum des Triangels, das heißt, von dem äussern Parallelogramm.

Anmerkung. Diese Methode, die Parabel zu quadriren oder das Verhältniß derselben gegen das äussere Parallelogramm zu bestimmen, ist sehr weitläuftig und beschwerlich, ob sie gleich sehr sinnreich ist. Da

---

$= \frac{aa}{\frac{3}{4}a} = \frac{4aa}{3a} = \frac{4a}{3}$. Folglich ist $S = \frac{4a}{3}$ oder $S \times 3 = 4 \times a$ und folglich verhält sich $S : a = 4 : 3$. W. z. E. W.

(*a*) Dem Archimedes hat man diese Quadratur der Parabel zu verdanken.

Da ich mich nun bemühete, eine andere Auflösung dieser Aufgabe zu suchen, so habe ich das Glück gehabt, eine zu finden, die auf alle zu quadrirende krumme Linien anzuwenden ist, und die zugleich so zierlich ist, daß vermittelst einer einzigen Proportion die Sache geendet ist. Ich gründe diese Methode auf einen einzigen Lehnsatz, den man beynahe begreift so bald man ihn hört.

§. 68.

Lehnsatz für die Quadratur der Parabel oder eine jede andere zu quadrirende krumme Linie. (Fig. 16.) Es sey AC eine krumme Linie oder ein Theil einer krummen Linie, die immer nach einer Seite zu hohl oder erhaben ist. Es sey BC die Axe derselben, und AB eine Ordinate. Lasset uns aus diesen zwoen Linien das Rectangel BD machen und AB oder DC in eine sehr grosse Anzahl gleicher Theile theilen; Aus den Theilungspunkten *b*, *g*, *h*... lasset uns mit BC die Parallellinien *bf*, *gk*, *ht* ziehen Durch die Durchschnittspunkte *r*, *x*, *y*.... die dadurch in der krummen Linie gemacht werden, lasset uns mit AB Parallellinien ziehen, damit dadurch Rectangel entstehen, wovon einige in dem Raum ACDA und ABCA eingezeichnet, andere aber um demselben verzeichnet sind. So ist zum Exempel das Rectangel *b*A ein solches Rectangel, von welchem ich behaupte, daß es um dem Raum ADCA beschrieben sey. Das Rectangel *bn* aber nenne ich ein in diesem Raume verzeichnetes Rectangel. So ist *gr* ein um diesem Raum beschriebenes Rectangel und *og* ein in dem nämlichen Raume beschriebenes Rectangel.

Wenn man dieses wohl eingesehen hat, so behaupte ich, daß man DC in eine so grosse Anzahl gleicher Theile theilen könne, daß die Summe der innerhalb des Raums verzeichneten Rectangel von der Summe der äussern um weniger unterschieden sey, als jede angebliche Grösse, sie mag so klein seyn, als sie will.

Be-

Beweis. Es ist aus der Construction der 16ten Figur klar, daß der Unterschied der Summe der, in dem Raume ADCA verzeichneten Rectangel, und der Summe derjenigen, die um denselben beschrieben sind, das Rectangel *b*A sey (*a*). Wenn man nun die Eintheilungen von DC ausserordentlich klein macht, so kann dieses Rectangulum kleiner werden als jede angebliche Grösse. Folglich . . .

Die nämliche Figur zeigt auch augenscheinlich, daß der Unterschied zwischen der Summe, der in dem Raum ADCA eingezeichneten und der Summe der um denselben beschriebenen Rectangel gleichfals das Rectangulum *b*A sey. Folglich ist dieser Satz wahr, man mag diese krumme Linie nach ihrer erhabenen oder nach ihrer hohlen Seite nehmen.

§. 69.

Erster Zusatz. Man wird leicht erkennen, daß die Summe der innerhalb des Raums verzeichneten, die Summe der ausserhalb verzeichneten Rectangel und die Fläche ADCA oder ABCA, in welchem und um welchen sie beschrieben sind, drey vollkommen gleiche Grössen sind, oder daß sie nur um eine Grösse unterschieden sind, die kleiner ist, als jede angebliche Grösse.

§. 70.

Eine sehr einfache Quadratur der Parabel (Fig. 17.) Es sey die halbe Parabel ABC; AB die Grundlinie derselben; AT ihre Tangente an dem Punkte A und folglich BC=CT (§. 29.); BD ein Parallellogramm, das um dieselbe beschrieben ist; Es sey ferner DC in eine sehr grosse Anzahl gleicher Theile getheilet wie D*b* und durch die Theilungspunkte *b* seyen mit AD Parallellinien gezogen, wie *bf* um

(*a*) Man lese darüber die Abhandlung nach, die ich nach dem §. 72. einrücken werde. B.

um durch die Durchschnittspunkte r in der krummen Linie mit AB eine Parallellinie nM zu ziehen. Dadurch werden die Rectangel $DAfb$ und $nABM$ entstehen, wovon jenes um dem Raum DACD, dieses um die parabolische Fläche ABCA beschrieben ist.

Diese Construction vorausgesetzt betrachte man das kleine Stück der krummen Linie Ar als einen Theil der Tangente AT, so ergibt sich wegen der ähnlichen Triangel rAf und ABT folgendes Verhältniß: $BT : BA = rf : fA$; Nun ist aber $BT = 2CB$ (§. 29.) und $rf = BM$. Folglich verhält sich $2BC : AB = BM : fA$. Folglich ist $fA = \frac{AB \times BM}{2CB}$ und weil $CB = fb$, so ist $fA \times bf = \frac{AB \times BM \times CB}{2CB} = \frac{AB \times BM}{2}$, das heißt, das Rectangulum $fA \times bf$, welches um den Raum DACD umschrieben ist, ist nur die Helfte des Rectangels $AB \times BM$, welches um dem parabolischen Raum ABCA umschrieben ist. Das nämliche wird man in jedem andern Punkte der krummen Linie finden, der wie der Punkt r determinirt ist. Es ist folglich die Summe der Rectangel, die um dem Raum DAC beschrieben sind, nur die Helfte der Summe derjenigen, die um dem Raum ABCA umschrieben sind. Setzet man aber die Theilung sehr weit fort, so kommt jede Summe mit dem Raum überein (§. 69.). Folglich ist der Raum DACD die Helfte der Oberfläche der halben Parabel ABCA Wenn man folglich den Raum $DACD = 1$ setzt, so wird die Oberfläche der halben Parabel $ABCA = 2$ seyn, und das Rectangulum $BD = 3$, das heißt, es wird die halbe Parabel ABCA $\frac{2}{3}$ des um sie beschriebenen Parallelogramms BD seyn. Dieses nämliche hat man im §. 67. aber durch einen viel beschwerlichern Weg gefunden. W. z. E. und z. Th. W. (*a*).

* §. 71.

(*a*) Diese Auflösung ist offenbar viel einfacher als diejenige, die man durch die Integralrechnung findet, die ohne das noch die Diffe-

* §. 71.

Zweyter Zusatz. Um also die Fläche des parabolischen Abschnitts ANC zu finden (Fig. 15.) muß man den größten möglichen Triangel in demselben beschreiben (§. 61.), und nachdem man den Innhalt desselben ausgerechnet hat, noch $\frac{1}{3}$ seines Innhalts hinzufügen. Hierdurch wird man $\frac{4}{3}$ des Triangels ANC bekommen. Diese sind dem Innhalte des Abschnitts ANCA gleich. (§. 65.)

Oder besser: Man beschreibe um dieses Segment ein Parallellogramm ACPT und nehme $\frac{2}{3}$ seines Innhalts. (§. 70.) (*).

Die

Differential-Rechnung voraussetzet. Nimmt man darzu noch die Deutlichkeit der Methode der Gränzen oder der Erschöpfung, deren ich mich bediene, so zweifle ich nicht, daß diese Art zu quadriren nicht nach dem Geschmacke der Kenner in dieser Materie seyn sollte.

(*) Ich rücke hier folgende Aufgabe ein, die meiner Meynung nach keinen Mißfallen bey jemand erregen wird, und die bey ihrer Nutzbarkeit ohne Schwierigkeit verstanden werden kann. Es sey (Fig. 17.) die halbe Parabel ABC gegeben, und man sollte auf einer andern Basis AB (Fig. 16), die der vorigen gleich wäre, eine halbe Parabel beschreiben, die zur ersten ein gewisses Verhältniß hätte: Wie ist dieses zu machen? Es sey das Verhältgiß wie 2 : 3. Man richte an dem Endpunkt B (Fig. 16.) eine Perpendiculairlinie BC auf. Man theile BC (Fig. 17.) in 2 gleiche Theile und trage diese Helfte von B in C (Fig. 16.) 3 mal. Nun suche man zu CB und BA (Fig. 16.) eine dritte Proportionallinie, so wird diese der Parameter der gesuchten Parabel seyn. (§. 16), mit welchem man nun leicht eine halbe Parabel auf AB wird beschreiben können. Der Beweis dieser Auflösung ist simpel. Die halbe Parabel ABC (Fig. 17.) ist $=\frac{2}{3}$ des Rectangels DCAB (§. 70.) und ABC (Fig. 16.) $=\frac{2}{3}$ DCAB. Vermöge der Bedingung haben aber diese beyden Rectangel einerley Basis und folglich verhalten sie sich wie ihre Höhen. Folglich verhält sich die $\frac{1}{2}$ Parabel (Fig. 17.) zur $\frac{1}{2}$ Parabel (Fig. 16.) wie 2 : 3. W. z. E. W.

Die im §. 68. angegebene Methode ist sehr geschickt uns den körperlichen Innhalt eines parabolischen Afterkegels oder eines solchen Körpers anzugeben, der durch Herumwälzung einer Parabel um ihre Axe erzeuget wird.

* §. 72.

Die Cubatur eines parabolischen Afterkegels oder seinen körperlichen Innhalt zu finden. (Fig. 18.) Theilet die Axe CB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile *cd*, *dl*, *lg* ..... Diese Theile müssen so klein, als möglich ist, seyn. Verzeichnet aus denselben ausserhalb des parabolischen Raums und in demselben Rectangel wie es die Figur zeiget. Es ist evident, daß der Unterschied der äussern und innern Rectangel, das Rectangulum *d*D sey, welches kleiner werden kann als jede angebliche Grösse. Jzt wollen wir uns vorstellen, daß die Parabel sich um ihre Axe wälze; so wird sie einen parabolischen Afterkegel erzeugen und sowohl die ausserhalb

---

Ueberhaupt lassen sich noch folgende Sätze bemerken, die aus dem §. 70. fliessen, in welchem bewiesen wurde, daß Parabeln $\frac{2}{3}$ der Rectangel sind, die um sie verzeichnet werden. Es müssen sich also 2 Parabeln zu einander verhalten wie diese Rectangel. Es verhalten sich daher

1.) Parabeln, die gleiche Bases haben, wie ihre Höhen.

2.) Parabeln, die gleiche Höhen haben, wie ihre Bases.

3.) Parabeln, die ungleiche Höhen und Bases haben, stehen in zusammen gesezter Verhältniß der Höhen und Grundlinien.

4.) Bey Parabeln, die bey ungleichen Höhen und Grundlinien, sich dennoch gleich sind, verhalten sich die Bases umgekehrt wie die Höhen.

Wie alle diese Sätze mit Nutzen zu gebrauchen und die nöthigen Constructionen zu verfertigen sind, wird ein jeder leicht begreifen. B.

serhalb als innerhalb beschriebenen Rectangel, werden Cylinder erzeugen, von welchen die Halbmesser der Grundfläche Ordinaten der Parabel seyn werden. Es wird folglich der Unterschied zwischen der Summe der äussern Cylinder und der Summe der innern Cylinder derjenige Cylinder seyn, der durch das Rectangulum dD beschrieben wird. Es kann folglich dieser Cylinder kleiner als jede Grösse werden. Man wird folglich den parabolischen Afterkegel für die Summe der äussern und innern Cylinder nehmen können, weil der Unterschied, der zwischen ihm und den äussern oder innern Cylindern ist, offenbar kleiner ist, als der Unterschied zwischen den äussern und innern Cylindern selbst.

Wenn wir folglich das Verhältniß der Summe der äussern oder innern Cylinder gegen irgend eine bekannte Grösse bestimmen können, deren körperlichen Innhalt wir leicht finden könnten, so ist es augenscheinlich, daß wir auch den Innhalt des parabolischen Afterkegels haben würden. Nun verhält sich aber der Cylinder, der durch das Rectangulum dh beschrieben ist, zu dem Cylinder, der durch das Rectangulum li beschrieben ist, welcher also vermöge der Bedingung gleiche Höhe mit ihm hat, wie die cirkelförmige Grundfläche des ersten, zur cirkelförmigen Grundfläche dieses leztern. Diese Grundflächen verhalten sich aber zu einander wie die Quadrate ihrer Halbmesser ds, lt oder wie $\overline{ds}^2 : \overline{dl}^2$. Es verhält sich aber $\overline{ds}^2 : \overline{dl}^2 = cd : cl$ (§. 6.) $= 1 : 2$ (nach der Construct.); Folglich verhält sich der Cylinder, der durch das Rectangulum dh beschrieben ist, zu dem Cylinder, der durch das Rectangulum li beschrieben ist, wie 1 zu 2. Eben so wird man beweisen, daß der Cylinder, der durch das Rectangulum dh beschrieben ist, sich zu dem Cylinder, der durch das Rectangulum gf beschrieben ist, verhalte wie 1 zu 3 u. s. w. Es machet folglich die Summe aller Cylinder, die um den parabolischen Raum beschrieben sind eine arithmetische Progression, deren Glieder sind 1. 2. 3. 4.... oder 0. 1. 2. 3. 4....

Man findet aber, daß die Summe einer solchen Progreßion, das heißt, die Summe aller dieser äussern Cylinder, welche zusammen genommen nicht von dem parabolischen Afterkegel unterschieden sind, man findet diese Summe der Progreßion, wenn man das gröste Glied, das heißt in diesem Falle, wenn man den Cylinder, der durch das Rectangulum B*m* entstanden ist, durch die Helfte der Anzahl der Glieder (*a*), oder durch die

(*a*) 1.) Ich habe anderer Orten bewiesen, daß in einem arithmetischen Verhältnisse die Summe der äussersten Glieder, der Summe der mittelsten Glieder gleich sey.

2.) Folglich ist in einer jeden arithmetischen Progreßion $a. b. c. d. e. f. g. \ldots$ die Summe $c + e$ jeder zwey Glieder c und e, die gleich weit von den äussersten Gliedern abstehen, der Summe $a + g$ der äussersten Glieder gleich. Denn wenn man die Progreßion zergliedert, so verhält sich arithmetisch $a - b = b - c = c - d = d - e = e - f = f - g$ (M): Hier siehet man gleich anfangs, daß $a - b = f - g$. Folglich ist nach der ersten Nummer $a + g = b + f$. So ist auch klar, daß $b - c = e - f$; Folglich ist $b + f = c + e$; Folglich ist $c + e = a + g$.

3.) Wenn folglich die Anzahl der Glieder ungrade ist, wie in unserm Exempel, so ist das mittelste Glied $d = \frac{a+g}{2}$ = der Helfte der Summe der äussersten Glieder. Wenn man nämlich die Progreßion M wieder vor sich nimmt, so ist es offenbar, daß $c - d = d - e$; Folglich ist $2d = c + e = a + g$ (Nro. 2.). Folglich ist $d = \frac{a+g}{2}$.

4.) Hieraus folgt, daß die Summe aller Glieder in einer jeden arithmetischen Progreßion gleich sey der Summe der äussersten Glieder multiplicirt durch die Helfte der Anzahl der Glieder. Denn wenn die Anzahl der Glieder grade ist, und wenn man alsdenn die Progreßion auf Summen von 2 Gliedern bringt, die von den äussersten Gliedern gleich weit entfernt sind, so werden nur halb so viele Summen als Glieder der Progreßion seyn. Nun ist aber jede Summe der Summe der äussersten Glieder gleich (Nro. 2.); Folglich findet sich in der

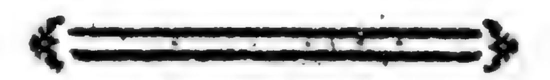
die Helfte der Höhe CB, die diese Zahl ausdrückt, multipliciret, und wenn man diesen nämlichen Cylinder durch die ganze Höhe CB multiplicirt, so bekommt man den Cylinder, der durch das Rectangulum BD beschrieben ist. Hieraus siehet man, daß ein parabolischer Afterkegel nur die Helfte von einem Cylinder sey, der die nämliche Höhe und Grundfläche hat und um demselben beschrieben ist.

---

der Summe der Glieder einer arithmetischen Progreßion die Summe der äussersten Glieder so oft, als die Einheit in der Helfte der Anzahl der Glieder enthalten ist. Folglich muß man, um die Summe dieser Glieder zu haben, die Summe der äussersten Glieder, durch die Helfte der Anzahl der Glieder multipliciren.

Wenn die Anzahl der Glieder ungrade ist, und man annimmt, daß das mittelste Glied weggenommen sey, so wird man die Summe der übrigen Glieder haben, wenn man die Summe der äussersten Glieder durch die Helfte der Anzahl der übrigen Glieder multipliciret. Um also die Summe der Progreßion vollständig zu machen, müßte man das weggenommene Glied wieder hinzusetzen. Dieses ist der Helfte der Summe der äussersten Glieder gleich (Nro. 3.). Es würde folglich die ganze Summe der Progreßion, gleich seyn der Summe der äussersten Glieder multiplirt durch die Helfte der Summe der graden Anzahl der Glieder + der Helfte der Summe, die herauskommt, wenn man das ungrade mittlere Glied zu sich selbst addirt, das heißt, multiplicirt durch die Helfte der Summe aller Glieder.

5.) Wenn man folglich eine wachsende Progreßion annimmt, und ihr erstes Glied = 0 setzet, so ist die Summe der äussersten Glieder dem lezten Gliede gleich und folglich (Nro. 4.) die Summe aller Glieder einer solchen Progreßion gleich dem lezten Gliede oder dem grösten Gliede multipliciret durch die halbe Anzahl der Glieder. W. z. E. W.



Abhandlung
von einigen Methoden den Innhalt der Flächen und der Körper zu finden. (*)

Die Methode der Elemente, deren sich Cavalerius zuerst in der Geometrie bediente, und die vom Wallisius nachher verbessert worden ist (*a*) und die vielleicht eine Gelegenheit zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung gegeben hat, ist nach der Meinung des Abts Deidier (*b*) wenigstens für Personen, die an dem synthetischen Vortrage gewohnt sind, immer sehr zu empfehlen. Die Differential- und Integralrechnung, behauptet dieser Mathematiker, ist zu sehr abstrakt und metaphysisch und läßt, ohngeachtet der Gewißheit des Calculs, einige Dunkelheiten und Zweifel zurück, die allein geometrische Demonstrationen zu zerstreuen im Stande sind. Ich überlasse es andern Männern zu urtheilen, wie weit man dieses sonst grossen Mannes Aus-

(*) Es sey mir erlaubt, hier eine kleine Abhandlung von der Methode der Elemente (Methode des Indivisibles) und der Methode der Erschöpfung (Methode d'Exhaustion) oder der Gränzen (Methode des Limites) für diejenigen beyzufügen, in deren Händen die schönen Institutionen der Geometrie unsers Herrn Verfassers nicht sind. Ich werde die Gedanken des Herrn Abts mit einiger Freyheit gebrauchen, und hier und da vielleicht einiges verändern oder hinzusetzen oder weglassen. Sie soll übrigens im Ganzen seine Arbeit bleiben. Mir wird es ein Vergnügen seyn, wenn diejenigen, die diese Uebersetzung lesen, mir einigermassen für diese Nachricht danken werden. B.

(*a*) Man sehe dessen Opera math. fol. 365. folg. oder dessen Arith infinit. B.

(*b*) Siehe dessen Vorrede zur Abhandlung de la Mesure des Surfaces & des Solides. B.

Ausspruch hierinn beytreten könne. So viel ist gewiß. Die Methode ist leicht. Sie setzt gar keine Geometrie voraus. Sie fordert keine vorhergehende tiefe Betrachtungen. Mögte sie in ihren Grundsätzen auch so sicher seyn!

Wir wollen sie erklären. **Cavallerius** betrachtete alle Körper, als beständen sie aus lauter kleinen gleichen Flächen; Die Flächen aus lauter kleinen gleichen Linien und die Linien aus lauter untheilbaren Punkten. Es machen folglich die Summe der Punkte die Linien, die Summe der Linien die Flächen und die Summe aller Flächen den Innhalt der Körper aus. Man sehe in folgendem Beyspiel den Gebrauch dieser Rechnung. Gesetzt, man wollte beweisen, daß 2 Parallelogramme, die gleiche Grundlinie und Höhe haben, sich dem Innhalte nach gleich wären, so würde man den Beweis auf folgende Art führen (Platte XI. Fig. 1). Man stelle sich diese Flächen vor, als wären sie mit lauter sehr kleinen gleichen Linien, die alle mit ihrer Grundfläche parallel liefen, bedeckt. So wird man dieses sogleich zugestehen müssen, daß die Summe aller dieser Linien, die auf einer Fläche liegen, dem Innhalte nach so groß sey, als die Fläche selbst. Da nun alle diese Linien sich einander gleich sind, so werden nothwendig beyde Flächen sich gleich seyn müssen, wenn in beyden gleich viele Linien enthalten sind. Es sind aber in beyden gleich viele Linien, weil ihre beyderseitige Höhe als gleich angenommen worden ist. Folglich sind die beyden Parallelogramme aus gleich vielen gleichen Theilen zusammengesetzet; Folglich sind sie sich einander dem Innhalte nach gleich.

Auf die nämliche Art beweiset man auch, daß zweene Körper von einerley Art von gleichem Innhalte sind, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben. Man nehme z. E. 2 Pyramiden A und B (Platte XI. Fig. 2.) Wenn man diese in allen Punkten der Höhe parallel mit ihrer Grunfläche durchschnitte, so lehrt die Elementargeometrie, daß dadurch in allen Durchschnitten beyder Pyramiden Flächen entstehen, die

sich einander vollkommen gleich und ähnlich sind. Wegen der gleichen Höhe können nun aus beyden Pyramiden gleich viele Flächen geschnitten werden. Folglich ist bey beyden Pyramiden eine gleiche Anzahl gleicher Flächen. Folglich sind beyde Pyramiden sich gleich.

Man hat gegen diese Beweise mit Recht eingewendet, daß es eine Unmöglichkeit sey, daß Flächen aus Linien ohne alle Breite zusammengesetzet wären und daß Körper entstehen könnten, indem man verschiedene Flächen übereinander setzte. Ihr beweiset vollkommen geometrisch, sagte man zu den Verehrern des **Cavallerius**, daß die correspondirenden Durchschnitte bey beyden Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche sich gleich sind. Wir wollen euch auch dieses einraumen, daß in beyden gleichvieleDurchschnitte sind. Aber können denn Durchschnitte und Flächen jemals eine Höhe oder Dicke ausmachen? Wäre dieses, so müßte man zugestehen, daß ein Körper aus Flächen zusammengesetzet sey, oder man müßte den Flächen eine kleine Dicke geben. Und dieses leztere that **Cavallerius.** Er nahm an, daß sie eine unendlich kleine Dicke hätten. Aber was ist denn eine Fläche die dick ist? Ein wahrer Widerspruch; Anders kann aus einer Zusammensetzung von Flächen nichts als Flächen entstehen.

Nur so kann man sich vorstellen, daß aus Flächen Körper zusammen gesezt werden könnten, indem nämlich Flächen über einander gesetzet würden. Allein es ist unmöglich solchergestalt mehr als 2 Flächen anzuordnen. Man nehme 3 derselben, und setze also eine von diesen dreyen zwischen den zwey andern. Es wird alsdenn diese mittlere die untere von der obern Seite und die obere von der untern Seite berühren. Sie würde folglich aus 2 Flächen zusammen gesezt seyn müssen, die unter sich eine gewisse Entfernung hätten. Solche 2 Flächen machen aber einen wahren Körper aus, wenn man nämlich diese Flächen und ihre Entfernung von einander als ein Ganzes betrachtet. Man hat folglich eine Unmöglichkeit angenommen,

men, wenn man fordert, eine Fläche unmittelbar zwischen zwo andern zu setzen. Kann man also nicht 3 Flächen unmittelbar übereinander setzen, so wird man niemals daraus einen Körper heraus bringen können, welcher nach dem Vorgeben der **Indivisibilisten** nichts anders als ein Haufen unmittelbar über einander gesetzter Flächen ist. So sehr die Anhänger des **Cavallerius** diese und andere absurde Folgen aus ihrer Annahme einsehen, so wenig verwerfen sie den Satz selbst. Ihr möget, sagen sie, statt der Flächendurchschnitte kleine Körperchen von unendlich kleiner Dicke annehmen, so werdet ihr vollkommen befriediget seyn. Denn aus Körpern können doch gewiß Körper zusammen gesetzet werden.

Nach dieser Antwort scheinet es, daß man die Vertheidiger der **Methode des Untheilbaren** nicht weiter beunruhiget habe, und daß ihre Principien das Ansehen der höchsten Axiomen erhalten haben. Dieses Ansehen ist noch dadurch bestärket worden, weil diese Methode auf Folgerungen führt, die nach aller Strenge durch unwidersprechliche Gründe als wahr bewiesen sind. Solte ein so richtiges Verhältniß das Produkt eines falschen Grundsatzes seyn?

Man nehme noch einmal die vorige Demonstration der **Indivisibilisten** von der Gleichheit zwoer Pyramiden vor:

Pyramiden, die eine gleiche Grundfläche und Höhe haben, haben eine gleiche Anzahl von Durchschnitten —— Das geben wir zu. —— Es ist geometrisch bewiesen, daß die beyden Durchschnitte sich gleich sind. —— Richtig. —— Allein die Pyramiden sind aus diesen Flächen zusammen gesezt. —— Man erkläre sich darüber. Sind diese Durchschnitte nichts als Flächen? Die Vertheidiger dieser Methode haben die Unmöglichkeit davon gesehen. Es müssen also Körperchen seyn, woraus diese Pyramiden zusammen gesetzet sind. Es ist also noch zu beweisen, daß diese Schnittchen in beyden Pyramiden sich einander gleich sind. Dieses setzen die **Indivisibilisten** voraus. Ihre Demonstration ist also eine **Petitio Principii.**

Sie beweisen würklich recht streng, daß die Bases, zwischen welchen diese kleinen elementarischen Durchschnitte oder kleinen correspondirenden abgekürzten Pyramiden liegen, sich gleich sind. Allein dieses heißt die Frage verändern. Ich fordre, daß man uns die Gleichheit der Körper beweise und man demonstrirt bloß die Gleichkeit der Flächen. Welch ein Paralogismus!

Ich gebe es immerhin zu, daß diese kleine correspondirenden elementarischen Körperchen eine unendlich kleine Dicke haben. Allein man beweise mir doch, daß ein jeder von diesen unendlich kleinen Abschnitten dem körperlichen Innhalte nach seinen correspondirenden Abschnitten gleich sey. Denn das ist es eigentlich, was wir wissen wollen.

Hieraus wird man erkennen, weswegen die Methode der Elemente auf Wahrheiten führt, die sonst als richtig bewiesen sind. Es ist freylich sehr leicht, dasjenige als wahr zu beweisen, was man schon als wahr voraus setzt.

Die Herren, die sich dieser Methode bedienen, fallen folglich in eine Petitio Principii oder Paralogismus. Nähmen sie nämlich an, daß die kleinen correspondirenden elementarischen Abschnitte dem körperlichen Innhalte nach sich gleich sind, so ist dieses offenbar das, was man erst suchen will. Beweiset man aber die Gleichheit der Flächen, die diese Durchschnitte oben und unten begränzen und folgert daraus die Gleichheit dieser kleinen Körperchen, so ist dieses ein unverzeylicher Fehlschluß.

Endlich füge ich hier noch eine Demonstration bey, die so streng ist, als eine in der Geometrie seyn kann. Vermöge derselben wird man finden, daß, wenn die Gründe der Indivisibilisten richtig sind, z. E. 2 viereckigte Pyramiden, die gleiche Quadrate zu Grundflächen und gleiche Höhen haben, und wovon die eine grade, die andere schief stehet, dem Flächen innhalte nach sich gleich sind. Ein Beweis der auf Kegeln

Pris-

Prismaten, Parallelepipiden und Cylindern anzuwenden ist. Der Beweis selbst ist dieser: (Tab. XI. Fig. 2.)

Da man in den beyden Pyramiden EK und EP nach dem Geständnisse der Indivisibilisten gleich viele Durchschnitte, die mit der Grundfläche parallel laufen, machen kann, und da ein jeder Durchschnitt *s* der einen, einem jeden correspondirenden Durchschnitt *p* der andern Pyramide gleich und ähnlich ist, (nach der Elementargeometrie), und da endlich die Basis K und P vermöge der Bedingung gleiche Quadrate sind, so sind auch diese kleinern Durchschnitte gleiche Quadrate. Dieses gilt aber von allen correspondirenden Durchschnitten, die man in dem Zwischenraume zwischen den Parallellinien EC und LD machen kann. Folglich ist auch der äussern Einfassung dieser Quadrate sich gleich, und da man in beyden Pyramiden gleich viele solcher Einfassungen hat, so wird die Summe von diesen Perimetern von der einen Pyramide so groß seyn, als die Summe der Perimeter von der andern Pyramide. Eine jede von diesen Summen von Perimetern bedeckt die ganze Oberfläche ihrer Pyramide. Da man folglich, nach der Meinung der Indivisibilisten, den Innhalt der Flächen durch die Linien nnden kann, die sie bedecken, so müssen auch diese pyramidalischen Flächen nothwendig sich gleich seyn.

Und doch ist es allen Geometern bekannt und gar leicht zu beweisen, daß die Oberfläche der schiefen Pyramide P grösser ist als die Oberfläche der graden Pyramide K, wenn sie beyde gleiche Grundfläche und Höhe haben.

Wenn die Indivisibilisten aufrichtig handeln wollen, so müssen sie diese Demonstration für entscheidend erkennen oder wenigstens dieses zugestehen, daß ihre Art zu beweisen so beschaffen sey, daß man dadurch zu gewaltigen Fehlschlüssen geführt werde. Dieses ist aber ein gewaltiges Aergerniß in der Geometrie. Diese Herren werden also sehr gebeten,

ent-

entweder herzhaft ihre Methode zu verdammen oder uns zu sagen, durch welche neue Stützen sie dieselben bevestigen wollen.

Vielleicht mögte man hier den Einwurf machen, daß hierdurch die Differential- und Integralrechnung untergraben würde. Allein ich bitte diejenigen, die die Versuchung haben, diesen Einwurf zu machen, daß sie so gütig seyn, sich auf eine klare und verständliche Weise darüber zu erklären, und ich verspreche ihnen, ihre Gründe mit aller der Behutsamkeit zu untersuchen, die die Wichtigkeit der Sache erfordert. Denn es ist unmöglich, auf Zweifel zu antworten, die man nicht kennet. Die wahren Fundamente der Differentialrechnung habe ich jederzeit so unabhänglich von der Methode des Untheilbaren gefunden, daß mir die Meinung dererjenigen, die hier eine vollkommene Gleichheit zu finden glauben, gänzlich unbegreiflich ist.

Wäre es inzwischen nöthig, in Untersuchungen, in welchen man sein eigenes Licht seyn soll, sich auf Autorität zu berufen, so bitte ich doch auf die Worte des neuen Archimedes des unvergleichlichen Newtons Acht zu haben. Seine Worte sind folgende: (a) *Contractiores —— redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium, sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis & propterea methodus illa minus geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes primasque nascentium, id est, ad limites summarum rationum deducere —— Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineas curvas, nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia, non summas & ra-*

(a) Man lese den ersten Abschnitt im ersten Buche seiner Principien in der Anmerkung zum *IIten* Lehrsatz.

rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi ——. Die ganze Stelle des grossen Newtons ist sehr präcis.

Noch weiter gehet Herr D'Alembert, der ein Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris ist, in seinem schätzbaren Werke von der Dynamik: Die Methode des Unendlich kleinen, sagt er, hat eine Unschicklichkeit, daß nämlich Anfänger, die nicht allemal das wahre Wesen und den wahren Geist derselben begreifen, sich angewöhnen können, diese unendlich kleinen Theile als Realitäten anzusehen. Es ist dieses ein Irrthum, gegen welchen man um desto mehr auf seiner Huth seyn muß, da grosse Männer in demselben verfallen sind, und da er zu verschiedenen übelgerathenen Werken wider die Gewißheit der Geometrie Gelegenheit gegeben hat. Die Methode des Unendlich kleinen ist die Methode der ersten und letzten Verhältniß, das heißt, das Verhältnisse der Grössen, die wachsen und verschwinden (*a*).

Nur deswegen führe ich diese ehrwürdigen Zeugen an, um Leute, die gerne Lust hätten, sich in einen Streit einzulassen, ein wenig zurückhaltender zu machen; Diese Methode des Untheilbaren kann für diejenigen Gelehrten noch immer von Nutzen seyn, die immer begieriger zu schwatzen als geneigt sind zu lernen, die sich gerne mit Wissenschaften amusiren mögten, ohne daß eine aneinander hängende Bemühung in denselben ihnen ein Recht darzu gegeben hat.

Ich gehe itzt zur Methode der Erschöpfung der Alten fort. Von deren Benennung wir bald den Grund einsehen werden. Wir setzen folgende in der Elementargeometrie schon bewiesene Wahrheiten voraus, daß 2 dreyeckigte Prismata

(*a*) Traité de Dynamique pag. 36.

mata die beyderseits grade stehen, oder auf eine gleiche Art geneigt sind, und gleiche Grundflächen und Höhen haben, sich vollkommen dem körperlichen Innhalte nach gleich sind. Und was sollte für ein Unterschied zwischen denselben seyn, da sie beyde durch gleiche Dimensionen auf die nämliche Art determinirt sind. (*a*) Es gilt eben dieses auch von Parallelepipiden und andern vieleckigten Prismaten und Cylindern. In der ausführlichen Beweisung davon können wir uns hier unmöglich einlassen. Hier ist die ganze Erklärung dieser schönen Methode. Man lese zuvörderst noch einmal den §. 68. 69. Die Wahrheiten in denselben sind vom Newton, der einen so grossen Geschmack an der Methode der Alten fand, als Lehnsätze angegeben worden. Die Sätze sind leicht und werden uns zur bessern Einsicht in das folgende ungemein vorbereiten.

Nun wollen wir diese Methode bey Körpern zeigen. Man nehme eine dreyeckigte Pyramide und beschreibe in derselben eine grosse Anzahl dreyeckigter Prismaten. Es wird alsdenn endlich die Summe derselben mit der Pyramide selbst eins werden, oder der ganze körperliche Innhalt dieser Prismaten, die in der Pyramide beschrieben sind, wird von der Pyramide selbst nicht unterschieden seyn. Der Beweis ist dieser: Nehmet an, daß die Höhe *af* der Pyramide *af*KL (Tab. XI. Fig. 3.) durch Flächen die mit der Basis *f*KL parallel lauffen, in eine sehr grosse Anzahl gleicher Theile getheilet worden sey. (Wir wollen, um alle Verwirrung zu vermeiden, nur 4 solcher Eintheilungen machen); Setzet ferner, man habe in der Pyramide die dreyeckigten Prismate *hc*, *od*, *rf* gezeichnet, und durch die Verlängerung ihrer Oberflächen die äussern dreyeckigten Prismate *sf*, *pd*, *mc* so beschrieben, daß sie mit den innern einerley Grundflächen und Höhe haben. Füget hierzu noch, das äussere Prisma *gb*, welches auch von der nämlichen Grundfläche und Höhe mit den übrigen ist.

Es

(*a*) Man sehe des Herrn Karstens Lehrbegrif der Mathematik, *I* Theil. Imgleichen des Herrn von Segners *Curs. Math. P. I.* B.

Es ist alsdenn evident, daß der Unterschied zwischen den von innen und von aussen verzeichneten Prismaten die Summe der Körperchen gb, mt, px und sy sey. Es ist aber diese Summe dem äussern Prisma sf gleich. Denn Prismate, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind sich nach der vorhin gemachten Anmerkung gleich. Folglich ist $gb = hc$ und also $gb + mt = hc + mt =$ dem ganzen Prisma mc. Es ist ferner $mc = od$ wegen gleichen Grundflächen und Höhen. Folglich ist $mc + px = od + px = pd$. Nun ist $pd = rf$. Folglich $pd + sy = rf + sy =$ dem ganzen Prisma sf. Folglich ist der Unterschied zwischen den von aussen und von innen verzeichneten Prismaten $=$ dem einzigen von aussen beschriebenen Prisma sf. Theilet man nun die Höhe af in eine recht grosse Anzahl von Theilen, so kann das Prisma sf kleiner werden als jede angebliche Grösse und folglich wird in diesem Fall der Unterschied zwischen den ausserhalb und innerhalb der Pyramide verzeichneten Prismaten nicht anzugeben seyn. Diese beyde Arten von Prismaten können sich aber in Ansehung der Gleichheit der Pyramide, die die Gränze von beyden ist, immer nähern. Setzet man demnach die Theilung sehr weit fort, so nähert sich die Summe der in der Pyramide verzeichneten Prismaten der Pyramide so sehr, daß deren Unterschied verschwindet. Folglich ist die Summe der in der Pyramide verzeichneten Prismaten $=$ der Pyramide, oder wenn man will, sie differirt von derselben um eine Grösse, die nicht zu bestimmen ist.

Diesen Satz muß man wohl einsehen. Es ist der ganze Grund der Methode der Alten darinn entdecket. Sie bestehet, wie man siehet, in diesem besondern Falle darinn, daß man eine so grosse Anzahl von Prismaten um die Pyramide oder in derselben verzeichnet, daß die Beschreibung von aussen und von innen gleichsam erschöpft sey. Daher hat diese Methode den Namen der Erschöpfung bekommen. Es liesse sich füglich zeigen, daß die Differential- und Integralrechnung bis auf diese Methode zurück gehe.

Wenn

Wenn man nun etwas über die **Methode der Erschöpfung** der Alten reflectirt, so wird man finden, wie geschickt sie sey, nicht bloß den Verstand aufzuklären, sondern zu einer vollkommenen Ueberzeugung zu führen; Sie ist hierinn gar sehr von der **Methode der Elemente** verschieden, die immer in dem Verstande eine gewisse Unruhe unterläßt, die ohne Aufhören diejenigen plaget, die das Licht suchen und nicht finden: denn die **Indivisibilisten** beweisen die Gleichheit der Flächen, und folgern daraus unmittelbar eine Gleichheit des körperlichen Innhalts zwischen den Körperchen, die diese Flächen haben; Grade als wenn 2 Körper nicht gleiche Flächen haben könnten, ohne dem körperlichen Innhalte nach sich gleich zu seyn. Und wenn sie es auch allemal wären, so fehlte doch noch immer der Beweis. Nach der **Methode der Erschöpfung** hingegen schließt man, daß Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche sich gleich sind, weil sie aus einer gleichen Anzahl von Körperchen zusammen gesetzet sind, deren Gleichheit aufs strengste bewiesen ist. Und wenn man auch annimmt, daß die Summen dieser Körperchen nicht vollkommen einerley mit der Pyramide ist, so ist wenigstens dieses nach aller Strenge bewiesen, daß der Unterschied zwischen ihnen nicht anzugeben ist.

Es bestehet folglich, wie wir gesehen haben, die Methode der Erschöpfung darinn, daß man zeige, daß 2 oder mehrere Grössen sich gleich sind, wenn man zwischen ihnen keinen Unterschied anzugeben im Stande ist. Ja! wenn man auch diesen Unterschied von einer erstaunlichen Kleine annimmt, so kann er doch diesen Grössen selbst nicht zukommen, denn man kann immer beweisen, daß sie sich einander näher kommen, als daß diese angegebene Differenz statt haben könne. Kann man aber zwischen Grössen keine Differenz angeben und begreift man über diß daß die etwa angezeigte Differenz unendlich verringert werden könne, so daß sie nicht nur nicht mehr sinnlich wird, sondern auch nicht einmal im Verstande denkbar ist, so muß man gewiß eingestehen, daß diese Grössen sich gleich

gleich sind, weil ungleiche Grössen nothwendig eine Differenz haben, die man angeben kann. (*a*) ——.

Hier hat man das Wesentliche der beyden Methoden. Man vergleiche und urtheile nach Belieben; Doch daß nur Wahrheit immer den Sieg davon trage! So viel ich urtheilen kann, wird diese hier eingerückte Abhandlung, ohngeachtet sie etwas lang geworden ist, selbst solchen Personen nicht mißfällig seyn die auch schon im Differential- und Integralcalcul sich etwas geübet haben. Man kann öfters eine Wissenschaft erlernet haben, ohne daß man bis auf die wahren Gründe zurück gegangen wäre. Sollte alsdenn nicht dieses Ausgeführte vielleicht zu eigenem Nachdenken Gelegenheit geben? B.

§. 73.

Der vierzehnte Hauptsatz. Der vierte Theil des Parameters t eines Diameters MD (Fig. 10.) ist so groß, als der 4te Theil des Parameters p der Axe + der Abscisse AP, die durch die Ordinate MP, welche man durch den Anfangspunkt M dieses Diameters gezogen hat, bestimmt wird. Das heißt $\frac{t}{4} = x + \frac{p}{4}$.

Beweis. Ziehet durch den Anfangspunkt des Diameters MD die Tangente MT; und durch den Scheitelpunkt A der Parabel die Linie AQ mit MT parallel. Die Linie AQ wird alsdenn eine Ordinate des Diameters MD seyn. Bemerket, daß $AQ = MT$ und $MQ = AT$ (constr.) $= AP = x$; $PT = 2x$ (§. 29.); $\overline{PT}^2 = 4xx$; $\overline{PM}^2 = px$ sey.

(*a*) Schon Euclides und Archimedes nahmen solche Grössen für gleiche an. Man lese weiter hierüber nach des berühmten Geometers Herrn Kästners Anfangsgründe I Theil 22. 24. und 41ten Satz der Geometrie nebst ihren Zusätzen. B.

sey. (§ 20.) Nun ist $\overline{AQ}^2 = MQ \times t$ (§. 52.); Folglich ist $t = \frac{\overline{AQ}^2}{MQ} = \frac{\overline{MT}^2}{AT}$. Es ist aber wegen des rechtwinklichten Triangels MPT, $\overline{MT}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{PM}^2$. Folglich ist $t = \frac{\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2}{AP} = \frac{4xx + px}{x} = 4x + p$. Folglich $\frac{t}{4} = x + \frac{p}{4}$.

§. 74.

Zusatz. Weil $t = 4x + p$ ist, so folgt daraus, daß $p < t$, das heißt, daß der Parameter der Axe die kleinste von allen Parametern sey.

§. 75.

Fünfzehnter Hauptsatz. Wenn man an der Spitze M eines Diameters MI (Fig. 19.) eine Tangente MT ziehet und wenn man dem Winkel TMF die Grösse des Winkels TMO gibt, welcher von dieser Tangente mit dem verlängerten Diameter MI gemacht wird, so wird die Linie MF mit der Axe in einem Punkt F so zusammen stossen, daß MF dem vierten Theil des Parameters dieses Diameters gleich ist; das heißt, daß $MF = \frac{t}{4}$ oder $= x + \frac{p}{4}$ (§. 73.)

Beweis. Machet MO = MF und ziehet die Linie FO, so ist es klar, daß FO, MT perpendiculair durchschneide. Denn wenn man die beyden Triangel MyF und MxO mit einander vergleichet, so ist der Winkel MFO = MOF und TMF = TMO (constr.); Folglich ist der Winkel $x = y$. Folglich durchschneidet FO die Linie MT perpendiculair. Wenn man nun aus dem Punkt M die Linie ML perpendiculair auf MT aufrichtet, so ist die Figur OFLM ein Parallelogramm; Folglich ist MO = FL. Nun ist vermöge der Construction MO = MF. Folglich ist MF = FL; Folglich FP = FL — PL = MF — PL. Es

ist

ist aber die Subnormallinie $PL = \frac{p}{2}$ (§. 31); Folglich FP $= MF - \frac{p}{2}$; Folglich ist $\overline{FP}^2 = \overline{MF}^2 - (p \times MF) + \frac{pp}{4}$. Es ist aber wegen des rechtwinklichten Triangels FPM, $\overline{MF}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2$ (S). Setzet man dahero in der Gleichung S, $\overline{MF}^2 - (p \times MF) + \frac{pp}{4}$ für $\overline{FP}^2$ und px für $\overline{PM}^2$, so ist $\overline{MF}^2 = \overline{MF}^2 - (p \times MF) + \frac{pp}{4} + px$. Nimmt man daher $\overline{MF}^2$ aus dieser Gleichung auf beyden Seiten weg, und bringt $-(p \times MF)$ auf die andere Seite, so ist $(p \times MF) = px + \frac{pp}{4}$; Und wenn man mit p dividirt, so ist $MF = x + \frac{p}{4} = \frac{t}{4}$ (§. 73). W. z. E. W.

§. 76.

Erster Zusatz. Hieraus folgt, daß die Linie MF mit der Axe in einem Punkte F unterhalb dem Scheitelpunkt A zusammen treffe. Denn weil die Linien TL und OM parallel sind, so ist der Winkel FTM = TMO; Es ist aber vermöge der Construction TMO = TMF. Folglich FTM = TMF. Folglich ist TF = FM: Nun ist $FM = x + \frac{p}{4}$ (§. 75) Folglich ist $FT = x + \frac{p}{4}$. Allein TA ist $= x$, denn TA ist der Abscisse AP gleich (§. 29). Folglich ist $TF > TA$; Folglich fällt der Punkt F unter A.

§. 77.

Zweyter Zusatz. Wenn man ferner von dem Punkt O die Perpendiculairlinie OK auf die Axe ziehet, so wird der Punkt K oberhalb dem Scheitelpunkt A fallen. Weil nämlich die Figur OMPK ein Parallelogramm ist, so ist $PK = MO = MF$ (constr.) $= x + \frac{p}{4}$ (§. 75). Folglich ist $PK = x + \frac{p}{4}$. Es ist aber $PA = x$. Folglich ist $PK > PA$, das heißt, der Punkt K fällt oberhalb dem Scheitelpunkt A.

§. 78.

Sechszehnter Hauptsatz. Die Entfernung sowohl von dem Punkt F als dem Punkt K bis an den Scheitelpunkt A ist dem vierten Theile des Parameters der Axe gleich; das heißt, AF oder $AK = \frac{p}{4}$.

Beweis. 1.) Nach dem fünfzehnten Hauptsatze ist $x + \frac{p}{4} = MF = TF$ (constr.) $= TA + AF = AP + AF$ (§. 29.) $= x + AF$; Folglich ist $x + \frac{p}{4} = x + AF$; Folglich ist $AF = \frac{p}{4}$.

2.) $x + \frac{p}{4} = MF = MO$ (constr.) $= PK = PA + AK = x + AK$. Folglich ist $x + \frac{p}{4} = x + AK$. Folglich $AK = \frac{p}{4}$. W. z. E. W.

§. 79.

Erster Zusatz. Folglich ist, $AF = AK$. 2.) $FK = AF + AK = \frac{p}{4} + \frac{p}{4}$ (§. 78) $= \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$, das heißt, FK ist der Helfte des Parameters der Axe gleich.

§. 80.

Zweyter Zusatz. Da man den Diameter MI nach Belieben angenommen hat, so ist es klar, daß wenn man durch einen Punkt M einer Parabel, einen Diameter MI und eine Tangente MT ziehet, und wenn man den Winkel TMF die Grösse des Winkels TMO gibt, der durch die Tangente und den verlängerten Diameter gemacht wird, daß alsdenn die Linie MF immer in dem nämlichen Punkte F mit der Axe zusammen stossen werde. Denn man wird in allen Fällen finden, daß die Entfernung AF dieses Punkts von dem Scheitelpunkte der Parabel dem vierten Theil des Parameters der Axe gleich sey (§. 78). Es ist aber dieser Parameter eine beständige Grösse.

§. 81.

Siebenzehnter Hauptsatz. Es sey die Construction so, wie im fünfzehnten Hauptsatze angegeben worden ist; Alsdenn behaupte ich, daß der Punkt F ein Brennpunkt oder Focus oder Umbilicus sey, das heißt, daß die Lichtstrahlen, welche auf die hohle Seite der Parabel mit der Axe parallel fallen, alle nach dem Punkt F reflectirt werden.

Beweis. Denn es ist der Einfallswinkel $IMq = TMO$, der durch den Diameter und die Tangente gemacht wird. Nun ist aber $TMO = TMF$ (constr.); Folglich ist $TMF = IMq$; das heißt, der Lichtstrahl IM wird nach der Linie MF reflectirt werden, weil der Winkel IMq, den der Lichtstrahl im Einfallen mit der Linie TMq macht, beständig dem Winkel gleich ist, den dieser nämliche Lichtstrahl im Zurückprallen mit derselbigen Linie macht, (nach den Grundsätzen der Catoptrik). Folglich werden die Lichtstrahlen, die mit der Axe parallel einfallen, beständig so reflectirt werden, daß der Zurückprallungswinkel TMF dem Winkel TMO gleich sey, der durch den Diameter und die Tangente, die an den Einfallspunkt M gezogen ist. Wenn aber dieses geschiehet, so hat die reflectirte Linie MF immer eine solche Richtung, daß sie sich mit der Axe in dem nämlichen Punkt F vereinige. Folglich ist der Punkt F ein Brennpunkt.

§. 82.

Eben so werden umgekehrt die Lichtstrahlen FM, welche aus dem Brennpunkte F auslaufen und auf die hohle Seite der Parabel in einen Punkt M fallen, alle nach der Linie OMI reflectirt werden, die mit der Axe dieser krummen Linie parallel ist.

Beweis. Wenn man aus dem Punkt M die Tangente MT und die Ordinate der Axe MP ziehet, so ist es leicht zu erkennen, daß $FT = AT + AF = AP + AF =$

$x + \frac{p}{4}$ seyn (§. 78). Nun ist aber MF $= x + \frac{p}{4}$ (§. 75); Folglich ist FT = MF; Folglich ist der Winkel FTM = FMT. Allein es ist der Einfallswinkel FMT = dem Reflexionswinkel IMq (nach Catopr. Gründen) = OMT als seinem Vertikalwinkel; Folglich ist der Winkel FTM = OMT; das heißt, die Wechselwinkel sind sich gleich. Folglich ist die Linie OMI, nach welcher der Lichtstrahl FM reflectirt wird, mit der Axe AB oder TAB parallel. W. z. E. W.

Dieser Satz ist in der Catoptrik von sehr ansehnlichem und grossem Nutzen. (Fig. 19).

§. 83.

Aufgabe. In einer gegebenen Parabel den Brennpunkt zu finden (Fig. 19).

Auflösung. Suchet die Axe AB und den Parameter dieser Axe (§. 27. 44). Traget den vierten Theil dieses Parameters von dem Scheitelpunkt dieser krummen Linie bis an den Punkt F auf der Axe, so wird dieser Punkt F der Brennpunkt dieser krummen Linie seyn. (§. 78. 81).

§. 84.

Erster Zusatz. Wenn man folglich die Axe als einen Diameter betrachtet, so siehet man daß der Parameter eines jeden Diameters jederzeit 4 mal so groß ist, als die Entfernung des Scheitelpunkts dieses Diameters vom Brennpunkt. Wir haben dieses 1.) den Augenblick in Ansehung der Axe bewiesen (6ter und 17ter Hauptsatz) 2.) das nämliche ist im 15ten Hauptsatze in Absicht auf jeden Diameter bewiesen werden.

§. 85.

Folglich wird man den Parameter eines jeden Diameters erhalten, wenn der Brennpunkt einer Parabel und der Schei-

tel.

telpunkt, derselben gegeben ist, wenn man die Entfernung des Brennpunkts von dem Anfangspunkte dieses Diameters vier mal nimmt.

§. 86.

Aufgabe. Wenn der Brennpunkt F und die Axe der Parabel gegeben sind, eine Tangente an irgend einen Punkt M der krummen Linie zu ziehen.

Auflösung. Nehmet mit einem ordentlichen Zirkel die Entfernung FM. Traget diese auf die Axe von F in T und ziehet TM. Dieses wird die gesuchte Tangente seyn.

Beweis. Ziehet die Ordinate MP, um die Absciße $AP = x$ zu bekommen. Man hat im §. 75. bewiesen, daß $MF = x + \frac{p}{4}$ sey. Nun ist aber $MF = TF$ (constr.); Folglich ist $TF = x + \frac{p}{4}$ und $FP = AP - AF = x - \frac{p}{4}$ (§. 78); Folglich ist $FP + TF$, das heißt, $PT = x + \frac{p}{4} + x - \frac{p}{4} = 2x$. Dieses zeiget an, daß PT das Duplum der Absciße AP sey; Folglich ist TM eine Tangente (§. 30).

Diese Art, eine Tangente zu ziehen, ist die leichteste unter allen, wenn man nämlich den Brennpunkt und die Axe der krummen Linie hat.

§. 87.

Wenn umgekehrt MT eine Tangente ist, und wenn man durch den Berührungspunkt M eine Linie MF nach dem Brennpunkt ziehet, so ist diese Linie $MF = FT$ als der Entfernung des Brennpunkts von dem Punkt T, wo die Tangente die Axe berührt. Denn wenn man die Ordinate MP ziehet, so ist $AP = AT = x$ (§. 29); Folglich ist $AT + AF$, das heißt, $FT = x + \frac{p}{4}$. Es ist aber $MF = x + \frac{p}{4}$ (§. 75); Folglich ist $MF = MT$.

* §. 88.

Man ziehet aus der Auflösung dieser Aufgabe und aus dem §. 29. einen Satz, wovon Newton in seinen Principiis Gebrauch macht. Wir wollen ihn hersetzen, wenn wir vorher einige nöthige Wörter erklärt haben (Fig. 20).

Wenn ein Körper *m* oder M sich in einer Parabel oder irgend einem andern Kegelschnitte beweget, so heissen die Linien F*m* und FM, die aus dem Brennpunkt der krummen Linie auf den Punkt M oder *m*, worinn sich der bewegte Körper befindet, gezogen werden, Träger, lateinisch *Vectores* (Rayons Vecteurs), weil dieser Radius gewissermassen den bewegten Körper trägt. Dieses setzen wir voraus.

* §. 89.

Wenn man aus den Punkten M oder *m*, in welchen sich der bewegte Körper befindet, die Tangenten MT und *mt* ziehet, und wenn man aus dem Brennpunkt F die Perpendicularlinie FR und F*r* auf die Tangenten fallen lässet, so verhalten sich diese Perpendicularlinien unter einander wie die Quadratwurzeln der Träger (Rayons Vecteurs) FM und F*m*; die aus den Berührungspunkten M und *m* gezogen sind: das heißt, es verhält sich $FR : Fr = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$.

Beweis. Weil MT eine Tangente ist, so ist $MF = FT$ (§. 87); Folglich fällt die Perpendiculairlinie FR auf die Mitte R der Linie MT (*). Wenn man folglich aus dem Scheitelpunkt A die Perpendiculairlinie ziehet, so wird sie durch den Punkt R gehen; Denn wenn man die Ordinate MP zeichnet, so verhält sich $TA : AP = TR : RM$. Nun ist

(*) Der Beweis ist nicht schwer. Da FR eine Perpendiculairlinie ist, so sind bey R rechte Winkel, und da in einem gleichwinklichten Triangel die Winkel an der Grundlinie sich gleich sind, so ist der Winkel bey T dem Winkel bey M gleich, weil $FM = FT$. Folglich sind die ganzen Triangel sich gleich. Folglich ist $FR = RM$. Folglich R die Mitte derselben. B.

ist aber AT = AP (§. 29). Folglich TR = RM; Folglich gehet die Perpendiculairlinie von dem Scheitelpunkt A durch die Mitte R der Tangente MT. Eben so kann man auch beweisen, daß Fr auf die Mitte r der Linie mt stosse, und daß AR durch den Punkt r gehe.

Betrachtet itzund den rechtwinklichten Triangel FRT. In welchem man aus dem rechten Winkel die Perpendiculairlinie RA gezogen hat, so verhält sich FT : FR = FR : FA (*); Folglich ist $\overline{FR}^2 = FT \times FA$. Es ist aber FT = FM (§ 87); Folglich ist $\overline{FR}^2 = FM \times FA$. Eben so verhält sich in dem bey r rechtwinklichten Triangel Frt, Ft : Fr = Fr : FA; Folglich ist $\overline{Fr}^2 = Ft \times FA$. Nun ist aber F$t$ = Fm (§. 87). Folglich ist $\overline{Fr}^2 = Fm \times FA$, und deswegen verhält sich $\overline{FR}^2 : Fr = FM \times FA : Fm \times FA = FM : Fm$. Wenn man folglich die Quadratwurzel ausziehet, so verhält sich FR : Fr = $\sqrt{FM}$: $\sqrt{Fm}$. W. z. E. W.

§. 90.

Vierter Zusatz. Wenn man AK = AF = $\frac{p}{4}$ macht (Fig. 19), und wenn man alsdenn aus dem Punkt K die Perpendiculairlinie KS, die die Directrix heißt, aufrichtet und diese nach Belieben von beyden Seiten verlängert, so wird ein jeder Punkt in der parabolischen Linie so weit von dieser Linie als vom Brennpunkte entfernt seyn, das heißt, wenn man von irgend einem Punkt M auf KS eine Perpendiculairlinie

(*) Denn die beyden Triangel FTR und FAR sind sich ähnlich, weil der Winkel bey F zu beyden gehöret, und der Winkel TRF = RAF als rechte Winkel (constr.). Folglich ist auch der Winkel RTF = ARF. Folglich verhalten sich die gleichnahmigten Seiten auf einerley Art zu einander; Folglich verhält sich auch FT : FR = FR : FA. B.

MO aufrichtet, so ist jederzeit MO $=$ PK $=$ PA $+$ AK $=$ $x + \frac{p}{4}$ (constr.) $=$ MF (§. 75.); Folglich MO $=$ MF.

§. 91.

Deswegen wird die unbestimmte Linie KS von den Geometern die Directrix genennet, weil sie vermöge ihrer Eigenschaften uns in der Construction der Parabel, wie wir sogleich sehen werden, dirigiren kann.

§. 92.

Fünfter Zusatz. Die Ordinate FN aus dem Brennpunkte gezogen, ist der Helfte des Parameters der Axe gleich; das heißt, FN $= \frac{p}{2}$. Denn wir haben so eben gesehen (§. 90.) daß FN $=$ NG. Nun ist NG $=$ FK (constr.) $= \frac{p}{2}$. (§. 79). Folglich ist FN $= \frac{p}{2}$.

§. 93.

Sechster Zusatz Verlängert man daher NF bis an den andern Arm der Parabel, so bekommt man die doppelte Ordinate, die durch den Brennpunkt gezogen ist. Diese ist so groß als der Parameter der Axe.

§. 94.

Siebender Zusatz. Die Perpendiculairlinie Ax die auf dem Anfangspunkt der Axe aufgerichtet ist, ist eine Tangente der Parabel oder sie berührt diese krumme Linie nur in einem Punkt.

Denn wenn sie dieselbe in irgend einem andern Punkt d berührte und man zöge dg perpendiculair auf die Directrix KS, und alsdenn die Linie dF nach dem Brennpunkte, so wäre Fd $=$ dg (§. 90) $=$ AK (constr.) $=$ AF (§. 79); Folglich wäre Fd $=$ AF. Dieses ist aber unmöglich. Denn es

es kann keine Hypothenuse Fd eines rechtwinklichten Triangels FAd einer andern Seite desselben AF gleich seyn. Folglich....

§. 95.

Aufgabe. Mit dem gegebenen Parameter FB $= p$ eine Parabel zu construiren, indem man sich dazu der Directrix bedienet (Fig. 19).

Auflösung. Nehmet nach Belieben eine Linie AB für die Axe der zu construirenden Parabel an, deren Anfang in A sey. Traget darauf auf die Axe den vierten Theil des Parameters oder $\frac{p}{4}$ von A in F und in K. Nehmet F für den Brennpunkt der krummen Linie an (§. 83.) und ziehet aus K die Linie KS von beliebiger Länge. Diese wird die Directrix seyn: (§. 90. 91). Nehmet auf dieser Directrix einen Punkt O an. Richtet auf demselben eine Perpendiculairlinie OI auf. Ziehet von diesem nämlichen Punkte nach dem Brennpunkt F die Linie OF und machet den Winkel OFM $=$ FOM. Nun behaupte ich, daß der Punkt M, in welchem FM die Perpendiculairlinie OI durchschneidet, in einer Parabel seyn werde, deren Parameter FB, der Brennpunkt F und die Directrix KS seyn wird. Man darf also nur noch die übrigen Punkte auf der Directrix nehmen, und in Ansehung derselben die nämliche Construction machen, die so eben in Ansehung des Punkts O gemacht worden ist, so wird man auf diese Art, so viele Punkte der krummen Linie bekommen als man will.

Beweis. Man lasse aus dem Punkt M die Perpendiculairlinie MP $= y$ auf die Axe AB fallen, und setze AP $= x$. Es ist MF $=$ MO wegen des gleichschenklichten Triangels FMO (constr.). Nun ist MO $=$ PK $=$ AP $+$ AK $= x + \frac{p}{4}$ (constr); Folglich ist MF $= x + \frac{p}{4}$. Folglich $\overline{MF}^2 = xx + \frac{px}{2} + \frac{pp}{16}$; und PF $=$ AP $-$ AF $= x - \frac{p}{4}$; Folglich ist $\overline{PF}^2 = xx - \frac{px}{2} + \frac{pp}{16}$; Es ist aber des recht-

rechtwinklichten Triangels FPM wegen $\overline{MF}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{MP}^2$, das heißt, wenn man die analytischen Werthe setzt, $xx + \frac{px}{2} + \frac{pp}{16} = xx - \frac{px}{2} + \frac{pp}{16} + yy$; Wenn man folglich von beyden Seiten $xx + \frac{pp}{16}$ wegnimmt und $-\frac{px}{2}$ auf die andere Seite bringt, so ist $\frac{2px}{2}$ oder $px = yy$. Dieses beweiset, daß der Punkt M oder ein jeder anderer Punkt, der auf diese Art gefunden ist, in einer Parabel sey (§. 20), weil das Quadrat der Ordinate dem Rectangel aus dem Parameter in die correspondirende Absciſſe gleich ist —— (*a*) (*).

§. †.

(*a*) Ich endige die Theorie dieser krummen Linie, wobey die meisten Neuern anzufangen pflegen. Ob die Parabel gleich in dem Kegel ihren Ursprung genommen hat, so haben sie sie doch in der Folge lieber durch einige ihrer Eigenschaften beschreiben, und aus dieser Zeichnung die verschiedenen Sätze derselben herleiten wollen, als daß sie, wie wir gethan haben, von der simplen Voraussetzung, daß man einen Kegel mit einer Seite des Axentriangels parallel durchschnitten habe, hätten anfangen sollen. Folglich wird nach dieser Beschreibung der Parabel eine Kenntniß einiger Eigenschaften dieser krummen Linie, die sie bekannt machen wollen, schon angenommen und es werden also diese Eigenschaften nicht selbst entdecket. Deswegen hielten wir es für nöthig, einen andern Weg zu nehmen, und durch eine ununterbrochene Kette von Sätzen, die nämlichen Eigenschaften, die die Neuern annehmen, und diese nicht würden angenommen haben, wenn sie die Natur dieser krummen Linie nicht schon gekannt hätten, zu erfinden. Man ist die Entdeckung oder die Sammlung der mehrsten Eigenschaften, die diese krumme Linie charakterisiren, hauptsächlich dem Apollonius schuldig. Allein, ohngeachtet der Bemühungen des Herrn Barrow eines Engelländers über dieses kostbare Monument des Alterthums, scheinet es mir, wenn man nicht einen unwiderstehlichen Beruf zur Geometrie hat, unmöglich zu seyn, die Lesung derselben auszuhalten. Selbst bis auf den Ausdruck der Sätze zeiget sich alles dunkel, ohne viele Ordnung und folglich sehr schwer. Archimedes ist in dieser Arbeit dem Apollonius vorgegangen und hat uns darüber die schönsten Entdeckungen gegeben. Die Neuern haben sich bemühet, sie nach ihrer Art zu entwickeln,

und

§. †.

Erklärung. Man sagt, daß 2 Kegelschnitte sich einander **ähnlich** sind, wenn man in beyden eine grade Linie als die Basis ziehet und wenn alsdenn die gradliniegten Figuren von gleicher Anzahl der Seiten, die man innerhalb denselben beschreibet, ähnlich sind.

§. ††.

---

und ich liefere sie hier in der Ordnung, wie ich sie erdacht habe, und wie sie unmittelbar aus einander entstanden sind. Ich habe hier nichts unterdrücket. Ich weiß nicht, daß man vor mir sie so bearbeitet habe.

(*) Mit der Erlaubniß des Lesers setze ich noch einige §§. hinzu, die in der Urschrift fehlen, aber dennoch wohl einen Platz in der Abhandlung zu verdienen scheinen. Ich werde sie durch folgendes Zeichen (§. †.) von der la chapellischen Arbeit unterscheiden. Nachstehende Vorerinnerungen werden von einigen meiner Leser vielleicht mit Nutzen vorher gelesen werden, wovon weitere Ausführungen in Herrn Kästners Anfangsgr. *I* Th. Herrn Karstens Lehrbegrif der Mathemat. *I.* und *II* Th. des Herrn Geh. R. von Segners Vorlef. über die Arith. und Geom. und Hausens Elem. Math. zu finden sind.

Wenn man das Verhältniß der Grösse A zu C aus den beyden Verhältnissen der Grössen A : B und B : C bestimmt, so sagt man, das Verhältniß der Grösse A : C sey aus A : B und B : C zusammen gesetzt. Hätte man daher einige Verhältniße, die wie die folgenden beschaffen wären:

$$A : B = g : h$$
$$B : C = r : s$$

so könnte man auch sagen, das Verhältniß A : C sey aus den beyden Verhältnissen $g : h$ und $r : s$ zusammen gesetzt. Man kann daher die Verhältnisse $g : h$ und $r : s$ als Theile betrachten, woraus das ganze Verhältniß A : C entstehet. Dieses wird folgendergestalt angezeiget:

$$A : C = \begin{pmatrix} g : h \\ r : s \end{pmatrix}$$

Wäre $g : h = r : s$, so sagte man A : C sey das verdoppelte Verhältniß von $g : h$ (*ratio duplicata*) $g : h$ heißt aber von

A : C

§. ††.

Aufgabe. Auf einer gegebenen Linie *ac* (Tab. XI. Fig. .) eine Parabel zu beschreiben, die einer gegebenen Parabel ABC ähnlich sey.

Auflösung. Man theile die gegebene Linie *ac* in dem Punkt *d* in 2 gleiche Theile: Alsdenn suche man die vierte Proportionallinie zu DC, *dc* und DB. Diese gefundene Linie nehme man zur Höhe der Parabel *abc* an. Nun construire man, nachdem man nach dem §. 16. den Parameter gesucht hat, eine Parabel (§. 25), so wird diese neue Parabel *abc* der gegebeneu ABC ähnlich seyn.

Beweis. Es sey der Parameter von $ABC = P$ und der Parameter von $abc = p$, so ist, vermöge der Natur der Parabel, $\overline{DC}^2 = DB \times P$ und $\overline{dc}^2 = db \times p$ (§. 20). Folglich verhält sich $\overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = DB \times P : db \times p$. Es ist aber $\overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = \left(\begin{matrix} DC : dc \\ DC : dc \end{matrix}\right)$. Folglich ist auch $DB \times P : db \times p = \left(\begin{matrix} DC : dc \\ DC : dc \end{matrix}\right)$: Nun ist aber $DB : db = DC : dc$ (constr.) Folglich ist auch $P : p = DC : dc = DB : db$. Theilet man nun die Axen DB und *db* in gleiche Theile, z. E. in 3, und ziehet die Ordinaten EG, FM, *eg* und *fm* und die Sehne BG, GM, MC und *bg*, *gm*, *mc*, so wird

A:C die *ratio subduplicata*. Der Ausdruck davon wäre alsdenn dieser:

$$A : C = \left(\begin{matrix} g : h \\ g : h \end{matrix}\right)$$

Hieraus kann man leichtlich erkennen, daß das Verhältniß zwoer Quadratzahlen gegen einander doppelt so groß sey, als das Verhältniß der Wurzeln oder um es durch Zeichen auszudrücken, daß $AA : BB = \left(\begin{matrix} A : B \\ A : B \end{matrix}\right)$ sey. Dieses ist wohl zu bemerken. B.

wird man finden, daß EG : *eg* = EB : *eb* und daß folglich die Triangel EBG und *ebg* sich ähnlich sind: Eben so wird man auch mit leichter Mühe entdecken, daß das Paralleltrapez EFGM dem Paralleltrapez *efgm* ähnlich sey, u. s. w. Hieraus folgt daß die innere Figur BMGCD der Figur *bmgcd* ähnlich sey. Das nämliche gilt von der andern Helfte der Parabel. Folglich sind die ganzen Parabeln sich ähnlich.

§. 111.

Zusätze. Hieraus folgt 1.) daß alle Parabeln sich ähnlich sind, denn man kann immer die Höhen und die Grundlinien mit einander in einem Verhältnisse setzen.

2.) Aehnliche Parabeln verhalten sich unter einander wie die Quadrate ihrer Grundlinien, oder wie die Quadrate ihrer Höhen, oder wie die Quadrate ihrer Parameter, oder wie die Quadrate der gleichnamigten Seiten der innerhalb denselben beschriebenen Figuren, denn alle diese Linien haben unter sich einerley Verhältniß.

§111 ist falsch denn wenn man die Parabel aCB durch eine mit der Grundlinie aB parallel laufende Linie EF abschneidet so kan die parabel ECF nicht mit der grosen parabel ähnlich seyn denn sonst müste Cd : Cg = dB : gF es ist aber $\overline{dB}^2 : \overline{gF}^2 = Cd : Cg$,

Es ist nur anzunehmen wenn ich die parabel in dem brennpunct durchschneide so sind sie alle einander ähnlich, denn dan ist die semiordinate = der doppelten abcisse.

vielleicht wolte der Übersetzer nur sagen daß man zu allen parab. ähnliche construiren könte, oder alle parabeln sind die gleichweit construirt werden, so ist nur diejenige deren Grundlinien und Höhen in proportion stehen, welches nicht bey allen statt findet

Gebrauch

Gebrauch der Parabel
beym Wurf der Bomben und eines jeden andern Körpers.

Nachricht.

Anfänger können diese ganze Lehre überschlagen; Allein sie rauben sich das schönste Vergnügen für den Geist, und haben zugleich das Misvergnügen, eine Reihe von Entdeckungen, die dem siebenzehnten und achtzehnten Jahrhundert viele Ehre machen, entweder gar nicht oder nur gleichsam durch ein Echo zu kennen.

§. 96.

Diese Wissenschaft, die ich hier abhandle, ist ganz neu (*a*) und die Alten haben uns nicht das geringste davon hinterlassen, obgleich der häufige Gebrauch ihrer Kriegsmaschinen, der Ballisten und Catapulten sie darauf hätten führen

(*a*) Die Wissenschaften dürfen ihren Ursprung eigentlich nur von der Zeit an rechnen, in welcher sie sichere Grundsätze und Lehrgebäude, die sich auf diese Grundsätze stützen, bekommen haben. Ob also gleich das Bombenwerfen in einem gewissen Betracht auf das Spiel der Ballisten und Catapulten (*) als auf Kriegsmaschinen zurückgeführet werden kann, die bey den Alten so bekannt waren, so werden wir denselben doch im geringsten keinen so entfernten Ursprung geben. Ja! wir werden sie nicht weiter als bis auf das Jahr 1588. hinaus setzen. Dieses

(*) Ballisten waren diejenigen Maschinen, wodurch man grosse Steine unter die Feinde warf; Catapulten aber eigentlich zu reden diejenigen Maschinen, wodurch Wurfspiesse und grosse Pfeile geworfen wurden. Zeichnungen von beyden nebst einer sehr gelehrten weitläuftigen Ausführung lieset man beym Justus Lipsius in *Poliorceticωn Lib. III. Dial. II.* B.

ren sollen. Ein Italiäner Galiläus von Galiläis ist der Erfinder derselben. Sie ist auf denjenigen Gesetzen gegründet, die

Dieses ist nach dem Herrn Blondel der Zeitpunkt der ersten Bomben, die man in Europa gesehen hat, und die der Graf von Mannsfeld in die Stadt Wachtendonk in Geldern werfen ließ, wie er diese Stadt unter dem Prinzen von Parma belagerte. Sonst hatte man in dieser Kunst noch keine andere Regeln gehabt, als das Gerathewohl.

Dieses ist der Grund, warum Galiläus, ein florentinischer Weltweise, meiner Meinung nach, unwidersprechlich der Erfinder dieser Wissenschaft ist. Sie ist also noch nicht 150 Jahr alt, indem dieser grosse Mann 1642 starb. Ich gründe meine Meinung darauf, weil er zuerst die Gesetze erfunden hat, die die Körper im Steigen und Fallen beobachten, wenn sie nach erhaltenem Stosse bloß der Würkung ihrer Schwere überlassen sind.

In der That scheinet mir der Tittel Erfinder, ein Name der so auszeichnend ist, ihm allein zuzukommen, der nicht nur die Grundsätze oder die Theorie einer Kunst entdeckt hat, sondern dessen durchdringendes Genie mit einem Blicke deren ganzen Umfangng übersah und sogleich Anwendungen davon auf die vornehmsten Aufgaben in der Lehre vom Bombenwerfen machte.

Das, was man darauf in der Folge der Zeit zur letzten Vollkommenheit dieser Wissenschaft hinzugesetzet hat, ist zwar aller Hochachtung der Kenner würdig, kann aber dennoch nur für eine Entwickelung gelten, weil es kein einziges neues Gesetz voraus setzt.

Es ist wahr, es ist dieses eine Entwickelung, wobey viel Scharfsinn und eine grosse Geschicklichkeit im Gebrauch der Geometrie anzutreffen ist; Aber Galiläus hatte doch den Weg geöfnet, und alle Data zu diesen Problemen gegeben, da man vor diesem seltenen Genie selbst nicht einmal wußte, wie man es angreifen sollte. Die Menschen in allen Jahrhunderten vor ihm haben nichts genaues darüber herausgebracht, ob sie es gleich eben so nöthig hatten, als wir. Es ist also billig, daß dieser berühmte Italiäner, den ganzen Glanz dieses Ruhms besitze und daß die übrigen mit dem Verdienste zufrieden seyn mögen, daß sie es eingesehen haben, daß er in diesem Stücke ihr Lehrer zu seyn verdiente.

die schwere Körper in ihrem Falle beobachten, indem sie bloß durch die Würkung ihres eigenen Gewichts gegen die Oberfläche der Erde fallen. Kaum hatte man die Augen über die Bewegung der Körper geöfnet, so hat man bemerket, daß sie gegen die Erde mit desto grösser Stärke stossen, um je höher sie herunter fallen. Wenn ein Körper in den verschiedenen Augenblicken seines Falls immer gleich schnell fiele, so würde er am Ende keine grössere Gewalt als im Anfange haben. Weil nun aber das Gegentheil geschiehet, so muß er nothwendig jeden Augenblick seine Geschwindigkeit vermehren, das heißt, er muß im zweyten Augenblicke einen grössern Raum durchlaufen als im ersten, und im dritten Momente einen grössern Raum als im zweyten und so fortan. Nach welchem Gesetze aber geschiehet diese Vermehrung der Geschwindigkeit?

Man nimmt die Schwere als beständig fortdaurend an, das heißt, man nimmt an, daß der Körper in jedem Augenblick seines Falls durch eine Kraft, die in einem jeden Punkt seiner Laufbahn auf eine gleiche Art würkt, zur Bewegung bestimmt werde. Hierdurch entdeckte Galiläus zuerst bloß durch Vernunftschlüsse, wie man versichert, und überzeugte sich hernach erst durch Versuche davon (*) daß die Räume, die ein Körper in

(*) Die Versuche, die Galiläus anstellte und die in seinen *Dialogis de motu locali*, *Dial. 3.* zu finden sind, waren folgende: Er nahm einen hölzernen aufs beste mit feinem Pergament ausgefütterten Canal oder Rinne, damit durch die Rauhigkeit desselben so wenig Hinderniß, als möglich, entstehen mögte. Diesen Canal erhob er nach und nach in verschiedenen Winkeln über eine Horizontalfläche und ließ darinn eine metallene Kugel herunter laufen, und bemerkte nach richtig gemachten Eintheilungen, daß sich die von Anfang an durchlaufenen Räume verhielten, wie die Quadrate der Zeiten. Er hat diese Versuche mehr als 100 mal mit gleichem Erfolg wiederhohlet. Eben so ersiehet man aus des *Riccioli Almagesto novo*, *T. I. Lib. II. c. 21. prop* 4, daß dieser würdige Gelehrte die Versuche nachgemachet habe. Der einzige Unterschied be-

in einzelnen Momenten im Fallen durchliefe, folgende arithmetische Progreßion ausmachten: 1. 3. 5. 7. 9 ꝛc. daß wenn sie sich nämlich in dem ersten Momente eine Ruthe gegen die Oberfläche der Erde bewegen, es im 2ten Momente 3 Ruthen, im 3ten 5 Ruthen, im 4ten 7 Ruthen ausmachte und so fortan (*).

---

bestand darinn, daß er 8 Unzen schwere Kugeln von Kreide von hohen Thürmen und Fenstern der Häuser von verschiedener Höhe fallen ließ und nach den Vibrationen eines sehr accurat befundenen Perpendikels die Zeit abmaß. Der Erfolg dieser Versuche bestätiget die Versuche des Galiläus aufs beste. Man findet in den englischen philosoph. Trasact. hierüber die schönen Versuche des Herrn Desaguliers. Wie man sonst noch auf eine feine Art diese Versuche anstellen könne, zeiget der Herr Abt Nollet in seinen Vorlesungen über die Naturlehre im *II* Band 6te Vorles. B.

(*) Es mögten verschiedene Leser, die von allen Wahrheiten gerne überzeugende Beweise haben, nicht bloß damit zufrieden seyn, daß sie wissen, daß ein schon längst vermoderter Mathematiker diese Gesetze der Bewegung erfunden habe. Sie wünschen vielleicht lieber die Gründe selbst zu kennen, aus welchen man diese Gesetze auch ohne Erfahrungen schliessen könne. Ich glaube, daß sich der Beweis auf eine solche Art vortragen lasse, daß es Niemand abschrecken werde. Und denn ist es doch gewiß, daß man mit mehrerem Vertrauen und Vergnügen in einem Gebäude wohnet, von dessen dauerhaftem Grunde man gewiß ist, als wenn man die Vestigkeit desselben bloß aus Erzählungen kennet. Wir wollen es uns nicht gereuen lassen tief in die Erde zu graben. Ein starkes Gebäude erfordert einen tiefen Grund.

Wenn 2 Laufer A und B beyde eine gleiche Zeit nämlich etwa 1 Stunde laufen und A legt 1 Meile B aber nur $\frac{1}{2}$ Meile zurück, so sagt man, daß A noch einmal so geschwinde gelaufen sey als B, daß sich folglich die Geschwindigkeit des A zur Geschwindigkeit des B verhalte wie 2 : 1. Die Räume die sie aber zurück gelegt haben verhalten sich auch wie 2 : 1. Liefen beyde aber z. E. 4 Meilen und A brauchte 4 Stunden und B 8 Stunden darzu, so sagte man wieder, daß A geschwinder gelaufen sey als B und zwar wieder noch einmal so geschwinde,

§. 97.

Erster Zusatz. Hieraus folgt, daß die durchlaufenen Räume sich unter einander verhalten wie die Qua-

---

de, weil er nur die Helfte der Zeit zu dem nämlichen Raume gebraucht hat. Es verhält sich also die Geschwindigkeit des A zur Geschwindigkeit des B = 8:4 = 2:1. Hieraus erkennet man, daß wenn

1.) die Zeiten sich gleich sind, die Geschwindigkeiten sich verhalten, wie die Räume.

2.) Wenn die Räume sich gleich sind, die Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten, wie die Zeiten.

Man hat also in dem Begrif der Geschwindigkeit allezeit auf den Raum und die Zeit zugleich zu sehen. Folglich muß die Zahl, die die Zeit ausdrückt, mit der Zahl, die den Raum ausdrückt, auf eine gewisse Art verbunden werden; Dieses wird aber durch keine andere Rechnungsart, als durch die Division geschehen können; Denn man urtheilet selbst im gemeinen Leben so, daß die Geschwindigkeit um desto grösser sey, um je mehrmal die Zeit in dem Raume enthalten ist. Folglich findet man die Geschwindigkeit eines Körpers, wenn man den Raum durch die Zeit dividiret. Es sey daher der Raum = S; die Geschwindigkeit = C; die Zeit = T; so ist also $C = \frac{S}{T}$ und folglich $S = TC$, daß heißt, den Raum, den ein Körper durchlauft, erhält man, wenn man die Zeit durch die Geschwindigkeit multiplicirt. Dieses ist wohl zu bemerken!

Eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn die Geschwindigkeit des Körpers während derselben immer die nämliche bleibt. Eine Bewegung heißt eine beschleunigte wenn die Geschwindigkeit immer grösser wird; und sie heißt eine gleichförmigbeschleunigte, wenn die Zunahme in der Geschwindigkeit jeden Augenblick gleich groß ist. So ist nun diejenige beschaffen, nach welcher Körper vermöge ihrer Schwere herunter fallen; und wovon also hier die Rede ist. Körper, die sich nach einer gleichförmigbeschleunigten Bewegung bewegen, bekommen also in jedem Momente einen neuen gleichen Grad der Geschwindigkeit. Folglich verhalten sich die Geschwindigkeiten, wie die

Quadrate der Zeiten, die sie zu ihrer Bewegung angewendet haben. Man muß das erste Glied dieser Progreßion von Räumen von dem Punkt annehmen, wo der Körper zu fallen anfieng; das heißt, der Raum, der in den zwey ersten Momenten durchlaufen ist, verhält sich zu dem Raume in dem ersten Momente wie das Quadrat von 2 zu dem Quadrat von 1, oder wie 4 : 1.

K 3 Es

---

die Anzahl der Momente oder wie die Zeiten. Stellen wir uns daher den rechtwinklichten Triangel *agn* vor (Tab. XI. Fig. 6.) und theilen *ag* in lauter kleine gleiche Theile, so sind *ab*, *bc*, *cd* ..... die einzelnen Momente oder die einzelnen Zeiten. Ziehet man jetzt *bh*, *ci*, *dk* ..... mit der Basis *gn* parallel, so entstehen dadurch lauter ähnliche Triangel wie *abh*, *aci*, *adk* ..... und da sich folglich aus geometrischen Gründen *bh*, *ci* und *dk* eben so zu einander verhalten als *ab*, *ac* und *ad*, so können *bh*, *ci* und *dk* die Geschwindigkeiten vorstellen, die der Körper am Ende der verschiedenen Momenten seiner Bewegung erhalten hat. Hätte nun der Körper während dem ganzen Momente *ab* die Geschwindigkeit *bh* gehabt, so würde sein Raum, den er durchlaufen müßte, $ab \times bh$ seyn. Es war aber seine Geschwindigkeit im Anfange $= 0$ und wuchs immer gleich stark, biß sie endlich am Ende des Moments *bh* wurde. Suchen wir also eine mittlere Proportionalgeschwindigkeit, nach welcher der Körper in der nämlichen Zeit mit einer gleichförmigen Bewegung den nämlichen Raum würde durchlaufen haben, so ist dieses die mittlere arithmethische Proportionallinie zwischen 0 und $bh = \frac{1}{2}bh$. Diese ist daher als seine wahre Geschwindigkeit während der ganzen Bewegung im ersten Momente anzunehmen; Folglich ist der Raum, den er mit dieser Geschwindigkeit durchlaufen hat, $= ab \times \frac{1}{2}bh = \frac{ab \times bh}{2} =$ dem Triangel *abh* (Geometrie). Aus den nämlichen Gründen drücket also der Triangel *aci* den Raum aus, den der Körper am Ende des zweyten Moments durchlaufen hat; und der Triangel *adk* zeiget den Raum an, den er im dritten Momente durchlaufen muß; u. s. w. Folglich verhalten sich die sämmtlichen Räume am Ende der verschiedenen Momente zu einander, wie der Triangel *abh*, *aci* und *adk*. Diese ähnlichen Triangel verhalten sich aber zu einander, wie die Quadrate ihrer

Es ist auch würklich ein Körper, von dem man annimmt, daß er nach dem Gesetze der Natur (§. 96.) im ersten Augenblicke 1 Ruthe, im 2ten aber 3 Ruthen durchlauft, am Ende des 2ten Augenblicks zusammen genommen 4 Ruthen durchwandert. Folglich verhält sich der durchlaufene Raum in den zwey

---

ihrer gleichnahmigten Seiten *ab*, *ac*, *ad*..... oder *bh*, *ci*, *dk*..... (Geometrie). Folglich verhält sich der Raum am Ende des ersten Moments zum Raum am Ende des zweyten Moments $= (ab)^2 : (ac)^2$. Es drücken aber *ab* und *ac* die Zeiten aus. Folglich verhalten sich diese Räume zu einander, wie die Quadrate der Zeiten. Eben so verhält sich der Raum, den der Körper am Ende des ersten Moments durchlaufen hat, zum Raume, den er am Ende des zweyten Moments durchlaufen hat, $= (bh)^2 : (ci)^2$. Es stellen aber *bh* und *ci* die Geschwindigkeiten vor. Folglich verhalten sich die Räume, die die Körper am Ende jedes Moments durchlaufen, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Es mögen nun die einzelnen Momente oder Zeiten seyn:

1.	So sind die vom Anfang der	1.
2.	Bewegung an, biß an das	4.
3.	Ende eines jeden Moments	9.
4.	durchlaufene Räume:	16.
5.		25.

Folglich ist der Raum des Körpers während seiner Bewegung

Im 1sten Momente		=	1.
Im 2ten = = =	4 — 1	=	3.
Im 3ten = = =	9 — 4	=	5.
Im 4ten = = =	16 — 9	=	7.
Im 5ten = = =	25 — 16	=	9.

Folglich verhalten sich die einzelnen Räume, die der Körper in den einzelnen Momenten durchlaufen ist, wie 1. 3. 5. 7. 9. oder wie die natürlich auf einander folgenden ungraden Zahlen. Hier sind, wie mich dünkt, auf eine gewiß faßliche obgleich umgekehrte Weise, die so wichtigen Gesetze der Bewegung, die unser Herr Verfasser in diesem und dem folgenden §. anführt, bewiesen worden. Es wird mich erfreuen, wenn der teutsche Leser dem Uebersetzer wegen dieser Anmerkung keine saure Miene macht. B.

zwey ersten Augenblicken, zu dem Raume im ersten Augenblicke $= 4 : 1$. Es ist aber 4 das Quadrat von 2, und 1 das Quadrat von 1. Folglich ist es klar, daß wenn man das obige Naturgesetz annimmt, (§. 96), **die durchgelaufenen Räume sich unter einander verhalten, wie die Quadrate der Zeiten, die zur Bewegung angewendet worden sind.** Dieses ist eine in der Folge sehr nothwendige Bemerkung.

Wollet ihr, um euch noch mehr zu überzeugen, den Raum, den der Körper im ersten Momente durchlief, mit dem vergleichen, welchen er zum Ende des dritten Moments durchgelaufen ist, so werdet ihr finden, daß er am Ende seiner zwey ersten Augenblicke 4 oder $1 + 3$ und am Ende des dritten 9 oder $1 + 3 + 5$ durchlief. Daß sich also die Räume der beyden ersten Augenblicke zum Raume, der am Ende des dritten durchlaufen ist, verhalten wie $4 : 9$. Nun ist aber 4 das Quadrat von 2 und 9 das Quadrat von 3. Folglich ist das zweyte Gesetz eben so beständig als das erste. Ihr werdet sogleich sehen, daß es sehr bequem ist, zu finden, von welcher Höhe ein Körper gefallen sey, wenn man die Zeit weiß, die er angewendet hat, indem er bloß durch die Würkung seiner Schwere fiel, oder wie lange ein Körper fallen muß, um bloß durch seine Schwere eine gewisse Tiefe zu erreichen.

§. 69

Wir werden hier, wie überall in dem nachfolgenden voraus setzen, daß der Körper in seinem Falle nicht das geringste Hinderniß finde, es mag dasselbe von der Luft oder irgend einer andern Ursache herrühren. Mit einem Worte! Wir betrachten ihn, als wenn seine Bewegung in einem vollkommenen leeren Raum geschähe und nehmen also alles bloß mathematisch, um sichere Principia zu haben. Doch behalten wir uns vor, durch die Erfahrung zu untersuchen, biß zu welchem Punkt der Widerstand der Luft die Resultate aus dieser Hypo-

these verändern könne? Wir nehmen auch dieses noch an, daß ein fallender Körper 15 Schuh in der ersten Sekunde seines Falls durchlaufe. Man hat dieses ungefehr durch die Erfahrung bestimmt. (*)

§. 99.

Aufgabe. Ein Körper ist 4 Secunden bloß durch die Würkung seiner Schwere gefallen. Man will wissen, wie tief er gefallen sey? Oder man fordert die Länge x desjenigen Raums, den er in dieser Zeit durchgelaufen hat.

Auflösung. Erinnert euch, daß sich der Raum x zum Raum von 15 Schuh verhalten müsse, wie das Quadrat der Zeit $4 = 16$, zu dem Quadrat der Zeit $1 = 1$ oder $x : 15 = 16 : 1$ (§. 97). Folglich ist $x = 15 \times 16 = 240$. Dieses beweiset, daß der Körper in 4 Sekunden 240 Schuh durchgelaufen ist.

§. 100.

Aufgabe. Wollet ihr itzt wissen, wie viel Zeit ein Körper gebrauche, um von der Höhe 540 Schuh zu fallen?

Auflösung. Sprechet: Der in 1 Sekunde durchlaufene Raum von 15 Schuh, verhält sich zum Raum 540 Schuh, wie das Quadrat von 1 zum Quadrat yy der gesuchten Zeit oder $15 : 540 = 1 : y^2 = \frac{540}{15} = 36$. Folglich ist die gesuchte Zeit $y = \sqrt{36} = 6$. Folglich braucht ein Körper 6 Sekunden Zeit von einer Höhe von 540 Schuh herunter zu fallen.

§. 101.

(*) Man sehe Riccioli Almag. Nov Tom. I. Lib. 2 c. 21. prop. 4. Doch dependirct dieses sehr von der Art der Körper die man fallen läßt. Man lese in den englischen Transactionen die Versuche die der Herr Desagüliers darüber angestellet hat, indem er verschiedene Körper von der Pauls-Kirche zu London fallen ließ. B.

§. 101.

Zweyter Zusatz. Da man annimmt, daß die Schwere beständig sey, das heißt, daß sie in jedem Augenblick dem fallenden Körper einen neuen Trieb gibt, der dem in jedem vorigen Augenblicke gleich ist; da man ferner voraussetzt, daß ein gleicher Trieb in der nämlichen Zeit eine gleiche Geschwindigkeit hervorbringe; imgleichen, daß alle diese Triebe nach einerley Gegend gehen, ohne sich einander aufzuheben, so ist es klar, daß ein Körper in einer gegebenen Zeit, so viele neue Triebe oder gleiche Geschwindigkeiten bekomme, als man darinn gleiche Augenblicke zählen kann. Folglich verhalten sich die **erlangte Geschwindigkeiten, wie die zur Durchlaufung des Raums angewendete Zeiten.** Es verhalten sich aber die durchgelaufenen Räume zu einander, wie die Quadrate der Zeiten (§. 97); Da sich also die Zeiten unter einander verhalten, wie die Geschwindigkeiten so verhalten **sich die Räume zu einander, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten die der Körper am Ende dieser Räume erhalten hat;** Folglich verhalten sich die erlangten Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln der Räume.

Es mögen T und t die Zeiten anzeigen; C und c die Geschwindigkeiten; S und s die Räume, die man vergleicht: (*) so verhält sich $T : t = C : c$ (§. 101), oder $TT : tt = CC : cc$. Nun verhält sich aber $S : s = TT : tt$ (§. 97). Folglich $S : s = CC : cc$. Folglich $T : t = \sqrt{S} : \sqrt{s}$ oder $C : c = \sqrt{S} : \sqrt{s}$. Man muß auf alle diese Gesetze wohl Acht geben.

§. 102.

(*) Die Abänderung, die ich hier in Ansehung der Buchstaben von dem französischen Original gemacht habe, ist deswegen vorgenommen worden, weil ich glaubte, daß diese substituirte Bezeichnung vielen Lesern angenehmer und gelaufiger seyn möchte. Im Französischen stehet für C und c, V und v; und für S und s, E und e. Diese Freyheit wird man mir also vergeben, wie andere von ähnlicher Beschaffenheit. B.

§. 102.

Dritter Zusatz. Ein gleichförmigbewegter Körper durchlauft mit derjenigen Geschwindigkeit, die er am Ende des ersten Augenblicks seines Falls erhalten hat, in einer Zeit, die der erstern gleich ist, einen Raum, der doppelt so groß ist als der erstere.

Denn die Schwere, die man als beständig annimmt, treibt den Körper immer mit gleicher Stärke. Sie verursacht also, daß der Körper im zweyten Momente, wie im ersten, einen Raum durchlauft, der = 1 ist. Weil aber der Körper im zweyten Momente einen Raum durchlauft, der = 3 ist, so muß er nothwendig, vermöge der, am Ende des ersten Moments erlangten, Geschwindigkeit einen Raum durchgelaufen haben, der = 2 ist oder der doppelt so groß ist, als 1 oder als der erste Raum. Diese erhaltene Geschwindigkeit ist aber gleichförmig, weil sie durch keine Ursache verändert wird. Es beweiset folglich die arithmetische Progreßion: 1. 3. 5. 7. 9... die das Verhältniß der durch einen Körper durchlaufenen Räume ausdruckt, daß dieser **gleichförmig bewegte Körper mit derjenigen Geschwindigkeit, die er am Ende des ersten Augenblicks seines Falls erhalten hat, in einer eben so langen Zeit einen Raum durchlaufe, der doppelt so groß ist, als der in der ersten Zeit.** Dieses ist sehr wichtig und verdient wohl bemerkt zu werden.

Und damit man gar nicht zweifle, daß dieses unverändert geschähe, so nehme man den Raum 4 der in zwey Momenten durchgelaufen ist. Ich behaupte, daß der Körper mit der am Ende dieser zwey Augenblicke erlangten Geschwindigkeit, würklich 8 oder das doppelte von 4 würde durchgelaufen haben wenn er noch 2 folgende Momente mit der nämlichen Geschwindigkeit sich bewegt hätte. Denn in den 2 folgenden Momenten würde er nach obigen Gesetzen durchlaufen haben: 5 + 7 = 12. Nun nehme ich an, daß er durch die Schwere in

in den 2 ersten Momenten 4 durchlauft. Weil nun diese beständig ist, so lässet sie ihn auch 4 in den 2 folgenden Momenten durchlaufen, die den ersten gleich sind. Es bleibt folglich noch 8 übrig, die durch die erlangte Geschwindigkeit durchgelaufen worden sind. Es muß aber diese Geschwindigkeit gleichförmig seyn, weil sie nichts daran hindert (*).

§. 103.

Vierter Zusatz. Ein von dem Horizont perpendiculair zurück gestossener Körper, muß nothwendig mit der Geschwindigkeit, die er am Ende seines Falls erhalten hat, in der nämlichen oder gleichen Zeit, in welcher er herunter gefallen ist, zu dem nämlichen Punkt, von welchem er herunter zu fallen anfieng, wieder in die Höhe steigen (Fig 21).

Beweis. Lasset uns annehmen, daß der Körper in 3 Momenten von A nach B herunter gefallen und daß dieser Kör-

(*) Sollte man sich nicht durch das, was ich bey dem §. 96. angemerket habe, auf eine deutlichere Art von der Warheit, die in diesem §. vorgetragen ist, überzeugen können. Wenn der Körper (Tab. XI. Fig. 6) in g angekommen ist, so ist seine Geschwindigkeit gn. Würde er von nun an sich immer gleichförmig bewegen, so bekommt oder verliert er keinen Grad der Geschwindigkeit. Folglich bliebe während seiner ganzen zukünftigen Bewegung seine Geschwindigkeit gn. Es soll aber ausserdem der Körper eben so viele Zeit zu seiner Bewegung gebraucht haben, als vorher. Folglich ist seine Zeit, die er anwendet $= ag = go$. (constr.) Folglich ist der Raum, den er durchlaufen muß $= gn \times op =$ Rectang. $gnop$. Dieses Rectangel hat aber einerley Basis und Höhe mit dem Triangel agn. (constr.) Folglich ist dieses Rectangel das doppelte dieses Triangels (Geometrie). Folglich wird der Körper in der nämlichen Zeit nach einer gleichförmigen Bewegung mit der am Ende des letzten Moments erhaltenen Geschwindigkeit einen doppelt so grossen Raum durchlaufen, als vorher. W. z. E. W. B.

Körper in dem ersten Momente den Raum 1 durchgelaufen habe, daß er folglich im 2ten sich durch einen Raum = 3 im 3ten durch einen Raum = 5 bewegt habe, so daß AB in allem aus 9 Theilen bestehe: Nun verhalten sich die Zeiten unter einander wie die Grade der Geschwindigkeit (§. 101); Folglich hat der bewegte Körper am Ende seines Falls 3 gleiche Grade der Geschwindigkeit erhalten. Folglich fängt er mit diesen 3 Graden an zurück zu gehen. Allein vermöge derjenigen Geschwindigkeit, die er während des ersten Moments seines Falls erhalten hat, hat er 2 durchlaufen (§. 102). Folglich wird er vermöge der 3 gleichen Grade, die er am Ende erhalten hat, 6 oder 3 mal 2 durchlaufen; Folglich würde der bewegte Körper, da er würklich 3 Grade der Geschwindigkeit besitzt, mit einer gleichförmigen Bewegung 6 Theile von AB in dem ersten Momente, in welchem er in die Höhe steigt, durchlaufen oder er würde von B biß nach 3 in die Höhe gehen, wenn die Schwere, die sich in ihrer Würkung ihm grade entgegen setzt, nicht verursachte, daß er um 1 zurück laufen müßte. Er wird also nur biß zum Nro. 4 kommen, nachdem er 5 Theile von AB durchlaufen hat. In dem 2ten Augenblick würde er auch mit einer gleichförmigen Bewegung 6 Theile von AB durchlaufen; allein die Schwere macht, daß er um 3 solcher Theile zurück fällt. Er wird also von 4 an nur 3 Theile von AB durchlaufen; Folglich wird er am Ende der beyden ersten Augenblicke seines in die Höhe steigens biß nach 1 zurückgegangen seye, und er würde im dritten Augenblick fortfahren gleichförmig 6 Theile von AB zu durchlaufen, wenn die Schwere, die ihn um 5 solcher Theile zurück stößt, ihn nicht dahin brächte, daß er nur 1 von solchen Theilen durchlaufen kann; Folglich wird er am Ende des dritten Moments accurat biß an den Punkt A, wovon er anfieng herunter zu steigen, zurück gekommen seye, und er wird über diesen Anfangspunkt seines Falls nicht hinaus gehen.

Denn, wenn man wollte, daß er noch in einem 4ten Momente fortfahren sollte mit einer gleichförmigen Bewegung

6 Theile

6 Theile von AB zu durchlaufen, indem er sich über den Punkt A erhübe, so würde er sich am Ende dieses Moments am Punkt 1 unterhalb A befinden, weil er in dieser nämlichen Zeit durch seine Schwere um 7 Theile zurück gezogen werden würde. Man siehet daraus, daß er zurück gehen würde, und daß also ein Körper, der perpendiculair von dem Horizont zurück geworfen wird, mit der Geschwindigkeit, die er am Ende seines Falls erhalten hat, in einer so grossen Zeit, als diejenige ist, in welcher er herunter gefahren ist, accurat biß zu der nämlichen Höhe, von welcher er sich zu bewegen anfieng, zurückgehen werde, und daß er unmöglich darüber hinaus gehen könne.

Wenn man es nicht leicht begreifen könnte, daß ein Körper, der sich gleichförmig in die Höhe bewegt, nach dem nämlichen Gesetze zurück gestossen werde, nach welchen er im herunter fallen seine Bewegung beschleunigte, so dürfte man ihn sich nur so vorstellen, als wenn er über eine schiefliegende Fläche rollte, welche schiefliegende Fläche dem fallenden Körper gleichförmig beweget würde, so würde man offenbar sehen, daß während der Zeit, in welchem die schiefliegende Fläche den Körper um 6 Theile über den Horizont im ersten Momente wegbewegte, die Schwere verursachen würde, daß er im Rollen in der nämlichen Zeit um 1 herunter steige. Woraus klar ist, daß alles übrige sich daraus schliessen lasse.

§. 104.

Anmerkung. Die Theorie vom Bombenwerfen wird einzig und allein aus den Gesetzen dieser beschleunigten Bewegung der schweren Körper, mit welchen man die Gesetze der gleichförmigen Bewegung verbindet, hergeleitet. Man setzt dabey voraus, daß ein Eindruck, der einem in Bewegung gesetzten Körper gegeben wird, in den folgenden Augenblicken fortfahre der nämliche zu seyn, wenn sich ihm nichts wider-

widersetzet, und daß dieser nämliche Eindruck macht, daß er in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufe, wie dieses nothwendig in einem vollkommnen leeren Raum geschehen würde. Man muß sich folglich, ehe man zu den folgenden Sätzen fortgehet, diese Gesetze recht gelaufig machen und sich Mühe geben, daß keine einzige Dunkelheit übrig bleibe.

§. 105.

Erster Hauptsatz. Wenn ein Körper gleichförmig nach der Linie AC parallel mit dem Horizont BT (Fig. 22) geworfen worden ist, und wenn er diese Linie z. E. in 2 Sekunden, während daß seine Schwere macht, daß er von der Höhe AB herunter falle, durchläuft, so behaupte ich, daß vermöge der Vereinigung dieser 2 Bewegungen nämlich der gleichförmigen und der beschleunigten, der Körper am Ende dieser Zeit in D ankommen werde, nachdem er die Parabel AMD beschrieben hat, welche zur Axe die Höhe AB hat, und wovon die Linien GM und BD 2 Ordinaten sind, und der Parameter p, das vierfache ist, von einer 3ten Proportionallinie zu den beyden Grössen AB und AF, welche leztere Linie die Helfte von AC ist, und von welcher Parabel endlich die Tangente AC ist.

Beweis 1.) Der Weg AMD des bewegten Körpers ist eine Parabel. Denn die durch die Schwere durchlaufenen Räume verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Zeiten, die der Körper gebraucht hat, um sie zu durchlaufen. Folglich verhält sich der Raum —FM oder AG, den er vermöge seiner Schwere am Ende der ersten Sekunde durchlaufen hat, und in welcher er gleichfals AF oder GM als die Helfte von AC (Beding.) beschrieben hat; Es verhält sich, sage ich, der Raum FM oder AG zu dem Raume CD oder AB, der durch seine Schwere am Ende zwoer Sekunden durchlaufen ist wie das Quadrat von 1 zu dem Quadrat von 2; das heißt, es verhält sich FM oder AG : CD oder AB = 1 : 4. Nun ist aber AF = der Helfte von AC; Folglich ist

ist GM = AF = der Helfte von BD = AC; Folglich BD = 2GM; Folglich $\overline{BD}^2 = 4\overline{GM}^2$. Folglich verhält sich $\overline{GM}^2 : \overline{BD}^2 = 1 : 4$. Wir haben aber so eben gesehen, daß AG : AB = 1 : 4; Folglich verhält sich $\overline{GM}^2 : \overline{BD}^2$ = AG : AB. Folglich verhalten sich die Quadrate der Ordinaten GM, BD zu einander, wie die correspondirenden Abscissen AG, AB. Dieses beweiset, daß der Weg AMD eine Parabel sey.

2.) AB ist offenbar die Axe derselben, weil die Ordinaten GM, BD gegen dieselben perpendiculair sind (§. 5).

3.) Wenn man die Linie BF ziehet und auf derselben die Perpendiculairlinie FH aufrichtet, biß sie in irgend einem Punkte H die verlängerte Linie BA durchschneidet, so ist AH die dritte Proportionallinie zu den beyden Linien AB, AF, und das vierfache dieser Linie ist der Parameter der krummen Linie AMD; das heißt, 4AH = p. Denn bemerket, daß $\overline{AF}^2$ = AH × AB, weil nach der Bedingung AB : AF = AF : AH. Folglich ist $(4AF)^2$ = 4AH × AB. Es ist aber BD = 2AF und $\overline{BD}^2 = 4\overline{AF}^2$; Folglich ist $\overline{BD}^2$ = 4AH × AB. Man weiß aber (§. 20), daß $\overline{BD}^2$ = AB × p. Folglich ist AB × p = 4AH × AB; und folglich ist p = 4AH. W. z. E. W.

4.) Der bewegte Körper wird durch seine Schwere von seinem Wege AC abgelenket, so bald er von A nach CD fortrücket. Daher siehet man, daß die halbe Parabel AMD nur den Punkt A mit der Linie AC gemein habe, und daß es das nämliche sey, wenn der Körper, nachdem er vorher gegen die rechte Hand beweget worden, von dem nämlichen Punkt A gegen die linke Hand nach der verlängerten Linie

AC

AC sich bewege, um die andere Helfte der Parabel zu beschreiben. Folglich ist AC eine Linie, die die Parabel nur in einem Punkt berühret, und sie ist folglich die Tangente dieser krummen Linie.

§. 106.

Zweyter Satz. Lasset uns itzt annehmen, daß der nämliche Körper mit gleichförmiger Bewegung die Linie BF, die schief gegen die Horizontallinie BT ist, und zwar in der nämlichen Zeit beschreibe, in welcher er AF durchgelaufen hat, das heißt, in 1 Sekunde, so wird er durch die Würkung der Schwere mit dem gleichförmigen Antriebe nach BF verbunden in einer Zeit von 4 Sekunden die ganze Parabel, wovon AMD die Helfte ist, beschreiben müssen.

Beweis. Es würde der bewegte Körper am Ende der ersten Sekunde in F angekommen seyn, wenn er durch die Schwere nicht von der Höhe FM, das heißt, von dem vierten Theile der Linie AB hätte herunter sinken müssen (§. 105). Folglich wird der Punkt M in der neuen krummen Linie seyn. Wenn der Körper fortgefahren wäre, sich gleichförmig in der nämlichen Direction zu bewegen, so würde er FR=BF am Ende der 2ten Sekunde durchgelaufen haben und würde in R angekommen seyn, wenn nicht seine Schwere verursacht hätte, daß er um die Länge AB=4AG=4FM (Beding.) hätte herum fallen müssen. Nun ist aber AB=RC, weil AF =FC; Folglich wird der bewegte Körper am Ende der zwo ersten Sekunden von der Höhe RC=4FM herunter gefallen seyn und der Punkt C wird in der krummen Linie des Wurfs seyn.

Ich setze hinzu: Es wird dieser Punkt der Scheitelpunkt dieser Linie seyn, weil der bewegte Körper, indem er in der 3ten Sekunde mit gleichförmiger Bewegung RK durchlaufen ist, am Ende der 3ten Sekunde in K angekommen seyn würde, wenn die Schwere desselben nicht gemacht hätte, daß er um 9FM; das heißt,

von KN = 9FM herunter gefallen wäre (§. 97). Folglich wird sich der Punkt N der neuen Parabel unterhalb der Linie AP befinden. Denn KV ist das doppelte von RC (weil FK das doppelte von FR ist) und RC = AB = dem vierfachen von FM oder AG. Folglich muß KV das achtfache von FM oder = 8FM seyn. Es ist aber KN = 9FM = 8FM + FM. Folglich ist KN > KV und VN = FM. Folglich wird der bewegte Körper unter AP hinunter gefallen seyn, und C ist der höchste Punkt seines Aufsteigens oder der Scheitelpunkt der krummen Linie BCT. In der 4ten Sekunde wird er vermöge seiner gleichförmigen Bewegung KS = BF durchlaufen seyn, und wird am Ende der 4ten Sekunde in S angekommen seyn, da aber die Schwere ihn von 16FM herunter treibt (§. 97), so wird er accurat in dem Punkt T der Horizontallinie angekommen seyn. Diese wird folglich die ganze Weite des Wurfs bestimmen. Es ist klar, daß ST = SP + PT = 16FM sey; weil SP = 3RC, (denn es ist FS = 3FR) und weil RC = 4FM. Es ist folglich SP = 12FM. Es ist aber auch PT = AB = 4AG = 4FM; Folglich ist SP + PT = 16FM oder ST = 16FM oder 4AB. Folglich wird der bewegte Körper am Ende von 4 Sekunden vollkommen auf den Horizont zurück gefallen seyn, und der Weg CNT, welchen er während 2 Sekunden im herunterfallen wird durchgelaufen haben, wird dem Wege BMC gleich seyn, der auch in 2 Sekunden, die er zum hinauf steigen gebraucht hat, beschrieben worden ist. Es ist vermöge der Figur klar, daß BMCNT eine Parabel sey. Denn es ist ME = GM; CE = AG; CD = AB; Folglich weil $\overline{GM}^2 : \overline{BD}^2 = AG : AB$ (§. 105); so verhält sich auch $\overline{ME}^2 : \overline{BD}^2 = CE : CD$. Folglich ist die krumme Linie BMC eine halbe Parabel (§. 7).

Eben so muß man beweisen, daß die krumme Linie CNT eine andere Helfte der Parabel sey, die der halben Parabel BMC = ist und welche nicht im geringsten von AMD unter-

schieden ist. Denn diese beyden krummen Linien haben einerley Höhe und gleiche Ordinaten in Punkten, die gleich weit von ihrem Scheitelpunkte liegen; Folglich ist die ganze Parabel BMCNT gänzlich derjenigen Parabel gleich, wovon AMD die Helfte ist.

§. 107.

Aufgabe. Von welcher Höhe muß aber ein Körper fallen, damit er am Ende seines Falls eine solche Kraft besitze, daß er dadurch, wenn seine Bewegung gleichförmig bliebe, BR, als das doppelte von BF in der nämlichen Zeit durchlaufen könne, in welcher er, vermöge seiner Schwere AB durchlaufen muß (*). Er fällt aber durch AB in einer Zeit von 2 Sekunden (Fig. 22).

Auflösung. Suchet zu den 2 Grössen AB und BF eine dritte Proportionalgrösse. Richtet daher aus dem Punkt F auf der Linie BF die Perpendiculairlinie FH auf, und ziehet sie so lange aus, biß sie die gegen H verlängerte Linie BA in einem Punkt H durchschneidet, so wird die Linie HB die Höhe seyn, wovon der Körper herunter fallen muß, um am Ende seines Falls eine Kraft zu erlangen, die ihn in den Stand setzet, durch eine gleichförmige Bewegung BR in 2 Sekunden, das heißt in derjenigen Zeit zu durchlaufen, die er haben muß um AB durch seine Schwere zu durchwandern.

Beweis.

(*) Je mehr Kraft ein Körper besitzt, der seitwerts geworfen wird, um desto grösser muß die Weite der Parabel seyn, die er beschreibt. Ein Körper erlangt aber immer eine grössere Geschwindigkeit, und folglich eine grössere Kraft, je tiefer er fällt: Dieserwegen kam Galiläus auf den schönen Einfall, um die Kräfte des Körpers durch ein gewisses Maaß auszudrucken, anzunehmen, daß der Körper diese Kraft erhalten habe, indem er von einer gewissen Höhe herunter gefallen sey. Diese Anmerkung war vielleicht nöthig, diesen §. desto besser zu verstehen. B.

Beweis. Lasset uns annehmen, daß der Körper von der Höhe HB herunter gefallen sey, und lasset uns sehen, was für eine Linie er durch eine gleichförmige Bewegung durch seine Geschwindigkeit, die er am Ende der Linie HB erlangt hat, in 2 Sekunden durchlaufen müsse? Es verhalten sich die Räume, die durch die Schwere durchlaufen werden, zu einander, wie die Quadrate der dazu angewendeten Zeiten (§. 97). Wenn wir daher die Zeit, die der Körper zum herunter fallen von der Linie HB angewendet hat, t nennen, so verhält sich $AB : HB = 4 : tt = \frac{4HB}{AB}$. Folglich ist $t = 2\sqrt{\frac{HB}{AB}}$ (§. 21. Calc.) = dem Ausdruck für die Zeit, die der Körper, um die Linie HB durch seine Schwere zu durchlaufen, angewendet hat. Und dieser Werth ist nun durch lauter bekannte Grössen ausgedruckt. Es sey nun x die Grösse, wodurch man t multipliciren muß, damit t so groß als 2 Sekunden sey; so ist $tx = 2$; Folglich $x = \frac{2}{t} = \frac{2}{2\sqrt{\frac{HB}{AB}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}}$. Es ist aber $\frac{HB}{AB} = \frac{\overline{HB}^2}{\overline{BF}^2}$. Denn es verhält sich $HB : BF = BF : AB$ (constr.); Folglich $\overline{HB}^2 : \overline{BF}^2 = HB : AB$ (*); Folglich $\frac{\overline{HB}^2}{\overline{BF}^2} = \frac{HB}{AB}$; Weil also $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}}$ ist, so ist auch $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{\overline{HB}^2}{\overline{BF}^2}}} = \frac{1}{\frac{HB}{BF}} = \frac{BF}{HB}$

L 2 (nach

(*) Denn da dieses Verhältniß richtig ist: $HB : BF = BF : AB$, so ist auch $HB \times AB = \overline{BF}^2$. Wenn man folglich beyde Glieder

(nach der Arith.); Folglich ist $x = \frac{BF}{HB}$. Es muß aber der Körper mit derjenigen Geschwindigkeit, die er am Ende der Zeit t erhalten hat, und in einer Zeit, die der Zeit t gleich ist, mit einer gleichförmigen Bewegung einen Raum durchlaufen, der doppelt so groß ist als HB, das heißt, der so groß ist als 2HB. Er wird folglich während der Zeit tx oder während 2 Sekunden mit einer gleichförmigen Bewegung $2HB \times x = 2HB \times \frac{BF}{HB}$ durchlaufen. Nun ist aber $2HB \times \frac{BF}{HB} = 2BF = BR$; Folglich wird der Körper vermöge der Geschwindigkeit, die er im herunterfallen von HB erhalten hat, mit einer gleichförmigen Bewegung den Raum BR in 2 Sekunden durchlaufen. Dieses ist die nämliche Zeit, die der Körper gebraucht hat, von A nach B zu fallen. W. z. E. W.

Wir werden künftig BH die **Linie der Höhe** nennen.

§. 108.

Wenn man gerne wissen mögte, wie man es denn habe finden können, daß die Höhe HB als die dritte Proportionallinie zu AB und BF geschickt sey, diese Aufgabe aufzulösen, so wollen wir die gesuchte Höhe y nennen. Die Geschwindigkeit, die der Körper am Ende dieser Höhe erhält sey C; die Geschwindigkeit, die der Körper am Ende von AB erlangt $= c$. Auch erinnere man sich noch, daß die im Fallen erlang-

---

der der Gleichung durch HB multiplicirt, so bekommt man $HB \times AB \times HB = \overline{BF}^2 \times HB$ oder $\overline{HB}^2 \times AB = \overline{BF}^2 \times HB$. Folglich verhält sich $\overline{HB}^2 : \overline{BF}^2 = HB : AB$. Denn, wenn man in diesem Verhältnisse die mittelsten und äussersten Glieder durch einander multipliciret, so wird die vorige Gleichung wieder herauskommen. B.

langten Geschwindigkeiten sich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln der durchgelaufenen Räume (§. 101). Dieses gibt folgendes Verhältniß $C : c = \sqrt{y} : \sqrt{AB}$. Allein vermöge der Bedingung muß der Körper durch die Geschwindigkeit C, die er am Ende des Raums y erhalten hat, mit einer gleichförmigen Bewegung $BR = 2BF$ in einer Zeit von 2 Sekunden durchlaufen, und durch die Geschwindigkeit c die er zu Ende des Raums AB erhalten hat, muß der bewegte Körper mit einer gleichförmigen Bewegung in 2 Sekunden einen doppelt so grossen Raum als AB durchlaufen (§. 102). Wenn nun bey einer gleichförmigen Bewegung die Zeiten sich gleich sind, so verhalten sich die Geschwindigkeiten unter einander, wie die durchgelaufenen Räume (Anmerk. zum §. 96). Es verhält sich folglich $C : c = 2BF : 2AB = BF : AB$. Folglich verhält sich auch $\sqrt{y} : \sqrt{AB} = BF : AB$. Wenn man folglich alle Glieder zum Quadrat erhebt, so verhält sich $y : AB = \overline{BF}^2 : \overline{AB}^2$ (§. 254. Instit. 11 B.) Hieraus schließt man, daß $y = \frac{\overline{BF}^2}{AB}$ oder $AB : BF = BF : y$. Dieses beweiset, daß die gesuchte Höhe y die dritte Proportionallinie zu den beyden Linien AB und BF sey, wie man es auch (§. 107.) zur Auflösung des Problems angenommen hat. Und man hat also diese Wahrheit aus ihrer Quelle entstehen sehen.

§. 109.

Zusatz. Es ist klar: 1.) Daß die Linien BS und AP Tangenten der Parabel BMCNT sind.

2.) Daß AH der vierte Theil des Parameters der Axe CD dieser krummen Linie ist. Daß sie es folglich auch von der Parabel AMD, die der vorigen vollkommen gleich ist, sey (§. 105).

3.) Die Linie von unbestimmter Länge HO, die auf HB perpendiculair stehet, die Directrix derselben sey (§. 90).

4.) Daß ST = 4FQ = 4AB sey, weil BS = 4BF;

5.) Daß die Weite BT oder die gröste Ausdehnung der Parabel gleich 4AF oder 4BQ sey.

6.) Daß ihre gröste Höhe CD = AB sey;

7.) Daß endlich die Linie der Höhe HB so groß sey, als die Summe aus der grösten Erhöhung der Parabel oder ihrer Axe CD = AB und dem vierten Theil AH von ihrem Parameter.

§. 110.

Anstatt der Richtungslinie BS (Fig. 23.) lasset uns irgend eine andere Richtungslinie Br nehmen, die innerhalb dem rechten Winkel HBT ist und mit dem Horizonte Bt den Winkel rBt macht. Lasset uns jederzeit voraussetzen, daß der Körper durch eine gleichförmige Bewegung nach der Richtung Br mit einer Geschwindigkeit getrieben werde, die er würde erhalten haben, wenn er von H nach B gefallen wäre. Das heißt, er mag sich mit einer solchen Geschwindigkeit bewegen, wodurch er in 4 Sekunden die Parabel BCT beschrieb, indem er nach der Richtung BS getrieben war: Lasset uns nun sehen, was für einen Theil von Br der bewegte Körper mit einer gleichförmigen Bewegung in dem Augenblick wird durchlaufen haben, in welchem ihn seine Schwere nach dem Horizont zurück bringt.

§. 111.

Dritter Hauptsatz. Wenn man über die Linie der Höhe HB einen halben Cirkel beschreibt, so behaupte ich, daß der bewegte Körper, der mit einer gleichförmigen Bewegung nach der Richtung Br getrieben wird, just 4Bh = Br in dem Augenblicke werde durchgelaufen haben, wenn er in dem Punkt t auf die Horinzontallinie fallen wird.

Beweis. Wir wollen sogleich diejenige Zeit suchen, die der Körper anwenden muß um 4Bh oder Br mit einer gleich-

gleichförmigen Bewegung zu durchlaufen. Darauf wollen wir untersuchen, ob er vermöge seiner Schwere just am Ende dieser Zeit den Horizont wieder habe erreichen müssen?

Wenn die Geschwindigkeiten bey einer gleichförmigen Bewegung sich gleich sind, so verhalten sich die durchgelaufenen Räume zu einander, wie die Zeiten, die der Körper zur Bewegung angewendet hat (*a*); Folglich verhalten sich 4BF oder BS zu 4Bh oder Br wie 4 Sekunden, die zum durchlaufen der Linie BS angewendet sind, zu einem gewissen 4ten Gliede = T. Dieses 4te Glied wird die Zeit seyn, die der bewegte Körper gebraucht hat, Br mit einer gleichförmigen Bewegung zu beschreiben. Nun verhält sich aber $4BF : 4Bh = 4 : T$; Folglich ist $T = \frac{4Bh}{BF}$ = dem Werthe für die Zeit, in welcher die Linie Bh oder Br durchgelaufen seyn wird.

Lasset uns itzt den Raum, welchen der Körper während der Zeit $\frac{4Bh}{BF}$ im fallen zurück gelegt hat, z nennen. Wir erinnern uns noch (§. 106), daß der Raum ST, den er im Fallen in 4 Sekunden durchgelaufen ist, gleich 4AB sey. Es verhalten sich aber die im Fallen durchlaufene Räume zu einander wie die Quadrate der Zeiten (§ 97); Folglich verhält sich $z : 4AB = \frac{16\,\overline{Bh}^2}{\overline{BF}^2} : 16$. Folglich ist $z = \frac{4 \times AB \times \overline{Bh}^2}{\overline{BF}^2}$ (M). Nun ist aber klar, wenn man die Linien hH und FH ausziehet, daß $\overline{Bh}^2 = BH \times aB$ (*) und eben

L 4 so

(*a*) Denn wenn man beständig mit einem gleichen Schritte fortgehet, so wird man einen desto grössern Weg gemacht haben, je mehr Zeit man angewendet hat.

(*) Das heißt, Bh ist die mittlere Proportionallinie zwischen BH und AB oder $BH : Bh = Bh : aB$. Die Richtigkeit dieses Wer=

so $\overline{BF}^2 = BH \times AB$ sey; Wenn man folglich diese Werthe von $\overline{Bh}^2$ und $\overline{BF}^2$ in der Gleichung M setzet, so wird diese Gleichung heraus kommen: $z = \frac{4 \times AB \times BH \times aB}{BH \times AB} = 4aB = 4hl$, wenn man die Linie hl als perpendiculair annimmt. Es ist aber $rt = 4hl$, weil $Br = 4bh$ ist; Folglich ist $z = rt$, das heißt, der bewegte Körper wird nach seiner Schwere rt durchgelaufen haben oder wird auf den Horizont just in dem Augenblick zurück kommen, indem er Br oder $4Bh$ mit einer gleichförmigen Bewegung, und mit einer Geschwindigkeit, die er erhalten hat, indem er von H nach B gefallen wäre, würde zurück gelegt haben. W. z. E. W.

§. 112.

Anmerkung. Ich halte mich nicht mit dem Beweise auf, daß nach dieser Hypothese der Körper nicht eher nach dem Horizonte herunter gehen könne, als biß er nach r gekommen und daß er darauf von diesem Punkt auf den Horizont herunter gefallen. Denn es kommt mir dieses ganz offenbar und klar vor. Wenigstens kann es sehr leicht aus den einmal vestgesetzten Gründen hergeleitet werden, wenn man Fuß vor Fuß der vorigen Demonstration folget.

§. 113.

Erster Zusatz. Folglich ist die Ziellinie oder Weite des Wurfs nach der Richtung Br, oder welches einerley ist, die Weite der neuen Parabel durch die Horizontallinie Bt bestimmt. Eben so ist auch die Weite der Parabel BCT, die der Körper nach der Richtung BS beschreibt, durch

---

Verhältnisses erhellt aber ohne Schwürigkeit daher, weil die beyden Triangel HBh und aBh aus Gründen der Elementargeometrie sich ähnlich sind. B.

durch die Linie BT bestimmt. Da also Br die Tangente der neuen Parabel ist, so wird die Perpendiculairlinie ex, die man aus der Mitte e der Linie Bt aufrichtet, die Subtangente (§. 28.) und folglich das doppelte der ihr zugehörigen Abscisse seyn (§. 29). Nun ist Bx das Duplum von Bh; Folglich wird auch ex das Duplum von hl oder aB seyn. Allein es ist $a\text{B} = xd$, weil $\text{B}h = hx$; Folglich wird auch $ex = 2xd = xd + de$ seyn. Folglich ist $de = xd$; Folglich ist ex, das Duplum von xd, auch das Duplum von de. Folglich wird die Linie de die Abscisse seyn; Der Punkt d der Scheitelpunkt der Parabel Bdt, welche sich nicht über der mit dem Horizont aus dem Punkt h parallel gezogenen Linie ag erhebet, und folglich ist aB oder de die gröste Erhebung des Wurfs.

§. 114.

Zweyter Zusatz. Man wird eben so leicht finden, daß die gröste Erhöhung aB oder de der vierte Theil von rt sey. Denn aB ist $= hl$. Nun ist $hl = \frac{rt}{4}$ weil $\text{B}h = \frac{\text{B}r}{4}$; Folglich ist aB oder de der vierte Theil von rt.

§. 115.

Dritter Zusatz. Auch wird man gewahr werden, daß die Weite $\text{B}t = 4ah$ oder 4Bl sey. Denn Br ist $= 4\text{B}h$. Deswegen ist auch $\text{B}t = 4\text{B}l$ oder $4ah$.

§. 116.

Vierter Zusatz. Es ist auch dieses offenbar, daß aH der vierte Theil des Parameters p von der Axe de der Parabel Bdt sey. Denn es ist $\overline{\text{B}e}^2 = de \times p$ (§. 20). Nun ist $\text{B}e = ad = 2ah$. Folglich ist $\overline{\text{B}e}^2 = 4\overline{ah}^2$; Folglich ist $de \times p = 4\overline{ah}^2$. Allein $\overline{ah}^2 = a\text{H} \times a\text{B}$ (Geometrie); Folglich ist

$4\overline{ah}^2 = aH \times aB = 4aH \times de$; Folglich ist $de \times p = 4aH \times de$; Folglich ist $4aH = p$ oder $aH = \frac{p}{4}$.

§. 117.

Fünfter Zusatz. Die Perpendiculairlinie HO von unbestimmter Länge, die auf der Linie der Höhe aufgerichtet ist, ist also die Directrix der Parabel Bdt (§. 90), so, wie sie es auch von der Parabel BCT ist (§. 109).

§. 118.

Sechster Zusatz. Endlich siehet man noch, daß die Linie der Höhe HB gleich sey der Summe aus der Axe $de = a$B und dem vierten Theil aH ihres Parameters.

So sind demnach die Linien, die wir so eben betrachtet haben, in Absicht auf die Parabel Bdt die nämlichen mit denen, wovon wir bey der Parabel BCT Gebrauch gemacht haben. Dieses geschiehet auch bey allen übrigen Würfen, deren Richtungslinie zwischen HB und Bt ist, wenn sie nur mit der nämlichen Gewalt geschehen.

§. 119.

Anmerkung. Man sagt, daß die **Weite eines Wurfs** oder die **Weite einer Parabel** mit der Batterie (a) **Wasserpaß** liege, wenn der Punkt, wo der bewegte Körper niederfällt, in der nämlichen Horizontallinie mit dem Punkt liegt, wovon der bewegte Körper ausflog. So sind die Punkte T und t der Horizontallinie Bt in Absicht auf den

---

(a) Eine Batterie ist ein besonderer angelegter Ort, gemeiniglich mit einem Parapet oder Brustwehre versehen, auf welcher man die Kanonen und Mörser abfeuret, um einen Feind oder eine Vestung zu beschiessen.

den Punkt B, wovon der Körper ausflog, wagrecht. Den **Winkel der Erhöhung** nennet man einen jeden Winkel SBt oder rBt, der durch die Horizontallinie und durch die **Linie des Wurfs** gemacht wird, die nach irgend einer gegen den Horizont schiefen Richtung BS oder Br gehet.

§. 120.

Vierter Hauptsatz, der sehr nothwendig ist. Die Weiten verschiedener Würfe, die Wasserpaß mit der Batterie sind, oder welches einerley ist, die Weiten Bt und BT der Parabeln Bdt und BCT, die durch einen Körper beschrieben sind, der mit einer gleichen Stärke, nach der gegen den Horizont schiefen Richtungslinie Br oder BS geschossen ist, verhalten sich zu einander, wie die Sinus des doppelten Winkels der Erhöhung rBt und SBt.

Beweis. Ziehet aus dem Centrum E die Halbmesser Eh und EF und bemerket, daß der Winkel am Mittelpunkt hEB den ganzen Bogen Bh zum Maaß habe, und daß der Erhöhungswinkel rBt nur die Helfte desselben zum Maaß habe. Denn er wird durch eine Sehne Bh und die Tangente Bt des halben Cirkels gemacht (*). Eben so bemerket, daß

(*) Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellet auf folgende Art: Vermöge der Construction ist Bt eine Tangente. Von dieser weiß man aber aus der Trigonometrie daß sie eine solche Linie sey, die mit dem Radius oder Diameter der an den Berührungspunkt gezogen ist, einen rechten Winkel mache. Folglich ist der Winkel aBt ein rechter Winkel; Folglich gleich dem Bogen HhB, als dem halben Cirkel, dividirt durch $2 = \frac{HhB}{2} = \frac{Hh}{2} + \frac{hB}{2}$. Nun ist aber der Winkel aBt oder $HBt =$ dem Winkel $hBt + HBh$. Folglich sind die Winkel $hBt + HBh = \frac{Hh}{2} + \frac{hB}{2}$. Es ist aber der Winkel HBh ein Winkel an der Peripherie und folglich das Maaß desselben $= \frac{Hh}{2}$. Folglich ist der Winkel $hBt = \frac{hB}{2}$. W. z. E. W. B.

daß der Winkel BEF doppelt so groß sey, als der Erhöhungswinkel SBt, indem der erste den ganzen Bogen BF, der andere aber nur die Helfte dieses Bogens zum Maaß hat. Nun ist aber ah der Sinus des Winkels hEB (Trigonometrie). Folglich ist ah der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels rBt. Eben so ist AF der Sinus des Winkels BEF und der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels SBt Folglich kommt es im Beweise darauf hinaus, zu zeigen daß $Bt : BT = ah : AF$. Dieses ist sehr leicht. Denn wir haben im §. 115 gesehen, daß $Bt = 4ah$ und $BT = 4AF$ (Nro. 5. des §. 109); Folglich verhält sich $Bt : BT = 4ah : 4AF = ah : AF$. W. z. E. W.

§. 121.

Erster Zusatz. Hieraus folgt, daß der gröste unter allen Würfen oder die gröste von allen Weiten der Parabel, die durch einerley Körper mit der nämlichen Stärke nach verschiedenen Graden der Erhöhung geworfen ist, beschrieben sind, diejenige sey, wenn der Körper unter einem Winkel von 45 Graden abgeschossen ist (*). Dieses heißt nach einem **Bogenschuß von der grösten Erhöhung schiessen**, (tirer à toute Volée). Wir haben so eben gesehen, daß diese Weiten beständig dem vierfachen Sinus des Dupli ihres Erhöhungswinkels gleich sind. Es ist aber der Sinus des doppelten Winkels von 45° oder der Sinus eines Winkels von 90 Graden der Sinus totus und der gröste von allen Sinus. Folglich

(*) Der erste Erfinder von dieser Wahrheit ist ohne allen Zweifel der Italiänische Mathematiker, der in der Helfte des 16ten Jahrhunderts schrieb, und der sich einen unsterblichen Ruhm durch Auflösung der cubischen Aequationen, die gemeiniglich dem Cardanus zugeschrieben werden, erworben hat. Man sehe des Robins neue Grundsätze der Artillerie von Herrn **Euler** übersetzt. Seite 43. B.

lich das vierfache desselben die gröste Weite. Dieses stimmet mit der Erfahrung überein.

Man siehet dieses auch bey Betrachtung der 24ten Figur, in welcher die, mit dem Erhöhungswinkel hBT von 45 Graden übereinstimmende Weite $4Eh$ gleich ist, und wo die Weiten die zu der Erhöhung MBT die über 45° und FBT die unter 45° ist, gehören, so groß sind, als 4LM oder 4AF; Da aber Eh offenbar grösser als eine jede andere Ordinate LM oder AF ist, die über oder unter dem Centrum E genommen ist, so erhellet es augenscheinlich, daß $4Eh$ eine grössere Weite ist als 4LM oder 4AF. Auch siehet man zugleich, daß der gröste Wurf oder die gröste Weite $4Eh$ doppelt so groß, als die Linie der Höhe HB sey, die jederzeit so groß ist, als $2Eh$.

§. 122.

Zweyter Zusatz. Die Weiten sind sich gleich, wenn der bewegte Körper beständig mit einerley Stärke unter Erhöhungswinkeln die gleich weit von 45° entfernt sind, geworfen wird (*). Denn es sind in diesem Falle die Sinus dieser Winkel und folglich auch das vierfache derselben sich gleich.

Es sey in der 24ten Figur der Winkel FBT ein Winkel von 30° und der Winkel MBT von 60°. Diese sind gleich weit von 45° entfernt, indem der erste 15° unter 45° und der andere 15° über 45° hat. Nun behaupte ich, daß auch die Weiten sich gleich sind. Es wird nämlich die erstere Weite durch das vierfache eines Sinus eines Winkels von 60° und

(*) Oder die Weiten sind sich gleich, wenn die Körper unter Winkeln geworfen werden, die zusammen 90 Grad ausmachen, wie 70 und 20, oder 80 und 10. Diesen schönen Lehrsatz kannte der Spanier *Diego Vfano* um das Jahr 1611 schon. Gravesand hat dieses durch Experimente mit springendem Quecksilber bestätigt. Man sehe seine *Phys. Elem. Math. T.* 1. B.

und die andere durch das vierfache des Sinus von 120° als das doppelte von 60° bestimmt. Es ist aber aus der Trigonometrie bekannt, daß der Sinus von 120° just der nämliche ist, als der Sinus von 60°; denn man muß, um den Sinus von 120° zu haben, den Sinus des Complements von 180° nehmen (*). Dieses ist der Sinus eines Winkels von 60°. Folglich sind die Sinus sich gleich. Es müssen also nothwendig auch die Quadrupla derselben sich gleich seyn. Dieses wird auch durch die Erfahrung bestätigt.

§. 123.

Dritter Zusatz. Es ist indessen bey der Ausübung nicht immer einerley, einen von diesen Winkeln statt des andern zu nehmen. Will man z. E. ein Gebäude zerschmettern, so erkennet man, daß es schicklicher sey, sich des Winkels über 45° zu bedienen, weil alsdenn die Bombe sich biß zur Höhe LB (§. 113) erhebet. Diese ist aber höher, als die Höhe AB des Wurfs unter 45°. Folglich wird die Bombe mit viel grösserer Stärke fallen müssen, indem ihre Geschwindigkeit durch das höhere herunter fallen vermehret wird. Man muß sich hingegen an dem Winkel unter 45° halten, wenn man denjenigen beschwerlich fallen will, die man auf solche Art angreift (**). Denn die Bombe erhebet sich nicht so hoch und

(*) Denn in der Trigonometrie wird auf eine leichte Art bewiesen, daß zwey Winkel die zusammen 180° ausmachen, z. E. ein stumpfer und ein spitziger beyde einerley Sinus haben. B.

(**) Es ist auch dieses merkwürdig, daß die Schußweiten von Würfen, die noch nicht die Erhöhung von 45° haben, bey einerley Ladung viel gleicher ausfallen. Denn die Bomben steigen nicht sehr hoch in die Luft und bekommen daher von derselben auch wenigen Widerstand. Oefters sind sie auf der einen Seiten auch noch schwerer als auf der andern. In diesem Falle werden sie bey geringerer Höhe auch nicht so sehr aus ihrer Bahn weichen, als bey einer grössern, wo sie dadurch öfters merklich rechts oder links von der Bahn abgeschlendert werden. Man lese Belidors vermischte Werke. p. 307. B.

und gehet durch einen kürzern Weg. Es ist also klar, daß sie dem Feinde weniger Zeit läßt sich gegen die Stücke zu bedecken, die sie aller Orten hinschleudert, wenn sie zerspringt (*a*).

§. 124.

Vierter Zusatz. Die Weite eines Wurfes unter einem Winkel von 15° ist die Helfte der grösten Weite oder der Helfte der Weite von 45° gleich. Denn die Weite von 15° verhält sich zur Weite von 45° wie der Sinus eines Winkels von 30° als das Duplum von 15° sich zum Sinus totus oder dem Duplum von 45° verhält. Es ist aber der Sinus von 30° die Helfte des Sinus totus oder des Sinus von 90° (*).

Folg-

(*a*) Eine Bombe ist eine grosse hohle Kugel, die man mit Pulver anfüllet, mit welcher ein Brandrohr communicirt, welches ungefehr so lange das Feuer erhalten muß, als die Bombe in der Luft ist; Man schießt oder wirft die Bomben vermittelst eines kurzen Stücks, welches man einen Mörser nennet. Wenn sie gegen das Ende ihres Falls kommt, so zündet das Brandrohr, in welches man vor dem Abschiessen Feuer gethan, das in der Bombe enthaltene Pulver an, die alsdenn sogleich crepirt und in Stücken zerspringt.

(*) Schwächern Lesern zu gefallen will ich hier den Beweis davon einrücken. Ich setze nur dieses voraus, daß man wisse, was überhaupt der Sinus eines Winkels sey. Imgleichen was der Sinus totus sey und daß dieser jederzeit dem Halbmesser des Cirkels gleich sey. Nun mache man einen Winkel am Centrum ACD, der 30° groß ist (Fig. 8. Tab. XI) so hat der Bogen DA 30° und DE ist der Sinus dieses Winkels von 30°. Itzt mache man den Bogen AB auch = 30° und ziehe den Radius BC, so ist, wenn man BE auszieht dieses gleichfals ein Sinus von 30°; Folglich ist DE = BE. Folglich DE = ½BD. Vermöge der Construction ist aber der Bogen BD = 60°. Folglich die Sehne unter demselben BD = der Seite eines regulairen 6Ecks = dem Radius des Cirkels (Geometrie) = dem Sinus totus. Folglich ist BD = Sinus totus. Folglich ½BD = ½ Sinus totus. Es ist aber ½BD = DE = Sinus von 30°. Folglich ist der Sinus eines Winkels von 30° = ½ dem Sinus totus. W. z. E. W. B.

Folglich ist die Weite des Wurfs unter einem Winkel von 15°
gleich der Helfte des Wurfs unter einem Winkel von 45°,
das heißt, gleich der Helfte der grösten Schußweite (§. 121).

§. 125.

Anmerkung. Auch ausserdem ist es leicht die gröste Schußweite zu finden, wenn man bloß die Schußweite desjenigen Wurfs mißt, der mit einem Winkel von 15° geschah. Herr **Belidor** hat sich dieser Methode in seinem **französischen Bombardier** bedienet, um eine Tabelle von den verschiedenen Schußweiten der nämlichen Bombe zu verfertigen, die mit der nämlichen Kraft, nach verschiedenen Graden der Erhöhung geworfen wird. Dieses ist eine sehr schätzbare Arbeit und ist auf das stärkste zum Gebrauch zu empfehlen. Man wird daselbst eine sehr schöne Anzahl der feinsten Beobachtungen finden, die die Ausübung beym Bombenwerfen zu einer beträchtlichen Vollkommenheit bringen kann. Ich will nur bemerken, daß der Verfasser die Theorie davon in seinem *Cour de Mathematique* (*) gegeben und es daher für gut befunden hat, sie in seinem französischen Bombardier zu unterdrücken; daß man folglich dieses Buch nicht lesen kann, wo man nicht wenigstens alles dieses, was wir bißher vorgetragen haben wohl begriffen hat.

§. 126.

Fünfter Zusatz. Die Schußweiten wachsen von der Horizontallinie an biß zum 45ten Grade. Nachher nehmen sie wieder ab biß der Erhöhungswinkel einem rechten Winkel gleich wird. In diesem Falle wird die Weite Null seyn, und die Bombe würde grade in den Mund des Mörses zurück fallen, wenn sich gar keine Hinderniß entgegensetzte. Dieses ist alles aus der Figur klar.

§. 127.

(*) Dieses Buch ist vom Bion ins teutsche übersetzt, und die 2te Ausgabe davon zu Wien 1759 herausgekommen. B.

§. 127.

Sechster Zusatz. Die Linie der Höhe HB ist jederzeit die Helfte der grösten Schußweite. Denn es ist die Linie der Höhe HB = 2E*h*. Ist sie also nicht offenbar die Helfte von 4E*h*, welches die gröste Schußweite ist (§. 121)?

§. 128.

Siebender Zusatz. Es ist unmöglich, daß die Bombe höher als biß zu dem Punkt H steige, das heißt, es ist unmöglich, daß sie zu einer vertikalen Höhe steige, die grösser ist, als die Helfte der grösten Schußweite. Denn ein Körper, der mit derjenigen Kraft geworfen wird, die er erlangt hat, indem er von H nach B fällt, kann durchaus nicht höher steigen, als biß zu dem Punkt H, von welchem er herunter zu fallen anfieng, um diese Kraft zu erhalten (§. 103; Deswegen sind alle Würfe oder alle Neigungswinkel, die wir nach dieser Figur annehmen können, in dem halben Cirkel HMB eingeschlossen.

§. 129.

Achter Zusatz. Ich will es hier zum Voraus anmerken, weil sich sonst keine Gelegenheit darzu finden wird, daß der Scheitelpunkt von allen Parabeln, die durch den Körper beschrieben werden, der mit der nämlichen Kraft nach allen Neigungen oder Richtungen geworfen ist, sich in einer Ellypse BCDGH befinden, deren grosse Axe der grösten Schußweite 4E*h*, und deren kleine Axe der Linie der Höhe HB = 2E*h*, der Helfte der grösten Schußweite gleich ist (§. 127); daß also die grosse Axe der Ellypse die Helfte der kleinen ist.

Beweis. Man nehme die 23te Figur wieder vor sich; Man bemerke, daß der Scheitelpunkt *d* der Parabel B*dt*, die unter der Richtungslinie B*h* beschrieben ist, von der Linie der Höhe HB, um eine Linie *ad* entfernt sey, die so groß ist, als *zah*. Denn in den beyden ähnlichen Triangeln *ah*B und

dhx ist Bh=hx; Folglich ist $ah=hd$ und folglich $ad=2ah$. Auch bemerke man, daß der Scheitelpunkt C der Parabel BCT, die unter der Richtung BF beschrieben ist, von der Linie der Höhe HB um eine Linie entfernt sey, die so groß ist, als 2AF=AC. Wenn man folglich (Fig. 24) MG=LM, hD=Eh; FC=AF macht, so wird der Punkt G der Scheitelpunkt der Parabel unter der Erhöhung BM, der Punkt D der Scheitelpunkt unter der Direction Bh, und C unter der Direction BF seyn. Es ist also zu beweisen, daß die Punkte G, D, C, und alle andere, die eben so bestimmt sind, in der gegebenen Ellypse sind. Nun ist aber vermöge der Construction MG=LM und also LG=2LM; Folglich $\overline{LG}^2=4\overline{LM}^2$ Eben so ist $\overline{ED}^2=4\overline{Eh}^2$; Folglich verhält sich $\overline{LG}^2 : 4\overline{LM}^2=\overline{ED}^2 : 4\overline{Eh}^2$ oder $\overline{LG}^2 : \overline{LM}^2=\overline{ED}^2 : \overline{Eh}^2$ (Arithmetik). Es ist aber $\overline{LM}^2=HL\times LB$ (Geometrie); Folglich verhält sich $\overline{LG}^2$: $HL\times LB=\overline{ED}^2 : \overline{Eh}^2=4\overline{ED}^2$ oder $4\overline{HB}^2 : 4\overline{Eh}^2$. Das heißt, es verhält sich das Quadrat von der Ordinate LG nämlich $\overline{LG}^2$ zu dem Rectangel HL×LB der Segmente HL und LB, die durch diese Ordinaten gemacht sind, wie das Quadrat von 2ED oder 2HB, nämlich $4\overline{ED}^2$ oder $4\overline{HB}^2$ zu dem Quadrat von 2Eh oder HB, nämlich $4\overline{Eh}^2$: Dieses ist aber vollkommen die characteristische Eigenschaft der Ellypse, die zur grossen Axe 2ED oder 2HB, das heißt, die gröste Schußweite 4Eh und zur kleinen Axe 2Eh=HB hat. (§. 12. der Ellypse); Folglich....

§ 130.

Neunter Zusatz. Endlich ist noch die Perpendicularlinie HO die gemeinschaftliche Directrix aller Parabeln, die durch einen Körper beschrieben werden, der von dem Punkt B nach

nach allen möglichen Erhöhungen über die Horizontallinie BT mit einer Kraft geworfen ist, die er im herunterfallen von H nach B erhalten hat.

§. 131.

Anmerkung. Nachdem wir gesehen haben, was bey einem Körper geschehen müsse, welcher nach einer beliebigen Directionslinie BS oder B*r*, die gegen den Horizont B*t* schief ist (Fig. 23) mit einer Kraft geworfen wird, die er im herunterfallen von H nach B erlanget hat, so lasset uns untersuchen, welches die Schußweite dieses nämlichen Körpers seyn müsse, wenn er mit dem Horizont parallel abgeschossen wird. Man begreift wohl, daß man sich hier eigentlich nur um die Weite des Flugs (*coup de Volée*) bekümmere, das heißt, daß man nur wissen wolle, wie groß die Weite in grader Linie über der Erde von dem Orte, in welchem der Körper seine Bewegung in der Luft anfieng, biß dahin sey, wo ihn seine Schwere wieder zurück auf die Erde führt? Man hat nämlich keine Regel und man kann auch in Ansehung desjenigen Raums, welchen eine Bombe im Rollen, nachdem sie niedergefallen ist, durchlaufen kann, keine angeben. Dieses ist wegen den Irregularitäten des Erdbodens und wegen der verschiedenen und mannigfaltigen Hindernisse unmöglich. Man hat aber noch mehrern Grund nur diese verlangte Weite zu berechnen, weil die Bomben fast allemal in dem Augenblicke ihres Falls auf die Erde zerspringen sollen, wenn man sie für Menschen gebraucht, oder weil sie tief einschlagen müssen, wenn man Gebäude dadurch niederreissen oder zerschmettern will. Es würde daher die Weite einer Bombe, die in der Direction des Horizonts selbst abgeschossen würde, Null seyn. Weil die Punkte des Anfangs ihrer Bewegung und ihres Falls einerley wären. Wir müssen also nur dieses untersuchen, welches die Weite eines Wurfs seyn müsse, der über der Erdfläche mit dem Horizont parallel geschiehet. Man nennet aber einen solchen Wurf den graden Wurf oder den Kernschuß (*Portée de but en blanc*).

§. 132.

Fünfte Aufgabe. Der Kernschuß eines bewegten Körpers, der in B über der Horizontallinie DS sich befindet (Fig. 25) und nach einer mit dem Horizont perallellaufenden Richtungslinie BT und zwar mit einer Kraft abgeschossen wird, die er im herunterfallen z. E. von H in B erlangt hat, ist doppelt so groß, als die mittlere geometrische Proportionallinie BM zwischen der Linie der Höhe HB oder welches einerley ist, zwischen der Helfte der grösten Schußweite (§. 127) und der Entfernung BD vom Horizont.

Wenn man z. E. über dem Diameter HD einen halben Cirkel beschreibt und nun das Duplum von BM, als der mittlern Proportionallinie zwischen HB und BD (Geometrie) von D in O auf dem Horizont DS trägt, so ist zu zeigen, daß der Körper, nachdem er mit einer gleichförmigen Bewegung DO oder BR = 2BM mit einer Gschwindigkeit durchlaufen ist, die er im herunterfallen von H nach B erhalten hat, accurat in der nämlichen Zeit von der Höhe BD oder RO fallen werde.

Beweis. Es sey T die Zeit, die der Körper gebraucht hat, um von H nach B zu fallen; t die Zeit, welche er nöthig hat, um BD vermöge seiner Schwere zu durchlaufen. Man weiß, daß der bewegte Körper vermöge seiner Geschwindigkeit, die er im herunterfallen von H nach B in der Zeit T erlangt hat, 2HB oder das Duplum von HB in der nämlichen Zeit T durchlaufen müsse (§. 102). Wenn ferner bey einer gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeiten sich gleich sind, so verhalten sich die durchgelaufenen Räume 2HB und 2BM oder DO zu einander, wie die Zeiten T und t, die sie zur Bewegung gebraucht haben; Folglich verhält sich 2HB : 2BM oder HB : BM = T : t. Folglich ist $t = \frac{BM \times T}{HB}$ und es ist dieses ein Ausdruck für

die

die Zeit, die der Körper gebraucht hat, um 2BM oder DO mit einer gleichförmigen Bewegung zu durchlaufen.

Lasset uns nun untersuchen, ob der bewegte Körper accurat in der Zeit $\frac{BM \times T}{HB}$ vermöge seiner Schwere von der Höhe BD oder RO gefallen sey? Es mag eine Höhe x seyn, welche sie will, so verhält sie sich doch zur Höhe HB, die durch den Fall in der Zeit T durchgelaufen ist, wie das Quadrat der Zeit $\frac{BM \times T}{HB}$ zum Quadrat der Zeit T (§. 97). oder es verhält sich $x : HB = \frac{\overline{BM}^2 \times TT}{\overline{HB}^2} : TT$. Daraus schließt man, daß $x = \frac{\overline{BM}^2}{HB}$ sey. Dieses zeiget an, daß der Körper in der Zeit, die er gebraucht hat, um 2BM oder DO mit gleichförmiger Bewegung zu durchlaufen, vermöge seiner Schwere von einer Höhe gefallen sey, die $= \frac{\overline{BM}^2}{HB}$. Dieses ist aber accurat die Höhe BD oder RO; weil nach der Construction HB : BM = BM : BD. Folglich ist auch BD oder RO $= \frac{\overline{BM}^2}{HB}$; Folglich.... W. z. E. W.

§. 133.

Wollet ihr itzund wissen, wie man nach unserer Hypothese habe finden können, daß der Kernschuß DO oder BR doppelt so groß als die mittlere geometrische Proportionallinie BM zwischen HB und BD seyn müsse, das heißt, wie man den Punkt O habe bestimmen können, in welchem der Körper durch seine Schwere wieder auf den Horizont fallen muß? Hier ist ein Mittel, es auch begreiflich zu machen. Es verhalten

sich die Räume, die im Fallen durchgelaufen werden, wie die Quadrate der Zeiten, die man gebraucht, um sie zu durchlaufen. Man bekommt also folgendes Verhältniß: $HB : BD = TT : tt$ (§. 97). Folglich ist $tt = \frac{TT \times BD}{HB}$; Folglich ist $t = T\sqrt{\frac{BD}{HB}}$. Dieses ist der Ausdruck für die Zeit, die der bewegte Körper zugebracht hat, um von B in D oder von einer Höhe, die BD gleich ist, das heißt, biß auf den Horizont DS zu fallen. Es ist folglich noch zu untersuchen, welchen Theil der Horizontallinie BT der Körper mit gleichförmiger Bewegung in der Zeit $T\sqrt{\frac{BD}{HB}}$ mit derjenigen Geschwindigkeit, die er durch den Fall von H nach B erlangt hat, durchlaufen könne? Man weiß, daß der bewegte Körper in der Zeit T mit der nämlichen erlangten Geschwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung 2HB durchlaufen müsse (§. 102); Folglich wird er in der Zeit $T \times \sqrt{\frac{BD}{HB}}$, das heißt, in der Zeit t durchlaufen $2HB \times \sqrt{\frac{BD}{HB}} = 2\sqrt{\frac{(\overline{HB}^2 \times BD)}{HB}} = 2\sqrt{(HB \times BD)}$. Nun verhalten sich aber nach der Construction $HB : BM = BM : BD$; Folglich ist $\overline{BM}^2 = HB \times BD$ oder $BM = \sqrt{(HB \times BD)}$; Folglich ist $2BM = 2\sqrt{(HB \times BD)}$. Hieraus erkennet man, daß er während der Zeit $t = T \times \sqrt{\frac{BD}{HB}}$, die er angewendet hat, um von B auf den Horizont DS zu fallen, er mit einer gleichförmigen Bewegung und mit der Geschwindigkeit, die er durch den Fall von H nach B erhalten hat, eine Länge BR oder DO durchlaufen werde, die doppelt so groß ist als BM oder als die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Linie der Höhe HB, als der Helfte der grösten Schußweite, und zwischen BD oder RO, als dessen

Ent-

Entfernung über dem Horizont. Dieses ist nun alles dasjenige, was wir im vorhergehenden Satze angenommen und als wahr bewiesen haben, ohne daß wir zeigten, wie wir darzu gekommen sind (a).

Anwendung der ganzen vorhergehenden Theorie auf die Praxis.

§. 134.

Aufgabe. Die Weite einer Parabel oder eines Wurfs zu finden, dessen Ebene mit den Batterien in einerley Höhe liegt, vorausgesetzt, daß der Winkel der Erhöhung bestimmt sey.

Auflösung. Man muß anfänglich einen sehr genauen Probeschuß machen, indem man ein Stück unter einem beliebigen Erhöhungswinkel, den ich a nenne, abschießt. Darauf muß man mit der grösten und strengsten Genauigkeit die Weite p dieses Wurfs messen. Hierdurch wird man sogleich sehen, daß man mit einer ungemeinen Leichtigkeit alle Schußweiten des nämlichen Stücks unter jeder Erhöhung bestimmen könne.

 Wenn

(a) Ich ergreife zum besten der Anfänger so viel, als möglich ist, die Gelegenheit den synthetischen und analytischen Vortrag mit einander zu vergleichen, um sie zu überzeugen, wie groß der Vorzug des letztern gegen den erstern sey. Durch den synthetischen Vortrag zeigt man alle Wahrheiten, als entdeckt und man beweiset, daß sie wirklich so sind, als man sie annimmt. Aber durch die Analysis zeigt man, wie man sie entdeckt habe; Die Synthesis zeigt die Geburten des Genies; Die Analysis das Genie selbst. In der synthesischen Lehrart kann man nicht zweyfeln, daß man nicht alles, was man begreift, andern schuldig sey. In der Analysis hat man öfters eine Versuchung zu glauben, daß man die Entdeckung nur allein sich schuldig sey; Durch die Synthesis wird das Gedächtniß geübt, durch die Analysis das Genie ausgebauet,

Wenn nur die Bomben oder geschossenen Kugeln immer von einem Caliber und von einerley Gewicht sind, und wenn sie mit einerley Stärke, das heißt, mit der nämlichen Menge Pulvers, von welchem man voraussetzt, daß es die nämliche Stärke habe, geworfen sind.

Wollte man eine Bombe unter einem Winkel von 30° werfen und den Ort wissen, wohin sie fallen würde, so setzet man folgendes Verhältniß an: Der Sinus des doppelten Probewinkels *a* verhält sich zum Sinus des doppelten Winkels von 30° oder zum Sinus von 60°, wie die Weite des Probeschusses zum vierten Gliede *x*. Dieses wird die gesuchte Weite seyn (§. 120). Nun sind aber die drey ersten Glieder bekannt, folglich wird auch das vierte bey jedem Erhöhungswinkel bekannt seyn.

§. 135.

Aufgabe. Den Erhöhungswinkel zu finden, welchen man einem Geschütze geben muß, um die Kugel oder Bombe auf eine bestimmte Weite E zu schiessen (*a*).

Auflösung. Setzet dieses Verhältniß an: Wie sich die Schußweite *p* zur gegebenen Weite E verhält, so verhält sich der Sinus des doppelten Winkels beym Probeschuß zu einem vierten Gliede *y*. Dieses wird der Sinus des gedoppelten gesuchten Winkels seyn. Man kann daher diesen Sinus

(*a*) Es ist für sich klar, daß diese Weite die gröste Schußweite nicht übertreffen dürfe, das heißt, sie muß nicht grösser als diejenige Weite seyn, wohin ein Geschütz unter einem Winkel von 45° schießt (§. 121). Deswegen mögte ich anrathen den Probeschuß sogleich unter einem Winkel von 45°, zu thun, damit man gleich anfangs die gröste Schußweite kenne; oder, welches ich noch lieber sähe, unter einem Winkel von 15°, dessen doppelte Weite die gröste Schußweite anzeigt (§. 124), denn man hätte alsdenn weniger Mühe den Probeschuß zu messen und zugleich weniger Irrung zu befürchten.

Sinus finden, weil die drey ersten Glieder der Verhältniß gegeben sind. Folglich kann man auch den Winkel dieses Sinus finden, dessen Helfte den gesuchten Erhöhungswinkel anzeigt.

§. 136.

Anmerkung. Es gibt 2 Winkel, die gleich weit von 45° entfernt sind und die beyde dieser Aufgabe eine Genüge thun (§. 122). Man muß aber doch denjenigen wählen, der zu der Absicht der schicklichste ist. Wenn die Kugel oder die Bombe sich zu einer ansehnlichen Höhe erheben muß und der gefundene Winkel wäre z. E. 35° so muß man das Geschütz auf 55° stellen, damit sich der geworfene Körper höher erhebe....

§. 137.

Aufgabe. Die Weite zu bestimmen, wohin ein Geschütz seine Kugel trägt, wenn man den Kernschuß thut; vorausgesetzt, daß man die Höhe kenne, die das Stücke über den Erdboden erhöhet ist.

Auflösung. Ihr dürfet nur die Helfte der mittlern geometrischen Proportionallinie zwichen der Helfte der grösten Schußweite des Geschützes und zwischen seiner Höhe über dem Horizont nehmen (§. 132). Nun setzen wir aber voraus, daß die Helfte der grösten Schußweite durch die Probe bekannt ist, und daß man die Höhe des Geschützes über die Erde gemessen habe: Es findet sich folglich die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen diesen beyden Grössen leicht. Wenn diese beyden Grössen in Zahlen gegeben sind, so muß man sie durch einander multipliciren und aus dem Product die Quadratwurzel ziehen. Das Duplum davon zeigt die Schußweite von dem Kernschuß an. Denn es sey m die Helfte der grösten Schußweite, h die Höhe des Stücks über dem Horizont; z die gesuchte mittlere geometrische Proportionallinie, so hat man folgendes Verhältniß $m : z = z : h$; Folglich ist $zz = hm$; Folglich $z = \sqrt{hm}$; Folglich ist $2z = 2\sqrt{hm}$ (§. 132).

§. 138.

Es kann geschehen und zwar oft, daß die Batterien höher oder niederer als der Ort liegen, wohin man die Bomben werfen will; das heißt, es kann geschehen, daß dieser Ort in einer schiefliegenden Fläche über oder unter der Horizontallinie sich befinde, und in diesen beyden Fällen will man entweder den Punkt finden, in welchem die Bombe die schiefliegende Fläche berührt, wenn das Geschütz unter einem gegebenen Winkel abgeschossen ist, oder man soll den nöthigen Erhöhungswinkel bestimmen, damit die Bombe durch den bestimmten Punkt dieser Fläche gehe. Die Auflösung dieser Aufgaben wird uns noch das fehlende in dieser abgehandelten Lehre zeigen.

§. 139.

Aufgabe. Es sey MQ die bekannte horizontale Weite einer Bombe (Fig. 26. 27), die unter dem Winkel GMQ mit einer beliebigen Kraft geworfen ist. Nun fragt man, in welchem Punkt die Parabel MTQ die Fläche MR die oberwärts oder unterwärts gegen den Horizont geneigt ist, berühren werde? das heißt, wie kann man mit einer gegebenen Weite MQ und dem gegebenen Winkel GMQ, die Distanz MT bestimmen.

Auflösung. Man stelle sich auf der nach Erforderniß verlängerten Horizontallinie MQ in dem Punkt T und Q Perpendiculairlinien TS und GQ vor, und von dem Punkt R, wo die schiefliegende Fläche die Perpendiculairlinie GQ durchschneidet, ziehet aus dem Punkt S der Horizontallinie, worauf die Perpendiculairlinie TS hinfällt, diese Linie RS, so ist gewiß, daß RS mit MG parallel laufe (§. 32). Man kann auch sehr leicht den Winkel RMQ, welchen die schiefliegende Fläche MR mit dem Horizont MQ macht, durch den Winkelmesser messen.

Jtzt bemerket, daß man in dem rechtwinklichten Triangel MQG den Erhöhungswinkel GMQ und folglich auch dessen Complement MGQ kenne. Es ist darneben die Weite MQ bekannt.

kannt. Folglich kann man GQ finden, wenn man ansetzt: Der Sinus des bekannten Winkels G verhält sich zum Sinus des gegebenen Winkels GMQ, wie die gegebene Weite MQ sich zu GQ verhält. Folglich wird GQ auf diese Art bestimmt seyn. Eben so wird man auch den Werth von RQ in dem rechtwinklichten Triangel MQR bestimmen, indem man folgendes Verhältniß ansetzt: Es verhält sich der Sinus des bekannten Winkels MRQ zum Sinus des gleichfalls bekannten Winkels QMR wie die gegebene Länge MQ zu RQ. Durch die drey bekannten Glieder dieses Verhältnisses erkennet man das vierte oder RQ. Weil nun RS mit MG parallel ist, so geben die ähnlichen Triangel GQM und RQS folgendes Verhältniß GQ : RQ = MQ : SQ. Man bekommt folglich den Werth von SQ, weil die drey Linien GQ, RQ und MQ bekannt sind. Folglich bekommt man auch MS. Es ist also nur noch nöthig, um in dem rechtwinklichten Triangel MST die Seite MT zu kennen, folgendes Verhältniß anzusetzen: Es verhält sich der Sinus des bekannten Winkels MTS zum Sinus des Winkels MST oder zum Sinus totus wie die bekannte Linie MS zu MT. In diesem Verhältnisse sind die drey ersten Glieder bekannt und sie bestimmen also das vierte Glied MT. W. z. E. W.

Anmerkung. Dieser Beweiß schliesset die beyden Fälle dieser Aufgabe in sich, und er ist so wohl anf die 26 Figur, in welcher die schiefliegende Fläche über dem Horizont erhöhet ist, als auch auf die 27te Figur anzuwenden, in welcher man die schiefliegende Fläche unter dem Horizont geneiget annimmt. Damit man nicht auf einmal nöthig habe zwey Figuren zu betrachten, so muß man den Schluß, welcher zur Auflösung dieser Aufgabe führt, nach und nach auf beyde anwenden.

§. 140.

Aufgabe. Man will eine Bombe nach dem Punkt D der schiefliegenden Fläche BD die über dem Horizont BV erho-

erhoben ist, oder die unter demselben lieget, werfen (Fig. 28. 29). Welches muß die Neigung des Mörsers seyn, der in B stehet, damit der Wurf durch den Punkt D gehen könne?

Auflösung. Wir nehmen jederzeit an, daß der geworfene Körper mit einer bestimmten Kraft z. E. mit derjenigen geworfen werde, die er erhält, wenn er von H nach B fällt. Jmgleichen setzen wir voraus, daß man die gröste Schußweite auf der Horizontallinie BV kenne; Daß man auch die Grösse des Winkels DBV, den die Fläche BD mit dem Horizont BV macht, kenne, und daß man endlich trigonometrisch oder auf irgend eine andere Art die Länge BD gefunden habe. Vermittelst allem diesem muß man auf einer sehr ebengemachten Pappe und durch Hülfe eines Maasstabes den rechtwinklichten Triangel BAD construiren. Dieser bestimmet die Höhe DA über oder unter dem Horizont und zugleich die darzu gehörige Horizontalweite BA. Dieses sey vorausgesetzt! Nun ist bekannt, daß die Linie der Höhe jederzeit der Helfte der grösten Schußweite auf der Horizontalfläche gleich ist (Fig. 127); Folglich muß man die Perpendiculairlinie HB so groß machen, als die Helfte dieser bekannten grösten Schußweite. Man muß aus dem Punkt H eine Perpendiculairlinie HO von unbestimmter Länge aufrichten. Diese ist die gemeinschaftliche Directrix aller derjenigen Parabeln, die durch einen Körper beschrieben werden, der durch eine Kraft, die er durch den Fall von H in B erhalten hat, geworfen wird (§. 117). Man muß AD so lange verlängern, biß sie in dem Punkt S mit der Directrix HO zusammen stößt. Weil nun der Punkt B in der gesuchten Parabel seyn muß, so wird dieser Punkt so weit von der Directrix HO, als von dem Brennpunkt dieser Parabel, entfernet seyn (§. 90) Wenn man daher aus B mit dem Radius BH einen Cirkelbogen HF*f* beschreibt, so muß der Brennpunkt dieser Parabel nothwendig in irgend einem Punkt dieses Bogens HF*f* seyn. Eben so muß der Punkt D in der gesuchten Parabel seyn. Folglich muß auch dieser gleich weit von der Directrix und von dem Brennpunkt

zent-

entfernt seyn; Folglich wird dieser Brennpunkt auch in einem von den Punkten des Bogens SFf seyn, welcher aus dem Punkt D mit dem Radius DS beschrieben worden ist. Folglich wird sich dieser Brennpunkt zugleich in dem Bogen HFf und SFf befinden. Dieses kann aber nur in den Durchschnittspunkten F und f seyn. Folglich sind die Punkte F und f die Brennpunkte derjenigen Parabeln, die durch den Punkt D gehen. Es gibt also zwey Würfe, die auf einerley Art die vorgegebene Aufgabe auflösen.

Um die Weiten derselben zu bekommen, so muß man von den Brennpunkten F und f auf dem Horizonte BV die Perpendiculairlinien FG und fg ziehen und sie biß zu den Punkten T und t, wo sie die Directrix HO durchschneiden, verlängern. Man muß GK so groß als BG machen und gV =Bg, so wird BK die Weite des Wurfs seyn, welcher den Punkt F zum Brennpunkt hat, und BV wird die Weite des Wurfs seyn, dessen Brennpunkt f ist. Nun theilet der Scheitelpunkt der Parabel jederzeit die Distanz von dem Brennpunkt biß an die Directrix in 2 gleiche Theile (§. 79). Folglich muß man auch die Linie FT und ft in dem Punkt C und c in 2 gleiche Theile theilen. Diese sind folglich die Scheitelpunkte der Parabeln, BCK und BDV. Endlich wird man die Tangenten dieser beyden Würfe bekommen, wenn man auf der verlängerten Linie GC oder gc gegen T oder t die Theile CL oder cl abschneidet, die so groß sind, als die darzugehörige Abscissen CG und cg. Nun kann man aus dem Punkt B nach den äussersten Punkten L, l dieser verlängerten Linien die Tangenten Bb, Bd ausziehen (§. 38). Diese werden den Bogen HFf in den Punkten b und d schneiden und die Erhöhung bestimmen, die man dem Mörser geben muß, damit die Bombe durch den vorgeschriebenen Punkt gehe. Man darf also itzt nur den Bogen bg und dg (Fig. 28) oder die Bögen bK und dK (Fig. 29) mit einem Winkelmesser messen.

Man

Man hätte diese Grösse auch noch genauer trigonometrisch bestimmen können. Allein mir schien die Entwickelung davon ausserordentlich lang und nicht sehr nothwendig. Deswegen glaubte ich, diese Untersuchung vorbey lassen zu können. Wenn man sich in allen Spitzfindigkeiten, deren diese Materie fähig ist, eine Genüge thun will, so ziehe man den Herrn **Blondel** in seiner Kunst, die Bomben zu werfen, zu Rath (*a*).

Beweis. Lasset uns bey dem Wurfe BCK (Fig. 28) anfangen. Wir müssen zwey Dinge beweisen:

1.) Daß dieser Wurf eine Parabel sey, deren Axe CG nebst dem 4ten Theil ihres Parameters der Linie der Höhe HB gleich sey. So wie es nach §. 118 seyn muß. Es muß folglich $4TC$ oder $4HR$ oder $4CF \times CG = \overline{BG}^2$, als dem Quadrate der Ordinate BG seyn.

2.) Daß der Punkt D nothwendig einer von den Punkten dieser krummen Linie sey.

Nun lasset uns aber bemerken:

1.) Daß $BF = BH$ (constr.) $= GT = FG + CF + CT = 2CF + FG$. [Denn $CT = CF$ (constr.)]; Folglich ist $\overline{BF}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4(CF \times FG) + \overline{FG}^2$. Es ist aber wegen des rechtwinklichten Triangels BGF, $\overline{BF}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{FG}^2$.

(*a*) Ich erinnere es hier, daß man ohne allen Nutzen dieses Buch lesen würde, wenn man nicht vollkommen mit der Theorie der Parabel bekannt ist. Herr Blondel beweiset darinn keine einzige Eigenschafft dieser krummen Linie. Er verweiset immer auf den Archimedes, dessen Beweise mehr Anstrengung erfordern, als dieses ganze Werk von krummen Linien.

$+\overline{FG}^2$. Folglich ist $\overline{BG}^2 + \overline{FG}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4(CF \times FG)$ $+ \overline{FG}^2$ oder $\overline{BG}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4(CF \times FG) = (CF + FG)$ $\times 4CF = CG \times 4CF$. Folglich ist $\overline{BG}^2$ als das Quadrat der Ordinate BG dem Rectangel aus der Abscisse CG multiplicirt durch 4CF gleich. Folglich ist der Wurf BCK eine Parabel (§. 20), deren Parameter $= 4CF$ oder 4CT oder 4HR. Folglich ist HR der vierte Theil des Parameters dieses Wurfs und dieser vierte Theil + der Axe CG oder RB ist der Linie der Höhe HB gleich. W. z. E. W.

2.) Um überzeugt zu seyn, daß der Punkt D in der Parabel BCK sey, muß man die Perpendiculairlinie DM auf die Axe CG ziehen und nun zeigen, daß $\overline{DM}^2 = CM \times$ 4CF. Dieses ist sehr leicht. Denn es ist $DF = DS$ (constr.) $= TM = 2CF + FM$; Folglich ist $\overline{DF}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4(CF$ $\times FM) + \overline{FM}^2$. Es ist aber des rechtwinklichten Triangels FMD wegen, $\overline{DF}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{FM}^2$; Folglich ist $\overline{DM}^2 + \overline{FM}^2$ $= 4\overline{CF}^2 + 4(CF \times FM) + \overline{FM}^2$ oder $\overline{DM}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4$ $(CF \times FM) = (CF + FM) \times 4CF = CM \times 4CF$. Folglich ist das Quadrat $\overline{DM}^2 =$ der Abscisse CM multiplicirt durch den Parameter 4CF. Wenn man nun aus dem Punkt M eine Ordinate y gegen die Axe CG der Parabel BCK annähme, so wäre $yy = CM \times 4CF$ (§. 20); Folglich $\overline{DM}^2$ $= yy$ oder $DM = y$. Dieses beweiset, daß DM eine der Abscisse CM zugehörige Ordinate sey, und daß folglich der Punkt D in der Parabel BCK sey. W. z. E. W.

Lasset uns itzt den Wurf BcV vor uns nehmen, und indem wir eben so, wie vorhin, schliessen, zeigen

1.) Daß $\overline{Bg}^2 = cg \times 4ct$ oder $cg \times 4cf$; (denn ct ist $= cf$, vermöge der Constr.)

2.) Daß $\overline{Dm}^2 = mc \times 4cf$ oder $mc \times 4ct$.

Lasset

Lasset uns demnach uns wieder erinnern, daß $Bf = BH$ (constr.) $= gt = cg + ct = cg + cf = cf + ct + gf = 2cf + gf$; Folglich $\overline{Bf}^2 = 4\overline{cf}^2 + 4(cf \times gf) + \overline{gf}^2$. Wegen des rechtwinklichten Triangels Bgf aber ist $\overline{Bf}^2 = \overline{Bg}^2 + \overline{gf}^2$; Folglich ist $\overline{Bg}^2 + \overline{gf}^2 = 4(\overline{cf}^2) + 4(cf \times gf) + \overline{gf}^2$ oder $\overline{Bg}^2 = 4(\overline{cf}^2) + 4(cf \times gf) = (cf + gf) \times 4cf = cg \times 4cf$ oder $cg \times 4ct$; Folglich ist $\overline{Bg}^2 = cg \times 4ct$; Folglich (§. 20) der Wurf BcV eine Parabel, deren Parameter $= 4ct$ ist; Folglich ist $ct =$ dem vierten Theil des Parameters. Nun ist es aber klar, daß dieser vierte Theil + der Axe cg der Linie der Höhe DH gleich sey (§. 118). Es ist also nur noch übrig zu beweisen, daß der Punkt D in der Parabel BcV sey.

Es ist aber gewiß, daß $Df = DS = mt = mc + ct = mc + cf = mc + mc + mf = 2mc + mf$ sey. Folglich ist $\overline{Df}^2 = 4(\overline{mc}^2) + 4(mc \times mf) + \overline{mf}^2$; Allein wegen des rechtwinklichten Triangels Dmf ist $\overline{Df}^2 = \overline{Dm}^2 + \overline{mf}^2$; Folglich ist $\overline{Dm}^2 + \overline{mf}^2 = 4\overline{mc}^2 + 4(mc \times mf) + \overline{mf}^2$ oder $\overline{Dm}^2 = 4\overline{mc}^2 + 4(mc \times mf) = (mc + mf) \times 4mc = cf \times 4mc = ct \times 4mc = mc \times 4ct$. Folglich ist $\overline{Dm}^2 = mc \times 4ct$. Allein das Quadrat zz von der Ordinate z, die auf dem Punkt m der Axe cg gezogen ist, ist auch so groß, als das Rectangel aus der Abscisse mc und dem Parameter $4ct$. Folglich ist $zz = \overline{Dm}^2$ oder $z = Dm$. Folglich ist Dm würklich die Ordinate an dem Punkt m der Axe cg. Hieraus erhellet, daß der Punkt D in der Parabel BcV sey (*a*).

§. 141.

(*a*) Ich bitte scharfsinnige Leser wegen der Weitläuftigkeit, in welche ich mich einlasse, um Verzeyhung. Eine lange Erfahrung hat mich überzeuget, daß Anfänger in dieser Art von Materien

§. 141.

Anmerkung. Es ist, wie mich dunkt, nichts einfacher, als die Construction dieser Aufgabe. Die Durchschnitte der beyden Cirkelbögen bestimmen den Brennpunkt der Würfe, und durch diese findet sich das übrige ausnehmend leicht. Ich habe dennoch insonderheit dahin meine Bemühung gerichtet, den Geist derselben zu entwickeln. Denn wenn irgend eine Kunst ist, die das Genie ausbildet, und eine solche ist ohne Zweifel die Kunst strenge Beweise zu machen, so ist es meiner Meinung nach gewis diese, den Leser durch alle Grade hindurch zu führen, die uns zu gewissen wichtigen Entdeckungen geleitet haben. Denn wenn man einsieht, wie man dabey verfahren ist, so bleibt im Kopfe eine Art von Form zurük, in welcher die Produkte ihre Bildung bekommen werden. In den Wissenschaften und Künsten bewundere ich allemal die Erfindung selbst viel weniger, als die Methode wie man zu denselben gekommen ist. Eine Entdeckung ist nur eine Entdeckung. Hingegen ist eine schöne Methode gleichsam eine Mutter von unzählbaren Entdeckungen.

Nimmt man den Punkt D unterhalb der Horizontallinie an, so muß man sich der 29ten Figur bedienen. Man muß dabey die nämlichen Schlüsse machen, so wird man die Brennpunkte F und f von 2 Würfen finden, die diese Aufgabe auflösen, und die Tangenten Bb und Bd die an den Punkt B gezogen sind, sind die Richtungslinien, nach welchen

---

terien die Leichtigkeit etwas einzusehen, der Ehre vorziehen, die man ihrer Fähigkeit erweiset, indem man ihnen nur gedrängte und sehr concise Demonstrationen, die ihren Verstand martern, vorlegt. Durch die Methode, welcher ich mich hier bediene, habe ich mehr zum Augenmerk den Verstand zu üben als zu ermüden. Ja, bey aller dieser Vorsicht habe ich dennoch Grund zu befürchten, daß für viele Personen, diese Uebung eine wahre Arbeit seyn werde.

chen man den Mörser stellen muß, um die Bombe nach dem Punkt D unterhalb der Horizontallinie zu schiessen. (*)

Man

(*) Diese zwo Aufgaben, die der Herr Verfasser so eben aufgelöset hat, gehören unter die wichtigsten in der Lehre vom Bombenwerfen. Man will von einer Batterie ausserhalb der Vestung auf einen Pulverthurm innerhalb des belagerten Orts oder auf die Gewölber von Kirchen oder gar in eine Vestung, die oben auf einem Berge liegt, Bomben werfen; Oder es wollen die Belagerten aus einer Bergvestung oder von einer Bastion auf die Belagerer diese Bomben spielen lassen, so werden sie ohne die Auflösung dieser Aufgaben ihre Absicht nicht erreichen können. Des besondern Nutzens wegen, den man sich von einer leichten Auflösung dieser Aufgaben versprechen konnte, haben die Einsichtsvollsten Männer daran gearbeitet. Ein Buot, ein Römer, ein de la Hire haben recht artige synthetische Auflösungen erfunden, die man in der Abhandlung vom Bombenwerfen des Herrn Blondels, der zuerst diese Aufgaben der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorlegte, beyeinander antrift. Nur Schade! daß sie wegen der vielen Verhältnisse, die man ansetzen, und der vielen Winkel und Sinus wegen, die man erst kennen muß, in der Ausübung nicht so brauchbar sind. Diese Beschwerlichkeiten haben andere Geometer, unter andern der Herr Euler, Herr von Maupertuis und Reynauld durch algebraische Formeln zu heben gesucht. Mit wie vielen Beyfall von Seiten der mehrsten Herrn Artilleristen es geschehen sey, wird man von ihnen selbst am besten erfahren können. Herr Deidier, dieser geschikte Nachfolger des berühmten Belidors in der Kriegsschule zu *La Fère*, hat in seiner allgemeinen Mechanik im ersten Buche Auflösungen gegeben, die mir äusserst leicht vorkommen, und von welchen ich nach seiner Versicherung glaube, daß man sie jungen Leuten von 10 Jahren beybringen könne. Nur bitte ich diejenigen überklugen Herren, die alles, was ihnen leicht gemacht ist, mit einem lächerlichen Stolze verachten, vorher ihre Kräfte zu üben, um zu sehen, wie weit ihre vielleicht tiefdenkende Seele und feiner Geist sie geführt haben würde. Mir scheinen Männer, ich muß es gestehen, um desto ehrwürdiger, je mehr sie die Gaben und den Willen besitzen, verwickelte und schwere Dinge von einer leichten Seite zu zeiger.

Es

Man würde es auch wohl ohne meine Erinnerung finden, daß diese Aufgaben nur auf eine einzige Art auf-

Es muß zum Beweise der Auflösung folgender Satz als ein Grundsatz vorausgeschicket werden.

Es sey eine Parabel BCT (Fig. 22) unter einem beliebigen Winkel mit einer beliebigen Kraft beschrieben. Es sey die Weite BT in 4 gleiche Theile getheilet und man richte aus den Theilungspunkten die Perpendiculairlinien QF, DR, LK, TS auf. Diese theilen auch die Richtungslinie BS in 4 gleiche Theile. Die Parabel selbst aber wird dadurch in den Punkten M, C, N durchschnitten. Unter diesen ist der Punkt C der Scheitelpunkt und die beyden andern N und M, die gleich weit vom Scheitelpunkt entfernt sind, stehen auch gleich weit von der Linie BT ab, die die Weite der Parabel ausdrükt. Wenn man nun die Punkte M und N durch die grade Linie MN mit einander verbindet, so wird diese grade Linie mit BT parallel seyn, und wird die Axe der Parabel, nämlich DC in einem Punkt E durchschneiden. Nun wird die Linie CE so groß seyn, als $\frac{1}{3}$ von MQ oder NL.

Es sey BS$=x$, so ist BF$=\frac{1}{4}x$; BR$=\frac{2}{4}x$; BK$=\frac{3}{4}x$; Es verhalten sich aber die Räume FM, RC, KN und ST wie die Quadrate der graden Linien BF, BR, BK und BS (§. 106); Folglich können jene Linien des Falls auch ausgedrukt werden durch $\frac{1}{16}xx$; $\frac{4}{16}xx$; $\frac{9}{16}xx$; und xx. Es verhält sich aber wegen der Aehnlichkeit der Triangel FBQ, RBD, SBT, ST : FQ$=$SB : FB. Und da nun FB $=\frac{1}{4}$SB (constr.) so ist auch FQ$=\frac{1}{4}$ST$=\frac{1}{4}xx$. Eben so findet man durch ähnliche Schlüsse daß RD$=\frac{2}{4}xx$; KL $=\frac{3}{4}xx$. Wenn man folglich von FQ$=\frac{1}{4}xx$, FM$=\frac{1}{16}xx$ abziehet, so ist der Rest MQ$=\frac{3}{16}xx$. Wenn man gleichfalls von RD$=\frac{2}{4}xx$, RC$=\frac{4}{16}xx$ wegnimmt, so wird das Uebriggebliebene oder CD$=\frac{4}{16}xx$ seyn; Nimmt man folglich von CD$=\frac{4}{16}xx$ den Theil ED$=$MQ$=\frac{3}{16}xx$ weg, so wird CE$=\frac{1}{16}xx$ und folglich so groß als $\frac{1}{3}$ von FM seyn.

Nun können wir die 2 folgenden Aufgaben auflösen.

1.) Gesetzt man will eine Bombe von A nach dem Punkt B werfen (Tab. XI. Fig. 10.), der über der Horizontallinie AN erho-

gelöset werden können, wenn sich die beyden Cirkel nur berühren. Daß eine Auflösung in dem Falle aber gänzlich unmöglich sey, wenn

---

erhoben ist. Es fragt sich unter welchem Winkel soll man die Bombe abschiessen?

Man suche, wenn es noch nicht bekannt ist, geometrisch oder trigonometrisch die Weite AN und die Höhe NB. Itzt theile man AN in 3 gleiche Theile in den Punkten O, P, N. Man verlängere die Linie AN bis NM $= \frac{1}{3}$ AN ist. Nun theile man AM in 2 gleiche Theile und richte aus der Mitte P die Perpendiculairlinie PQ auf und mache sie so groß, als $\frac{4}{3}$ NB. So wird diejenige Parabel, die zur Höhe die grade Linie QP und zur Weite AM hat, vermöge des vorhinbewiesenen Satzes durch den Punkt B gehen. Denn es ist QP um $\frac{1}{3}$ BN grösser als BN. Ziehet man folglich durch den Punkt A die Tangente AR, so wird der Winkel RAM derjenige Winkel seyn, den man dem Mörser geben muß. Diesen Winkel findet man aber sehr leicht. Denn es sind die 2 Seiten AP und PR oder 2PQ in dem rechtwinklichten Triangel APR bekannt. Will man nun die Höhe und folglich die Menge Pulvers finden, die man zu diesem Schuß gebraucht, so ziehe man aus dem Punkt A die Perpendiculairlinie Ax und auf diese von dem Scheitelpunkte Q die Perpendiculairlinie QS, welche in dem Punkt S die Linie Ax und in dem Punkt Z die Tangente AR durchschneidet; Nun richte man aus dem Punkt Z auf AR eine Perpendiculairlinie auf und verlängere sie, biß sie die Linie Ax in x durchschneidet, so ist die grade Linie Ax die Linie der Höhe (§. 107). Hätte man nun den Probeschuß gemacht, so würde die Differenz zwischen den Quadratwurzeln aus diesen beyden Höhen anzeigen, wie viel mehr oder weniger Pulver man zu nehmen hätte, um unter dem Winkel RAM den Punkt B zu treffen.

Der Augenschein gibt es, daß alle die nöthigen Linien und Winkel sehr leicht geometrisch oder trigonometrisch zu finden sind.

2.) Welchen Erhöhungswinkel soll man dem Mörser geben, wenn man von der Batterie A den Punkt P, der unterhalb der Horizontallinie liegt, treffen will? (Tab. XI. Fig. 11)

Wir

wenn sie sich gar nicht berühren. Ich errege nur deswegen hierzu die Aufmerksamkeit, weil sehr viele Menschen an keine Sache denken, als woran man sie erinnert: Das Genie selbst bleibt oft vielmehr dabey stehen, daß es sich eine Untersuchung anzustellen vornimmt, als daß es Mittel findet, wodurch es zu seinen Endzweck gelange. Deswegen füge ich hier noch dieses hinzu, daß es nicht durchaus nothwendig sey, die Parabel zu ziehen, um die Tangente B*b* und B*d* oder die

---

Wir setzen voraus, daß man auf irgend eine Art die Höhe BP und die Entfernung AB kenne.

Man theile BP in 3 gleiche Theile und trage von B in C 2 solcher Theile. Man theile auch AB in 3 gleiche Theile und trage von A nach D auch 2 solcher Theile. Durch die Punkte D und C ziehe man die grade Linie CE und mache DE = DC. Aus E lasse man eine Perpendiculairlinie EQ auf AD fallen. Diese wird dadurch in 2 gleiche Theile getheilet werden. Man theile EQ in H in 2 gleiche Theile, so wird die Parabel, die zur Höhe HQ und zur Basis AD hat durch den Punkt P gehen. Man ziehe die Tangente EAS, so wird der Winkel EAQ den Erhöhungswinkel anzeigen, und die Linie AM, die man nach voriger Auflösung finden kann, wird die Höhe des Falls oder die Stärke des Pulvers anzeigen. Ich werde aus den vorigen Principien einen jeden den Beweis für diese Auflösung selbst erfinden lassen.

Man lese hiervon ausser des Deidiers allgemeinen Mechanik, des Herrn le Blonds Artilleriewissenschaft. Reynaulds demonstrirte Analysis, *II* Band; Die Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Paris, Petersburg und Berlin; Des Jesuiten *P.* Scherfers Dissertat. über diese Materie.

Man hat auch noch ausserdem verschiedene Instrumente erfunden, wodurch sich auf eine spielende Art die nöthigen Winkel beym Bombenwerfen finden lassen. Man sehe davon Blondels Kunst, Bomben zu werfen; Belidors Cursus Mathematicus; le Blonds Artilleriewissenschaft; Die Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften vom Steinwehr übersezt, III Band und andere. B.

Richtungslinien des Mörsers zu finden. Es ist genug, wenn man die Brennpunkte der Würfe gefunden hat, den Scheitelpunkt der Axe zu bestimmen. Dieses geschiehet durch Hülfe der gemeinschaftlichen Directrix. Denn indem man nun durch den Punkt B die Ordinaten ziehet, so bekommt man auch die Subtangenten (§. 30) und folglich die gesuchten Tangenten oder die Richtungslinien der Mörser.

Weil es in verschiedenen Fällen nützlich ist, die Höhe zu welcher sich eine Bombe erhebet, zu wissen, um aus der erhaltenen Geschwindigkeit die Kraft derselben berechnen zu können, so wollen wir auch die Auflösung einiger hieher gehörigen Aufgaben hersetzen.

§. 142.

Aufgabe. Aus der Weite B*t* (Fig. 23) und dem gegebenen Erhöhungswinkel *h*B*t* die gröste Höhe *de* zu finden, zu welcher sich eine Bombe erhebet.

Auflösung. Es sey die Linie B*h* oder B*x* die Tangente des Wurfs, so ist offenbar die Perpendiculairlinie *ex*, die über der Mitte *e* der Weite B*t* aufgerichtet ist, die Subtangente. Diese ist die doppelte Abscisse oder das Duplum der gesuchten Höhe. Wenn man folglich *ex* bestimmt hat, so ist auch die Helfte derselbe *de* bekannt. Nun ist in dem rechtwinklichten Triangel B*ex*, B*e* als die Helfte der Weite gegeben. Auch ist nach der Annahme der Winkel *e*B*x* bekannt. Folglich ist auch der Winkel B*xe* bekannt. Folglich kann man *ex* und also auch seine Helfte *de* finden. Diese zeigt die Höhe an, zu welcher die Bombe sich erhebt. Man setze, um diese Höhe zu finden, folgendes Verhältniß an: **Der Sinus des bekannten Winkels *x* verhält sich zu dem Sinus des gegebenen Winkels *e*B*x*, wie die bekannte Länge B*e* zu der gesuchten Höhe *ex*.**

§. 143.

Aufgabe. Gesetzt, es sollte sich eine Bombe zu einer bekannten Höhe *de* erheben, welches muß der Erhöhungswinkel des in B gestellten Mörsers seyn?

Auflösung. Es darf die verlangte Höhe nicht grösser als BH oder als die Helfte der grösten Schußweite seyn, die ich als bekannt annehme. Denn die Helfte der grösten Schußweite ist allemal der Höhe gleich, von welcher ein Körper fallen mußte, um diejenige Kraft zu erhalten, mit welcher er geworfen wird (§. 127). Und über diese Höhe kann sich der Körper nicht erheben (§. 128).

Bemerket demnach, wenn *de* bekannt ist, daß auch *a*B, welche eben so groß ist, bekannt sey, und daß man folglich auch *a*H kenne, weil BH gegeben ist. Folglich wird es leicht seyn *ah* als die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen *a*B und *a*H zu bestimmen. Nun kann man in dem rechtwinklichten Triangel B*ah* aus den bekannten Seiten B*a* und *ah* auch leicht die Hypothenuse B*h* finden. Man darf daher nur folgendes Verhältniß ansetzen, B*h* : *a*B = Sin. Tot : Sin. B*ha*, so wird der Sinus des Winkels B*ha* und also der Winkel B*ha* selbst gefunden werden. Dieser Winkel ist aber dem gesuchten Erhöhungswinkel *h*B*t* gleich. W. z. Th. W.

Aufgabe. Wie kann man aber einem Mörser eine bestimmte Neigung, z. E. von 50 Graden geben? (Fig. M. Platte 2).

Auflösung. Da der Anfang des Wurfs der Bombe nach der Richtungslinie TS geschehen muß, um das Reiben der Kugel, gegen die Wände des Mörsers, so viel als möglich ist, zu vermeiden, so kommt die Aufgabe darauf hinaus, ein Mittel zu finden TS über die Horizontallinie T*r* so zu erheben, daß der Winkel ST*r* = 50° sey.

Hierzu muß man einen Quadranten ABC nehmen, der in seine Grade und Minuten eingetheilet ist. Man verbindet damit ein breites Linial AD, welches parallel mit BC lauft, und ein Pendul B*f*. Man muß dieses Linial in der Mitte der Oefnung des Mörsers setzen, und durch Hülfe des Penduls machen, daß der Quadrant perpendiculair gegen die Fläche der Oefnung sey. Darauf läßt man den Mörser über seine Laffette, das heißt, über die Maschine sich drehen, die ihn in allen Lagen erhalten soll, biß das Pendul B*f* den Quadranten im 50ten Grade durchschneidet. Man muß aber von dem Punkt C biß zu dem Faden B*f* zählen. So wird der Mörser die verlangte Erhöhung haben.

Beweis. Man muß zeigen, daß der Winkel ST*r*, der von der Axe TS und der Horizontallinie T*r* gemacht wird, dem Winkel CB*f* gleich sey. Verlängert demnach in Gedanken das Pendul B*f* biß zur Horizontallinie T*r* um bey *r* einen rechten Winkel zu bekommen. Vermöge der Construction des Mörsers ist TS perpendiculair auf die Oefnung, und AB ist es gleichfalls (Beding.) Folglich ist TS parallel mit AB. Folglich ist der Winkel S ein rechter Winkel. Folglich, da die Triangel *f*BS und *f*T*r* sich offenbar ähnlich sind, so ist der Winkel CB*f* = dem Winkel ST*r* oder *f*T*r*. Nun ist aber der Winkel CB*f* = 50° (Constr.); Folglich ist auch der Winkel ST*r* = 50°. Folglich hat man den verlangten Erhöhungswinkel. (*a*)

§. 144.

Ich will diese Abhandlung vom Bombenwerfen, die mir vollständig genug zu seyn scheinet, mit Anführung der Schwü-

---

(*a*) Eine vortheilhafte Eintheilung eines solchen Quadranten findet man unter andern in den vermischten Werken des Herrn Belidors, die vom Herrn Ingenieur = Major Schneller übersezt sind, Seite 302. 303. B.

Schwürigkeiten beschliessen, die man gegen diese Theorie gemacht hat. (*a*)

1.) Die Linien der Schwere FM, RC, KV können nicht unter einander parallel seyn. Denn die Erfahrung lehret es, daß diese Richtungslinien auf der krummen Oberfläche der Erde perpendiculair stehen. Folglich ist es unmöglich, daß alle diese Linien, die gegen eine krumme Fläche perpendiculair sind, auch unter sich parallel seyn.

2.) Die Geschwindigkeit, welche einer in die Luft geworfenen Bombe eingedrukt wird, ist nicht in ihrem ganzen Wege gleichförmig. Denn es ist durch Versuche ausgemacht und die Vernunft begreift es sehr leicht, daß eine Bombe gegen das Ende ihres Steigens nicht mehr so schnell fliege, als am Anfange ihres Wurfs.

3.) Wenn in einem vollkommen leeren Raum, die durch die Schwere durchgelaufenen Raume sich unter einander verhalten, wie die Quadrate der angewendeten Zeiten, so kann man nicht zweifeln, daß dieses Verhältniß in einem Raum, so wie die Luft ist, wo die Verschiedenheit in der Dichtigkeit und der Bewegung die Hindernisse vermehret und verändert, nicht sehr alteriret werden sollte. Folglich wird die krumme Linie, die die Bomben in der Luft beschreiben, keine Parabel seyn können. (*)

 4.) Fü-

(*a*) Man lese hierüber ausser des Blondels Kunst, Bomben zu werfen, das 2te Kapitel der neuen Grundsätze der Artillerie vom Herrn Robins, *Euleri Mechan. T. I. prop. 107.* Des Deidier allgemeine Mechanik, 1 Buch, 10ten Kap. *Mako Elem. Phys. T. I. p. 134* Die Abhandlungen der Akad. der Wissensch. zu Paris *T. III. V. Commentar. acad. Petropol. T. II.; Newtons Princ. Math. Philos. nat. Lib. I. prop. 41. Joh. Bernoulli Opera T. I. pag. 514. sqb. Hugenius Discours de la cause de la Pesanteur; Hermanni Phoronomia Sect. IV. &c.* B.

(*) Wie entsezlich groß der Widerstand der Luft sey, zeigt der grosse Geometer Herr Daniel Bernoulli im 2ten Bande des Com-

4.) Fügt man endlich zu diesen Betrachtungen die unvermeidlichen Irrthümer, welche von den nicht gar genau verfertigten Instrumenten und von den nöthigen Handgriffen in dem praktischen Bombenwerfen entstehen, so wird man sehr gegründete Ursache zu haben glauben, allen Nutzen dieser vorhin gegebenen Theorie abzusprechen und sie nur als eine angenehme Belustigung des Verstandes zu betrachten. Aber es wird dieses zum Nachtheil unserer Bedürfnisse und der Erhaltung unserer selbst geschehen.

Herr Blondel hat in seiner **Kunst, Bomben zu werfen** alle diese Schwürigkeiten so vollständig aufgelöset, daß ich alle Wißbegierigen mit dem grösten Rechte dahin verweisen kann.

Hier werde ich mich also nur auf eine einzige Antwort einschränken, die aber grade allen Einwendungen die Stirn bietet. Sie ist diese: Man findet nach den in dem **französischen Bombardier des Herrn Belidors** angeführten Versuchen, die bloß darzu gemacht sind, um die Resultate daraus mit der Theorie zu vergleichen, man findet, sage ich, zwischen der geometrischen Bestimmung und zwischen der Erfahrung oft keinen Unterschied von 2 Toisen, ohngeachtet der Men-

---

Commentar. Acad. Petrop.; allwo er die überzeugendsten Beweise davon anführet. Unter andern ist diese Bemerkung sehr ausserordentlich, daß eine Stuckkugel, die nach der Berechnung in einem luftleeren Raum 58750′ hoch steigen sollte, nur 7819′ sich in der Luft erhob. Aehnliche Beyspiele findet man bey dem Herrn Robins am angezogenen Orte. Nämlich, daß eine eiserne Kugel die 24 Pfund schwer war, und nach der Theorie 16 englische Meilen durchfliegen sollte, in der That nur 3 englische Meilen zurük legt. Er hat berechnet, daß bey einer sehr grossen Geschwindigkeit der Widerstand der Luft mehr als 100 mal stärker sey, als das Gewicht der Kugel. Ob der Weg der Bombe eine Hyperbel oder eine andere krumme Linie sey, wird man in den vorhin angeführten Büchern ausführlich beantwortet finden. B.

Menge von unvermeidlichen Irrthümern, die sich in der Ausübung zusammen vereinigen, um die theoretische Genauigkeit immer weiter zu entfernen.

Hier sind die Versuche, die die vorige Theorie bestätigen. Diejenigen, die ungern zum Vortheil dieser Theorie urtheilen, weil ihnen die Menge von Beobachtungen, die dieselbe zu schwächen scheinen, und die in der That die genaue Richtigkeit verhindern, im Wege sind, können sich davon überzeugen, wenn sie die besondern und einzelnen Umstände der folgenden Versuche lesen. Diese sind vollkommen authentisch. Ja die einsichtsvollen und verständigen Männer, die sie selbst machten oder mit ansahen, hatten so grosse Vortheile dabey, sie zu läugnen, daß meiner Meinung nach der Beyfall derselben die vollkommenste Bestätigung und alle nur zu verlangende Ueberzeugung gibt. Sie sind aus der Vorbereitung zum französischen Bombardier des Herrn Belidors, Seite X. genommen.

„Als gegen das Ende des 1725ten Jahres meine Tabellen fertig wurden, sagt Herr Belidor, so wünschte jedermann Proben damit zu machen ——. Man fieng bey der Ladung eines Mörsers mit einem Pfund Pulver ohne Erde an, und man richtete ihn auf einem Winkel von 15 Grad. „Man warf 2 Bomben, die fast gleich weit fielen. Hierauf „warf man eben diese Bomben mit 1 Pfund Pulver unter einem Winkel von 45 Grad, um zu sehen, ob die Schußweiten doppelt so groß seyn würden (wie es die Theorie angibt). Man fand die Weiten so, wie man sie vermuthet „hatte. Man fand eine gleiche Richtigkeit bey einer zwey- „oder dreypfündigen Ladung und die Schußweiten unter 45 „Grad fielen immer doppelt so groß aus, als die von 15 Grad.

„Da man nun von der Gewißheit des Grundsatzes, nach „welchem unsere Tabellen verfertiget waren, überzeugt war, so „begehrte Herr Tuffereau, Commendant unserer Schule zu

„la

„*la Fère*, daß man eine Bombe auf 40 Toisen werfen mög„te. Man suchte in den Tabellen, die nach der Theorie der „Parabel calculirt waren, die darzu gehörige Richtung nach „Maaßgabe des Probeschusses auf, und warf mit 1 Pfund „Pulver die erste Bombe auf 39 Toisen, und die zwote auf „41. Er verlangte darauf 2 andere Bomben mit eben der„selben Ladung auf 70 Toisen zu werfen, und nachdem man „die Erhöhung des Mörsers in den Tabellen gesucht hatte, „fiel die erste auf 71 Toisen, und die zwote auf 71 Toisen „und 4 Schuh.

„Man lud hierauf den Mörser mit 2 Pfund Pulver „noch immer ohne Erde, um Bomben auf weitere Distanzen „zu werfen. Bey jeder neuen Ladung that man auch einen „neuen Probeschuß. Man that den Vorschlag zwo Bomben „auf 100 Toisen zu werfen; die erste fiel auf 102, und die „andere auf 100 Toisen und 5 Schuh. Man sollte abermal „zwo Bomben auf 120 Toisen werfen; die erste fiel um ein „gutes zu kurz, weil an der Verkeilung des Mörsers etwas „verrükt war: die zwote aber wurde unter eben dem Grade der „Erhöhung als die vorige geworfen, und sie fiel auf 118 Toi„sen und 3 Schuh, und eine dritte endlich auf 121 Toisen. „Man verlangte endlich noch weit grössere Schußweiten, und „sie giengen alle so lange gut, so lange man sich keiner Erde „bediente ——. Einige Tage darauf gebrauchte man Erde „zu den Würfen, um Bomben auf 200, 250 und 300 Toi„sen zu werfen. Die Schußweiten trafen so ziemlich mit den „Tabellen überein, aber doch nicht so genau, als vorher, da „man ohne Erde warf. Man warf wieder andere auf 400, „500 und 600 Toisen, und die Schußweiten fielen ungefehr „um 8. oder 10 Toisen kürzer aus, als es seyn sollte. **Man „kann den Grund davon unten in der Note se„hen.** (*a*)

„Als

(*a*) In den grössern Schußweiten sind die Bomben längere Zeit in der Luft. Daher kommt es, daß die Bewegung des gewor-

fenen

„Als ich zu Anfange des Maymonats im Jahr 1731
„aus der Königl. Buchdruckerey ein Exemplar von meinen Ta-
„bellen erhielte, die so eben die Presse verliessen, so ersuchten
„mich die Officiers des unter dem Befehle des Herrn de la
„Perrelle stehenden Artilleriebataillons und noch andere Artil-
„lerieofficiers neue Versuche anzustellen, welchen sie viele Ta-
„ge hintereinander mit vieler Emsigkeit beywohnten. Wir
„warfen mit einander vorsetzlich aus allerhand Mörsern Bom-
„ben auf 50, 112, 150, 200, 250 und 300 Toisen.
„Diese Würfe fielen insgesammt wohl aus, wie man dieses
„aus den Berichten sehen kann, die sie selbst aufgesetzet ha-
„ben, und die am Ende dieses Vorberichts angeführet sind ic."

Wenn

---

fenen Körpers gegen das Ende des Wurfs so sehr abnimmt und dadurch die Weite abkürzet. In der Theorie nahm man aber diese Bewegung als gleichförmig an. Da man inzwischen in den Belagerungen die Batterien der Mörser gemeiniglich höchstens nur auf 300 Toisen weit von den Oertern, die man durch diese Feuerkugeln verderben will, errichtet, so zeigen die vorigen Versuche, daß die Praxis beym Bombenwerfen, die auf der Theorie der Parabel gegründet ist, allerdings dem Gerathewohl vorzuziehen sey, welches in Ansehung der Zeit und Kosten sehr nachtheilig ist. Wenn man hingegen nach den geometrischen Regeln verfährt, so hat man den grösten Vortheil an Kosten und der Zeit. Will man nach denselben auf ein nicht weit entferntes bestimmtes Objekt werfen, so werden durch einen einzigen Probeschuß alle übrige Schüsse reguliret. Will man aber Häuser oder Gebäude einer Stadt verderben, so machen 10 Toisen mehr oder weniger in den grossen Schußweiten nichts, weil der Raum, in welchem die Bomben niederfallen können, sehr ansehnlich und groß ist.

Man hat endlich ein Mittel, alle Irrthümer in den grossen Schußweiten auf einmal zu berichtigen; Gesetzt die Erfahrung hätte uns in den Weiten von 600 Toisen gezeigt, daß die Weite sich ordentlich um 10 Toisen verkürzte; Wollte man nun eine Bombe auf eine solche Entfernung werfen, so darf man nur seinen Mörser so richten, als wenn man auf 610 Toisen werfen wolte. So wird der Irrthum beynahe gehoben seyn.

Wenn nun, nach so vielen Versuchen von dieser Art, irgend ein übeldenkender und eigensinniger Mensch noch die Einführung der geometrischen Regeln in die Artillerie nicht zulassen wollte, der mag die Erlaubniß haben, sich ganz allein in seinen Ideen zu gefallen. So lange Menschen noch auf den wichtigen Vortheil ihrer eigenen Erhaltung sehen werden, so darf man schwerlich besorgen, daß eine solche Meinung lange daure, und noch weniger, daß sie ihr Glück mache.

Gebrauch der Parabel
bey der Berechnung der Aushöhlung der Minen.

* §. 145.

Eine Mine ist eine Kammer oder Ofen unter der Erde, worein man eine zureichende Menge von Pulver legt, um das, was über derselben ist, in die Luft zu sprengen. Die Minen haben einen sehr grossen Nutzen in den Belagerungen und sind vielleicht die beste Erfindung und furchtbarste Vertheidigung, die man einem angreifenden Feinde entgegen setzen kan.(*) Es ist daher daran gelegen, die Construction derselben

(*) Schon in den alleraltesten Zeiten sind diese schreklichen Höhlen unter der Erde, die man heut zu Tage Minen nennet, sehr im Gebranch gewesen. Nur waren sie in der Art, wie sie würkten, von der itzigen freilich sehr unterschieden. Man hatte noch nicht zum Vortheil oder Schaden des menschlichen Geschlechts das fürchterliche Pulver erfunden. Man konnte also auch noch nicht mit demselben die Mauren der Städte in die Luft jagen. Aber die Feinde untergruben von weitem her die Fundamente der Mauren. Sie unterstüzten dieselben mit hölzernen Pfeilern und füllten die leeren Plätze mit allerhand brennbaren Dingen an. Waren sie mit dem Untergraben fertig,

ben auf Grundsätze zu bringen, wodurch dem langwierigen Ungefehr und dem schweren Gange der Versuche abgeholfen werde.

Ich

---

tig, so wurde dieses alles mit Feuer angezündet. Die vom Feuer zerstörten Stützen fielen dahin und mit ihnen die Mauern selbst, die keine Fundamente mehr hatten: Nun hatte der Feind eine Oefnung, durch welche er in die bevestigte Stadt eindringen und sie erobern konnte. Man weiß, daß nach der alten Art zu kriegen, erschreckliche Thürme gegen die Vestung geführt wurden, von welchen ein Regen von Steinen, Pfeilen und anderm Geschoß in die Stadt flog. Auch diese wurden von den Belagerten, so wie es vorhin erzählt wurde, untergraben und zu Boden gestürzt. Man lese die verschiedenen Verfasser, die von der Kriegskunst der Alten geschrieben haben, einen Thucidides, Polybius u. s. w. Wer siehet nicht, daß unsere heutigen Helden von den ältern Kriegern ihre Künste gelernet haben. Diese stürzeten die Werke durch Feuer in die Erde. Jene werfen sie durch Feuer in die Luft. Gegen das Ende des 15ten Jahrhunderts sind die mit Pulver geladenen Minen zuerst vom **Pietro de Navarra** mit glücklichem Erfolg in der Belagerung von Neapel gebraucht worden. Der Herr von **Valliere** ist derjenige, der dieser Wissenschaft von den Minen ein ganz anderes Ansehen verschaffet und sie zu einer grossen Vollkommenheit erhoben hat. Doch verdienen Herr von **Vauban** und der Herr **Belidor** gleichfalls, daß ihre Namen der Nachwelt bekannt werden.

Der Nutzen, den die Minen liefern, bestehet unter andern darinn, daß man dadurch grosse Oefnungen in den Wällen erhält, um auf eine vortheilhafte Art einen Sturm wagen zu können, daß dadurch die Batterien der Feinde über den Haufen geworfen werden; daß sie den Feind in seiner Arbeit stöhren, und den Soldaten in einige Furcht setzen. Denn kein Gedanke kan ihnen schrecklicher seyn, als dieser, daß sie über Minen zu stehen kommen, wodurch auch die tapfersten Helden ein Spiel der Luft werden. Sie haben indessen doch auch verschiedene Unbequemlichkeiten —. Sie werden durch eine so genannte Wurst oder durch eine Masse Pulver, die in einem leinenen Sack biß zu dem Ofen geführet wird, angezündet und

es

Ich kenne von dieser Materie kein gelehrterer und schöneres Werk als die vortrefliche Abhandlung von den Minen des würklichen Generallieutenants des Herrn von Valliere. Ich rathe daß man sich alle Mühe gäbe, dieselbe wohl zu verstehen; Man findet diese Abhandlung in dem dritten Bande des Polybius der von dem Ritter Folard mit den schönsten Erklärungen heraus gegeben ist. Diejenigen, die so viel auf Erfahrung halten, werden daselbst finden, daß dieser berühmte Verfasser ohne die Geometrie niemals auf diese Entdeckungen gekommen seyn würde. Allein durch Hülfe einer guten Theorie haben ihn einige Jahre in der Ausübung dasjenige gezeiget, was die Praktik vieler Jahrhunderte jederzeit in der Dunkelheit gelassen hat.

Wäre es bloß um die Construction der Minen zu thun gewesen, so hätte man nur die simple Geometrie nöthig gehabt. Um aber das Pulver nicht unnützlich zu verbrauchen und um nur einen bestimmten Grad der Verwüstung zu verursachen, ist es nöthig, mit der Last, die man in die Höhe heben will, die Menge des Pulvers in Verhältniß zu setzen. Man kann aber dieses Gewicht nur durch Ausrechnung des körperlichen Innhalts der Erdmasse, die von der Mine in die Luft gesprengt wird, finden. Diesen Innhal weiß man, wenn man die hohle Figur oder die Höhlung kennet, die die Mine, nachdem sie gespielt hat, zurük läßt.

Herr de Valliere hat gefunden, daß in solchen Böden, die ungefehr in allen ihren Theilen gleich stark widerstehen, diese Aushöhlung, oder, wie sich die Minirer ausdrücken, dieser Trichter

---

es hat der Minirer dadurch Zeit, sich auf die Flucht zu machen. Man lese von den Minen unter andern Speckels Architectur von Vestungen, Straßb. 1589. Belidors vermischte Werke, übersetzt vom Herrn Schneller, 8. 1769. Le Blonds Artilleriewissenschaft, übersetzt vom Herrn Jäger, 2c. B.

Trichter die Figur eines **parabolischen Afterkegels** habe, das heißt, daß sie einen solchen Körper vorstelle, der durch die Umwälzung einer Parabel AGDHC (Fig. 30.) um ihre Axe DB erzeugt wird, und deren Brennpunkt in dem Mittelpunkt F des Ofens ist.

Vor den Beobachtungen dieses berühmten Generals hielte man diesen Körper für einen Kegel AFC, dessen Spitze in *F* war. Nach der Zeit bemerkte man, daß er sich mehr einem abgekürzten Kegel AGHC näherte (*a*). Nachdem man aber hierüber eine sehr grosse Anzahl von Versuchen mit der genauesten Sorgfalt gemacht hatte, so erkannte Herr **de Valliere**, daß die Schräge oder der innere Abhang der Aushöhlung keine grade Linie sey und muthmaßte daher, daß es wohl ein **parabolischer Afterkegel** seyn könnte, dessen Brennpunkt er in dem Mittelpunkte des Ofens setzte. (*)

Um

(*a*) Belidors Cursus Mathematicus.

(*) Der erste Verdacht, daß diese Höhlung kein Kegel seyn könne, entstand daher, weil man sich nicht vorstellen konnte, daß das Pulver, welches in der Kammer F ist, seine Würkung just nach einem rechten Winkel thäte und daß der Grund des Trichters sich vollkommen in einer Spitze endigen sollte. Versuche lehrten bald die Gewißheit und Richtigkeit der Vermuthung. Man fieng an, die Höhlung für einen abgekürzten Kegel anzusehen, bey welchem der Halbmesser FH der Grundfläche des kleinen abgeschnittenen Kegels halb so groß sey, als der Radius BC von der Grundfläche des abgekürzten Kegels. Was für ein grosser Unterschied aber zwischen diesen 2 Voraussetzungen in der Berechnung der Minen heraus komme, wird man aus folgender Vergleichung sehen. Es sey der abgekürzte Kegel AGHC, so ist der noch fehlende kleine Kegel GEH und der ganze Kegel AEC. Nun verhalten sich aber die Kegel zu einander, wie die Würfel ihrer Diameter. Folglich verhält sich der Kegel AEC zum Kegel EGH wie $\overline{AC}^3$ zu $\overline{GH}^3$

Um seinen Vermuthungen die Gewißheit zu verschaffen, so verlängerte er DF und machte DI so groß als DF. Er wußte, daß die Distanz FC vom Brennpunct C bis zu jedem Punkte der Krümmung der Parabel allemal der Distanz CM oder BI nemlich der Entfernung von dem nämlichen Punkt C bis

---

GH. Es ist aber FH$=\frac{1}{2}$BC vermöge der Bedingung. Folglich ist auch GH$=\frac{1}{2}$AC, oder AC ist noch einmal so groß als GH. Folglich verhält sich AC : GH$=2:1$. Deswegen verhält sich auch der Kegel AEC zum Kegel EGH wie 2^3 zu 1^3 wie $8:1$. Folglich ist der Kegel AEC achtmal so groß als der Kegel EGH. Folglich ist der abgekürzte Kegel AGHC$=\frac{7}{8}$ von dem Kegel AEC.. Nun verhält sich wegen der ähnlichen Triangel CB : HF$=$ BE : FE. Es verhält sich aber CB : HF$=2:1$. (Bedingung) Folglich auch BE : FE$=2:1$; folglich ist BF die Helfte von BE. Vergleichen wir nun die beyden Kegel AFC und AEC gegen einander, so sehen wir, daß sie beyde einerley Grundfläche haben; Sie verhalten sich also zu einander, wie ihre Höhe BF und BE, oder, wie $1:2$. Folglich ist der Kegel AFC$=\frac{4}{8}$ von AEC. Folglich verhält sich der abgekürzte Kegel AGHC zum Kegel AFC$=\frac{7}{8}:\frac{4}{8}=7:4$. Wenn man also die Mine als einen Kegel AFC berechnete und fände, daß man nur 4 Centner Pulver gebrauchte, so würde man nach der andern Berechnung 7 Centner nöthig haben, wenn anders die Menge Pulvers nach dem Verhältnisse der Masse zunehme, welches aber Herr Belidor in seiner neuen Theorie von den Minen anders bewiesen hat.

Endlich fand man auch, daß die Seitenwände keine gerade Linien vorstellten und man kam durch Nachdenken und Versuche endlich darauf, diesen Körper als eine Paraboloide zu berechnen. Statt dessen aber auch Herr Belidor noch lieber nur eine abgekürzte Paraboloide annehmen mögte. Der Unterschied, wenn man die Mine als einen abgekürzten Kegel oder als eine Paraboloide berechnet ist nicht sehr von Erheblichkeit. Herr Belidor fand, daß wenn er eine Mine, die 40 Schuh zur Linie des schwächsten Widerstands hat, als eine Paraboloide berechnete, er zum körperlichen Innhalt 119821 Cubickschuh bekam; als abgekürzter Kegel hielte sie 118115 Cubickschuh. Folglich ist der Unterschied nur $\frac{1}{72}$. B.

bis an die Directrix KM gleich sey (§. 90). Er trug deswegen FC auf BI und fand FC so groß als BI. Er nahm darauf nach Belieben einen Theil der Axe DT, der grösser war, als DF. Er schnitt davon ein Stück TS=DF oder DI herunter und richtete in S eine Perpendiculairlinie SR auf. Darauf fand er, daß die Distanz FR so groß als DT sey. Nothwendige Eigenschaft! wenn anders dieser Körper eine **Paraboloide** seyn solte. Denn es ist FR=RP (§. 90.) = SD + DI = SD + TS = DT.

Man wird sich noch erinnern, daß die Ordinate FH am Brennpunkt der Helfte des Parameters der krummen Linie gleich sey und daß die Distanz DF der 4te Theil des Parameters sey (§. 78); folglich ist FH = 2 DF. Auch dieses lehrte den **Herrn de Valliere** die Erfahrung.

Eigenschaften genug, die die Parabel kennbar machen. Man muß daher die Höhlung einer Mine als einen **parabolischen Afterkegel** berechnen. Zu dieser Rechnung braucht man nur die Perpendiculairlinie FB zu kennen, die aus dem Ofen auf die oberste Fläche des Erdreichs, das man in die Höhe werfen will, gezogen ist. Und weil die Mine nach dieser Seite zu ihre Würkung äussern soll, so heißt die Perpendiculairlinie FB **die Linie des geringsten Widerstandes**. Diese ist mit dem Halbmesser BC, wodurch die obere Oefnung des Trichters beschrieben wird, jederzeit von gleicher Grösse (*).

 Um

(*) Dieses ist nur in dem einzigen Fall wahr, wenn die Mine mit einer bestimmten Ladung von Pulver gesprengt wird. Es ist nicht schwer, sagt Herr Belidor in seiner neuen Theorie der **Minen**, Minen anzulegen, deren obere Durchmesser, 3, 4, 5, 6 mal so groß sind, als die geringste Widerstandslinie. Es sind zu la Fére 1729. die überzeugendsten Versuche darüber angestellet worden, die ich hier nicht anführen mag. Ich bemerke nur, daß man zu Bisy im Jahr 1753 eine Mine sprengte

Um nun zu erkennen, daß allein die Kenntniß der Länge der Linie FB hinlänglich sey, den körperlichen Innhalt der Aushöhlung einer Mine oder einer Paraboloide AGDHC zu finden, so sey $FB = BC = a$; und wegen des gleichschenklichten recht winklichten Triangels FBC ist $\overline{FC}^2$ oder $\overline{CM}^2$ oder $\overline{BI}^2$ (§. 90) $= \overline{FB}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa$; Folglich ist $BI = \sqrt{2aa}$ und $FI = BI - FB = \sqrt{(2aa)} - a$; Folglich $FD = \frac{FI}{2} = \frac{\sqrt{(2aa} - a}{2}$; Folglich $FB + FD = BD = a + \frac{\sqrt{(2aa)} - a}{2}$ Dieses sind lauter bekannte Grössen.

Ist aber der Radius BC von der Grundfläche des Trichters bekannt, so kennt man auch diese Grundfläche selbst. Man darf sie dahero nur durch die Helfte der Höhe BD der Paraboloide multipliciren, um den gesuchten körperlichen Innhalt zu bekommen (§. 72).

Weiß man daher, wie tief der Minirer hinein gehen muß, um seinen Ofen zu construiren, so kan man den körperlichen Innhalt oder die Anzahl der Cubickschuh von Erde, die die Mine hinaus werfen wird, finden, und wenn man durch Versuche, die erforderliche Menge Pulver bestimmt, um einen Cubickschuh von dieser Erde, in welcher die Mine angelegt ist, in die Höhe zu werfen, so weiß man, wie viel Pulver man überhaupt gebrauche, um die ganze Masse der Höhlung in die Luft zu sprengen (*).

Allein

---

sprengte, deren kleinste Widerstandslinie 12 Schuh war, und die man statt 300 Pfund mit 3000 Pfund Pulver geladen hatte. Diese solte zum Diameter 24 Schuh haben, hatte aber 72 Schuh. Man sehe *le Blond* XIV Cap. p. 27. B.

(*) Damit man sich eine kleine Idee von der etwa zu gebrauchenden Menge Pulvers machen könne, will ich folgendes hersetzen. 1)

Allein mich dünkt, man solte für den körperlichen Innhalt, der durch die Mine in die Höhe geworfenen Erde nur den abgekürzten Parabolischen Afterkegel AGFHRC annehmen, das heißt, man solte nur denjenigen Theil der ganzen Paraboloide rechnen, welcher sich über die doppelte Ordinate GH an dem Brennpunkt F befindet. Denn die untere Höhlung oder der kleine parabolische Afterkegel GDH ist augenscheinlich nur durch den Druck des Pulvers gegen den Scheitelpunkt D verursacht werden. Man muß also, um den wahren körperlichen Innhalt der in die Höhe geworfenen Erde zu bekommen von dem ganzen parabolischen Afterkegel ADC den kleinen GDH abziehen. Man kennt aber auch alle nöthige Dimensionen desselben durch die Dimensionen des grössern. Denn es ist FH = 2 FD (§. 92. 78.) diese ist eine bestimmte Grösse. Was nun übrig bleibt, nachdem man den kleinen Afterkegel von dem grössern abgezogen hat, das ist der körperliche Innhalt des abgekürzten parabolischen Afterkegels.

Wolte man aber die Aushöhlung als einen abgekürzten Kegel AGHC ausrechnen, so müßte man noch FH messen. Alsdenn würde man mit leichter Mühe durch Hülfe der ähnlichen Triangel CBE und HFE die Grösse der Höhen FE und BE finden und durch diese würde man sowol den körperlichen Innhalt des grossen Kegels AEC als auch des kleinern Kegels GEH bestimmen können. Zöge man darauf GEH

1) Eine Cubickklafter Sand oder Tuf Erde auf vestem Lande auszuheben, braucht man wenigstens 11 Pfund.
2) Zu einer Cubickklafter Leimen im vesten Lande 15 Pfund.
3) Ein Cubickklafter Sand oder umgegrabener Erde 9 Pfund.
4) Ein Cubickklafter Mauerwerk, welches ausser der Erde stehet, erfordert 20=25 Pfund. Steht es aber im Grunde, 35 = 40 Pfund. Doch hänget alles sehr von der Güte des Pulvers und von andern Umständen ab. Insonderheit muß man auf die Zähigkeit des Erdreichs sehen. Eine schöne Anweisung dieses alles zu berechnen, findet man in Belidors vermischten Werken. B.

von AEC ab, so ist klar, daß man den körperlichen Innhalt des abgekürzten Kegels bekommen würde.

* §. 146.

Anmerkung. Diejenigen, die die Höhlung der Mine als einen abgekürzten Kegel betrachten, sagen, daß man durch Versuche finde, daß $FH = \frac{BC}{2}$. Allein man muß wohl merken, daß dieses nicht so sey, wenn man einen ganzen oder abgekürzten parabolischen Afterkegel annimmt. Denn sonst wäre $GH = BC$. Es ist aber $GH =$ dem Parameter der erzeugenden krummen Linie (§. 93) Folglich wäre die Ordinate $BC =$ dem Parameter p. Folglich, da $\overline{BC}^2$ so groß ist als $BD \times p$ (§. 20.) so wäre $pp = BD \times p$. oder $p = BD$. Man hat aber schon gesehen, daß $p = BC$: Folglich wäre $BD = BC$. Es hat aber auch die Erfahrung gezeiget, daß $BC = BF$. Folglich wäre $BD = BF$, welches unmöglich ist.

Man muß auf diese Beobachtung aufmerksam seyn, um sich für eine Unachtsamkeit zu hüten, worein einige Verfasser gefallen sind, welche immer $FH = \frac{BC}{2}$ annehmen. Ohngeachtet sie die Aushöhlung der Minen nach einer Paraboloide berechneten.

§. 147.

Weil im nachfolgenden von converen und concaven Afterkegeln die Rede seyn wird, so kan man hier schicklich zeigen, wie Künstler solche verfertigen können. Ein Afterkegel ist ein Körper, der durch das Herumwälzen eines Kegelschnitts um seine Axe erzeugt wird. Man nennet ihn aber insbesondere eine Paraboloide, Ellypsoide, Hyperboloide

boloide je nachdem die erzeugende krumme Linie eine Parabel, Ellypsis oder Hyperbel ist.

§. 148.

Die Methode, wie Künstler einen Afterkegel oder irgend einen erhabenen oder hohlen Körper machen können.

Man ziehet auf Kupfer, Stahl rc. die bestimmte erzeugende krumme Linie. Z. E. eine Parabel, wenn man einen parabolischen Afterkegel haben will. Man muß dabey sehr sorgfältig darauf sehen, daß die Materie, worauf man diese krumme Linie ziehen will, eine so polirte und vollkommene Ebene sey, als die Kunst zu liefern im Stande ist. Man lasse durch die Axe derselben eine Stange mit einer Kurbel gehen, wie es die 31te Figur zeiget. Darauf schneide man bis auf einen scharfen Rand, den die Krümme der Linie abbildet, alles weg, damit bey dem Herumwälzen nur die krumme Linie da sey, die der bestimmten Materie die Form gebe. Nun muß man diese Materie in der Mitte aushöhlen und zubereiten, daß man innerhalb derselben die Fläche, auf welche die krumme Linie gezogen ist, hinein bringen könne. Muß man alsdenn die Axe dieser Fläche bevestigen, damit sie ihre Richtung nicht verändere. Nun wird die krumme Linie durch das Herumdrehen der Kurbel ihre Figur in allen Punkten des Umkreises der Materie in oder um welcher sie sich herum drehet, eindrücken. Wir setzen voraus, daß die Materie weich genug sey, damit sie leichtlich durch den scharfen Rand sich krümmen und absondern lasse, daß sie aber doch Vestigkeit genug dabey habe, die gegebene Form zu behalten. Bringet man in eine solche Höhlung eine Materie, die dieselbe vollkommen ausfüllt, so bekommt man einen erhabenen Körper, der die Figur der gebrauchten Form hat.

§. 149.

Man hat Maschinen angegeben, wodurch man die krummen Linien durch eine zusammenhangende Bewegung beschreiben kan (*). Mir kamen dieselben aber sehr verdächtig vor, wenn man eine recht genaue Zeichnung haben will. Die Saiten, die Federn, die Falzen rc. sind Irregularitäten und Veränderungen nicht nur von der Luft und dem Wasser, der trockenen und der feuchten Witterung, wodurch sie sich werfen und krümmen, ausgesetzet, sondern man kan sich auch deswegen nicht sicher darauf verlassen, weil die verschiedenen Stücke bey der Bewegung stärkere oder schwächere Drückung erhalten. Man ist also nicht auf alle mögliche Art versichert, daß man einen einzigen Punkt der zu beschreibenden krummeu Linie bekomme. Es ist daher meiner Meinung nach sehr nothwendig eine erzeugende krumme Linie mit dem Zirkel zu reissen; denn dieses ist die einfachste von allen Maschinen. Man muß nämlich nach und nach die Punkte der verlangten krummen Linie geometrisch suchen (§. 25). Wenn man recht viele von solchen Punkten bestimmt, so wird dadurch eine krumme Linie beschrieben werden, die in einem fortgehet oder deren Punkte sehr nahe aneinander sind, und die folglich so genau und richtig seyn wird, als sie nach menschlicher Geschicklichkeit seyn kan. Ich mögte auch in dem Falle, wenn die krumme Linie mit einer zusammengesezten Maschine beschrieben wäre dennoch anrathen, daß man die Zeichnung jederzeit mit dem einfachen Zirkel rectificirte oder berichtigte.

(*) Man findet sie in verschiedenen algebraischen Werken, die von der höhern Geometrie handeln. Man sehe unter andern von Wolfs Werke, Wiedeburgs höhere Geometrie, Bions mathematische Werkschule, *Deschales mund. Math. Catoptr.* L. III. &c. B.

Gebrauch der Parabel bey Verfertigung der Sprachröhren.

§. 150.

Ein Sprachrohr ist ein Instrument, wodurch man in der Ferne mit jemanden verständlich reden kan. Es sind noch kaum 100 Jahre verflossen, seit dem man diese Erfindung zum ersten mal gemacht oder in Europa erneuert hat (*a*). Hauptsächlich auf der See empfindet man die grosse Nutzbarkeit desselben. Es können sich zwey Schiffe, die sich einander begegnen, nicht so sicher als 2 Menschen, einander nähern. Wenn sie auch nur im geringsten zusammen stossen würden, so würden sie doch ihrer ungeheuren Masse wegen der Gefahr ausgesezt seyn, sich einander zu zerscheitern und dadurch zu Grunde zu gehen.

Man muß indessen doch öfters sich einander Nachrichten ertheilen. Die Zeit erlaubt es nicht immer die Chaluppe in die See zu lassen. Das Sausen der Winde und das Geräusche des Wassers würde die blosse Stimme an Stärke übertreffen. Man muß daher viel lauter reden, als dieses Geräusch ist. Man muß sich daher um die beste Construction eines Instruments bekümmern, welches uns diese Vortheille verschaffen kan (*).

(*a*) Man sehe die Anmerkung unten bey dem §. 156.

(*) Diese Sprachröhre haben ohne Zweifel einen grossen Nutzen zur See und zu Lande. Ausser dem, was unser Herr Verfasser anführt, werden auch die Ruderknechte in einem Schiffe dadurch regiert; auch geben Admiräle dadurch den zerstreuten Schiffen

Gründe der Erfahrung. 1) Die Stimme oder die Rede wird um desto deutlicher gehöret, um je gerader sie gegen den Ort, wo sie verstanden werden soll, gerichtet ist.

2) Eine Stimme breitet sich um desto weniger in der Runde herum aus, um je grössere Stärke sie besitzet, sich gegen den Ort zu bewegen, gegen welchen man sie fortpflanzen läßt.

3) Um je mehr die Röhren, durch welche die Stimme gehet, innerhalb geebnet sind, oder je weniger Ungleichheiten sie haben, um desto leichter pflanzet sich die Stimme in die Weite fort.

4) Die Stimme, die durch ein Rohr gehet, welches immer enger wird, breitet sich nicht so sehr aus und pflanzet sich nicht so weit fort, als wenn sie durch eine Röhre geht, die sich nach und nach immer erweitert. Die elastischen Theile der Luft, die in einen kleinern Raum gebracht sind, worin sie sich nicht ausbreiten können und zu sehr gedrängt sind, verlieren viel von ihrer Würksamkeit (*). Folglich muß der Schall oder die Stimme die Lebhaftigkeit verlieren und einen kleinern Weg durchlaufen. Grade umgekehrt ist es, wenn sie durch Röhren geht, die immer weiter werden.

§. 151.

Schiffen Befehle. Man hat deswegen heut zu Tage auf allen englischen und rußischen auch auf andern Schiffen solche kleine Sprachröhre. Sie dienen auch bey Belagerungen, Schlachten, auch kan man von einem Landhause den Arbeitern auf dem Felde mancherley Befehle mittheilen. B.

(*) Dieses mögte wohl ein Grundsatz seyn, der wider die Erfahrung wäre. Man nehme die Versuche mit den Hörröhren, oder die erschreckliche Verstärkung durch Trompeten und andern solchen Blasinstrumenten; solten auch die elastischen Theile der Luft nicht vielleicht noch mehr gespannt und folglich würksamer werden? B.

§. 151.

Zusatz. Aus den vorigen Gründen folget:

1) Daß das Mundstück eines Sprachrohrs eines von denjenigen Stücken dieses Instruments ist, welches man mit der größten Sorgfalt bearbeiten muß. Es muß sich so genau an den Mund anschliessen, daß von dieser Seite im Reden auch kein einziger Strahl der Luft verlohren gehe.

2) Das Hauptstück des Sprachrohrs muß so viel es die Bequemlichkeit erlaubet, nicht aus ineinander gesteckten Röhren verfertiget seyn. Dieses würde durch die daher entstehenden Ungleichheiten der Fortpflanzung der Stimme hinderlich seyn.

3) Unter den zu dieser Construction tauglichen Materien muß man solche wählen, die am wenigsten klingend sind, oder solche, deren Elasticität am wenigsten zu erregen ist (*). (Doch darf die Bequemlichkeit nicht zu sehr darunter leiden) Denn die schallenden Körper verbreiten den Schall rund um sich herum. Dieses muß aber nothwendig der Fortpflanzung des Schalls gegen einen bestimmten Ort ein Nachtheil erregen. Um also die Würksamkeit der Federkraft der zu Sprachröhren tauglichen Materien zu verhindern, halte ich es für sehr gut, die äussere Fläche dieses Instruments mit einer Haut oder Leder

(*) Diese Meinung des Herrn Verfassers wird wohl nicht den Beyfall aller Naturkündiger erhalten. Vernunft und Erfahrung zeigen, daß die Ursache der Vermehrung des Schalls nicht allein darin zu suchen sey, in welcher Lage gegen einander die Schallstrahlen sich fortpflanzen, sondern daß durch die Elasticität des Körpers, woran die Schallstrahlen stossen, der Schall ungemein vermehrt werden müsse. Man lese folgende Werke darüber nach, die meistens meine Behauptung bestätigen. *Cour de Physique Experim. par Desaguliers Tom. II. Gravesands Phys. Elementa math. T. II.* Muschenbroeck Physick §. 1166. Nollets Vorlesungen über die Naturlehre 11te Vorlesung. von Wolfs Versuche III. Band Cap. II. Krafts *Praelect. Phys.* III. B.

der oder Chagrin zu überziehen, welche die Schwingungen der kleinsten Theile aufhielte oder unterdrückte.

Ich werde in der Folge die Schalllinie (Ligne Vocale) oder den Schallstrahl (Rayon sonore) eine jede Linie oder gleichsam Faden der Luft nennen, nach welcher die Stimme sich fortpflanzt. Was die geometrische Figur des Sprachrohrs anbetrift, so müssen dadurch die Schalllinien eine solche Richtung bekommen, daß sie sich so wenig als möglich, durchkreuzen, und daß sie folglich eine Neigung erhalten, sich nach parallelen Richtungslinien zu bewegen. Hierdurch werden sie insgesammt auf das vollkommste nach dem Orte hingehen, in welchem man sie hören soll.

§. 152.

Erster Hauptsatz Ein Sprachrohr von Cylindrischer oder kegelförmiger Gestalt, wie man es gemeiniglich verfertigt, hat nicht die größte mögliche Vollkommenheit (§. 33. 34)

Beweis. Es sey AA das **Mundstück** des **Sprachrohrs**; BC. Das **Hauptstück**; CD der **Flügel** desselben; Ox dessen Axe. O der Punkt des Mundstücks, wovon die Linien OF und OL auslaufen sollen. Nun beweiset es die Erfahrung, daß ein Strahl der Luft, welcher von einem Punkte ausfährt oder der durch eine sehr enge Oefnung gehet, sich in Form eines Büschels ausbreite, wenn er kein Hinderniß findet. Folglich werden sich die mehrsten Schalllinien OF, OL an die innern Wände der Röhre BC anstossen und sich nach dem Anstossen so reflectiren, daß der Reflexionswinkel allemal dem Einfallswinkel gleich sey. Dieses ist das bekannte Catoptrische Gesetz. Nun behaupte ich aber, daß in einem cylindrischen Sprachrohre (Fig. 33.) es nicht möglich sey, daß die reflectirten Linien mit der Axe Ox parallel werden, wie sie es doch seyn solten, um sich auf einerley Art

zu

zu bewegen. Denn es ist evident, daß wenn sie parallel mit der Axe seyn solten, sie an der mit der Axe parallellaufenden Wand BC herunter gleiten müßten, wenn sie auf dieselbe ausgefallen sind. Dieses kan aber niemals geschehen, denn der stumpfe Reflexionswinkel OLC kan solchergestalt niemals den Einfallswinkel OLB gleich seyn.

Ja, man würde nicht einmal einen Reflexionswinkel haben, weil die Schalllinie OL, die an der Wand BC hinstreicht, sich nicht vor der Seite des Hauptstücks des Instruments entfernen würde. Folglich — — — —

Es ist eben so leicht, auch bey Sprachröhren von Kegelförmiger Gestalt zu beweisen (Fig. 34) daß die reflectirte Linien F*s*, L*t* mit der Axe O*x* nicht parallel seyn können. Sie würden sonst auch unter sich parallel seyn; und wäre dieses, so würden auch die Reflexionswinkel *t*LC und *s*FC unter einander sich gleich seyn; folglich würden die Einfallswinkel OFB und OLB es auch seyn. Dieses ist aber unmöglich (Geometrie) Folglich — — —

§. 153.

Anmerkung. Ob ich gleich die kegelförmige Figur nicht für die vortheilhafteste in Ansehung der Verfertigung der Sprachröhre halte, so glaube ich doch nichts destoweniger, daß sie der cylindrischen vorzuziehen sey: weil, wenn alle Sachen sonst gleich sind, die reflectirten Linien in der kegelförmigen mehr unter sich parallel werden, als in der cylindrischen. Dieses ist leicht zu erweisen. Dadurch sind sie aber dem Hin- und Herwerfen in den Hauptstücke nicht so sehr unterworfen und folglich werden die Modificationen, die der Mund ihnen einmal eingedrückt hat, besser erhalten und fortgepflanzt.

Man muß nämlich dieses immer vor Augen haben, daß es nicht blos darauf ankomme, einen Lerm mit dem Sprachrohr

rohr zu machen, sondern artikulirte Töne und zwar mit dem nämlichen Eindruck, den sie vom Munde erhalten haben, fortzupflanzen. Man wird unten sehen, warum eine Kanone, Trompete, ein Waldhorn, eine Trommel, eine Glocke rc. viel weiter gehört werden, als ein Sprachrohr, ohne daß sie zum Fortpflanzen der Worte und der artikulirten Töne dienen können.

§. 154.

Zweyter Hauptsatz. Die vortheilhafteste Construction eines einfachen Sprachrohrs, dessen Hauptstück nur *nach* einer einzigen Figur gemacht ist, ist diese, daß man demselben die Gestalt einer Paraboloide gäbe, deren Brennpunkt in dem Mundstück und just da ist, wo man redet. Alsdenn können die articulirten Töne durch diesen Brennpunkt, so viel möglich ist, gehen (Fig. 35).

Beweis. Alle Schalllinien OF, OC, oder die mehrsten von ihnen werden nach unserer Voraussetzung aus dem Brennpunkt kommen. Sie werden sich daher nach ihrem Auffallen auf die Paraboloide mit ihrer Axe Ox parallel reflectiren (§. 72); folglich werden sie alle nach einerley Gegend sich bewegen, um eine gemeinschaftliche Würkung hervorzubringen. Dadurch erhält das Sprachrohr die möglichste Vollkommenheit.

§. 155.

Erste Anmerkung. Da auch noch andere Ursachen ausser der Figur da seyn können, welche zur Verstärkung des Sprachrohrs etwas beytragen, so ist wohl zu bemerken, daß unsere Behauptung sich hier darauf einschränket, zu beweisen, daß ein einfaches Sprachrohr, was seine geometrische Figur anbetrift, eine Paraboloide seyn müsse, oder, daß man unter einerley Umständen bey jeder andern Construction keinen so grossen Vortheil haben würde.

§. 156.

§. 156.

Zweyte Anmerkung. Es ist ein sehr grosser Unterschied zwischen dem, wie die Luft in einem Sprachrohr und zwischen dem, wie sie in einem Horn oder Trompete modificirt wird. Es geschiehet hauptsächlich vermöge der Federkraft ihrer eigenen Materie, die die Luft durch sehr schnelle, sehr gedrungene, sehr heftige Schwingungen stösset, daß diese Instrumente so weit gehört werden können. Eben so muß die Luft, wenn man auf diesen Instrumenten bläßt, nothwendig mit einer grossen Geschwindigkeit sich bewegen; die Materie der Sprachröhre aber darf nicht schallend seyn (§. 151) weil dadurch

1) nothwendig eine Veränderung in den Schwingungen der kleinsten Theile derselben vorgehen müßte; es würde folglich das Hauptstück des Instruments beständig seine Figur verändern. Dieses würde aber nothwendig die Regularität in der Reflexion der Schalllinien hindern (*).

2) Weil man mit einer gewissen gemäßigten Stimme reden muß, damit man die Worte deutlich unterscheiden könne. Hieraus erkennet man, daß wenn man auch nahe genug wäre, niemand uns würde verstehen können, wenn man durch ein Waldhorn oder Trompete redet. Durch ein Sprachrohr versteht man uns aber.

Man wird weiter unten sehen, daß wenn man eine Ellypsoide mit einer Paraboloide verbindet, der Effect des Sprachrohrs viel kräftiger werden könne. Allein dieses ist ein zusammen gesetztes Instrument. Hier aber haben wir es nur mit den einfachen zu thun.

Abhand-

(*) Diese Behauptung wird, durch die Erfahrung meiner Meinung nach sattsam widerleget. Man lese ausser den vorhin angeführten Büchern auch des gelehrten und würdigen Herrn Silberschlags in Berlin seine Klosterbergische Versuche. B.

Abhandlung
von der Erfindung der Sprachröhre.

Ob wir gleich von den Alten weder eine Theorie noch Praxis von der Verfertigung der Sprachröhre bekommen haben, so muß man doch bekennen, daß diese Erfindung in dem vorigen Jahrhundert nur wieder erneuert ist. Der Pater **Kircher**, ein Jesuit, sagt S. 132. seiner **Phonurgie**, daß, wie er in der **Vaticanischen Bibliotheck** zu **Rom** allerley aufgesucht habe, er ein Buch gefunden habe, welches folgenden Tittel hatte: *Secreta Aristotelis ad Alexandrum M.* **Geheimnisse des Aristotels, die an Alexander den Grossen gewidmet und überschicket sind.** Hierin wird unter andern auch von einem sehr wunderbaren Horn, (Fig. 32) welches dieser grosse Feldherr gebraucht haben soll, geredet. Der Ton desselben war so stark, daß man ihn bey seiner ganzen Armee verstehen konnte, und daß er sein Heer dadurch versammlete, wenn es auch in der Ründe um seinem Hauptlager auf 100 Stadien zerstreuet war. Der Pater Kircher rechnet 8 Stadien auf 1 italiänische Meile. Folglich machen 100 Stadien 12½ italiänische Meilen, daß ist eine Weite von 6 französischen Meilen. Ich weiß nicht, ob wir solche starke Sprachröhre haben. Es hatte 5 Cubitus oder 15 Palmen zum Diameter. Nimmt man 1 Cubitus für 1½ Schuh, so wird der Diameter 7½ Schuh seyn. Dieses macht eine ungemeine Grösse für ein solches Instrument aus. Hier sind die Worte dieses sinnreichen und gelehrten Jesuiten selbst: *ubi, inter caetera, de cornu prodigioso Alexandri magni haec leguntur: faciebat hoc cornu adeo vehementem sonum, vt eo exercitum suum ad centum stadia (quorum 8 vnum milliare Italicum conficiunt) dispersum convocasse*

vocasse *prohibentur: habebat autem, vt libellus monstrat, quinque cubitos in Diametro.*

Ohngeachtet dieses Zeugnisses gab der **Ritter Morland**, ein **Engländer**, im Jahr 1670 oder 71, als wäre er der Erfinder gewesen, einen Tractat über die Verfertigung verschiedener Sprachröhren heraus (*). Ich habe in demselben gar keine Theorie gefunden, ausser einigen, wie mich dünkt, unbestimmten Risonnements über die Art, wie die Luft, während ihres Durchgehens durch dieses Instrument, ihre Federkraft anwende. Hätte der Engländer nur der erste seyn wollen, der ihren Gebrauch von neuem bekannt machen wolte, so könnte man ihm einen Theil der Ehre, die man den ersten Erfindern schuldig ist, zugestehen. Ohngeachtet das wahre Genie sich Mittel vorstellet, die noch nicht in dem Verstande seiner Vorgänger gewesen sind, oder deren vorige Erfindung nicht zu seiner Kenntniß gekommen ist; so heißt es doch gewissermassen eine ganz neue Entdeckung machen, wenn man das verlohrne wieder erfindet. Allein der **Ritter Morland** ist bey weitem nicht in einer so vortheilhaften Lage und der **Pater Kircher** hat sich mit den stärksten Gründen über die unrechtmäßige Besitzung, die sich dieser Engländer anmaßte, beschwert. Es ist ausser allem Zweifel, daß diese Ehre diesem berühmten Jesuiten gehöre. Schlaget sein bekanntes Werk, *Ars magna lucis & umbrae*, auf, welches zu Rom 1646 gedruckt ist, so werdet ihr daselbst finden, daß mehr als 24 Jahr vor der Bekanntmachung des Tractats des **Ritter Morlands** der Pater Kircher ein **kegelförmiges Sprachrohr** verfertiget habe, das 21 Palmen in der Länge und dessen Ablauf oder Flügel 3 Palmen und das Mundstück ¼ Palme hatte; Daß dieser grosse Physicker sich desselben bediente, um mit dem Thürhüter des Collegiums zu Rom zu reden, und dadurch die Antwort wie-

P der

(*) Dieses Buch heißt: *Account of the Speaking Trompet.* B.

der zu hören. Dieses ist in einem andern seiner Werke, welches er *Musurgia* nennet, bestätiget. Es ist dieses ein sehr curiöser Tractat von der Musick. Er erklärt sich ausdrücklich über diesen Diebstahl auf der 112ten Seite seiner **Phonurgie**, die im Jahr 1673 gedruckt ist. Man lieset daselbst, daß 24 Jahr vorher, ehe der **Ritter Morland** seinen Tractat von den Sprachröhren bekannt gemacht habe, ein Sprachrohr von seiner Erfindung gemacht worden sey, und daß eine grosse Anzahl Menschen dieses Instrument im **Jesuitercollegium** zu Rom gesehen habe. Wenn man sich selbst die Mühe nimmt, die verschiedenen Streitschriften, die deswegen heraus gekommen sind, zu untersuchen, so wird man finden, daß der gelehrte Diebstahl des englischen Verfassers gänzlich bewiesen sey, und daß seine Arbeit selbst, wenn man ihn auch nicht weiter als Erfinder betrachtet, weit unter der Abhandlung des **Pater Kirchers** sey (*).

Uebrigens

(*) Ob **Morland** oder **Kircher** der wahre Erfinder der Sprachröhren zu nennen sey, ist, wie ich glaube, durch die vom Herrn Verfasser angeführten Gründe noch nicht entschieden. Was 1) dieses anbetrift, daß schon Alexander der Grosse ein solches Instrument soll besessen haben, so ist das Zeugniß, welches man aus dem Kircher anführt, nichts weniger als beweisend. Wo steht denn ein Wort davon, daß dadurch articulirte Töne wären gehöret worden? Es heißt, Alexander habe auf 100 Stadien sein Heer durch den heftigen Ton desselben zusammen gerufen. Konnte dieses nicht durch den blossen Schall geschehen, und waren eben Worte dazu nöthig? Ruft man nicht heut zu Tage hundertmal Soldaten durch einen Kanonenschuß zusammen und commandirt sie sogar dadurch? Man versteht uns durch einen solchen Schall, ohne daß wir unsre Gedanken durch articulirte Töne entdeckten. 2) Es ist eben so wenig ausgemacht, daß Morland sich mit Federn geschmücket habe, die er dem lieben Pater Kircher ausrupfte. Materie und Form scheint mir in diesen Schlüssen des Herrn Abts nicht die beste zu seyn. Denn ist es fürs erste so gewiß, daß Kircher ein **kegelförmiges** Sprachrohr 24 Jahr vor dem

Ritter

Uebrigens würde diese Auseinandersetzung sehr gleichgültig seyn, wenn man nicht überzeugt wäre, daß die Achtung, wovon man sich natürlicher Weise für die Urheber nützlicher Erfindungen durchdrungen findet, eine der größten Quellen des allgemeinen Wohls sey.

§. 157.

Gebrauch der Parabel in Verfertigung der Hörröhren oder solcher Hörner, wodurch man die Fehler des Gehörs verbessern kan. Diejenigen, die schwer hören, oder die das, was man ein hartes Gehör nennet, besitzen, können ihre Zuflucht zu einem Horn nehmen, dessen Hauptstück die Form eines parabolischen Afterkegels hat (§. 36). Es kommt nur darauf an, dem Trommelfell eine Bewegung zu geben, die stärker als die gewöhnliche ist. Wenn der Brennpunkt F dieses Horns an der Oefnung oder nahe bey der Windrohr G, das heißt, bey der kleinen

 krum-

Ritter Morland bekannt gemacht habe? Es giebt grosse Gelehrte, die sehr daran zweifeln. Man will nur etwas von Cylindrischen Röhren wissen, die im eigentlichsten Verstande noch nicht einmal den Namen von Sprachröhren verdienen. Wenn sich nun 2tens Kircher gleich über einem geschehenem Diebstahl des Morlands beklagte, ist er deswegen unstreitig geschehen? „Ja! Kircher hatte 24 Jahr vorher seine Erfindung bekannt gemacht" —— Wie? wenn Morland sie nicht gelesen hätte? Von Italien bis Engelland ist ein starker Sprung: und ist es nicht gar wohl möglich, daß verschiedene Männer auf einerley Einfall kommen? Der Herr Verfasser gebraucht dieses selbst gar vortheilhaft in der Cartesianischen Erfindung des Gesetzes der Strahlenbrechung. Warum soll man Morland nicht ein gleiches Recht wiederfahren lassen? Wie sieht es also um diese Art zu schliessen aus? Morland hätte die Schrift des Kirchers lesen können; folglich hat er sie gelesen. Er hätte seine Erfindung der Zeit nach vom Kircher borgen können; folglich hat er sie würklich geborget. Der Herr Verfasser wird es mir also vergeben, daß mich sein historischer Beweis diesesmal nicht überzeuge. B.

krummen Röhre lieget, die man ins äussere Ohr setzet; und wenn man das Horn gegen diejenige Seite richtet, von welcher man etwas hören will, so werden alsdenn alle Schalllinien als AB, CD, welche an den innern Wänden mit der Axe OF parallel anstossen, in den Brennpunkt F reflectirt werden (§. 81.) Sie werden also in diesem Punkte viel dichter seyn, als irgend wo anders. Auf diese Art werden sie hauptsächlich ihre Schnellkraft gegen die Seite G verwenden, wo sie den wenigsten Widerstand haben. Denn gegen die andere Seite setzet die Bewegung der Stimme ihnen ein Hinderniß. Sie werden also mit einer mehr als gewöhnlichen Heftigkeit längst der Röhre G hinunter fahren und das Trommelfell stärker in Bewegung setzen. Es ist dieses eines von den Theilen des Ohrs, welches die zitternde Bewegung der Luft, die bekanntermassen die Ursache des Schalls ist zu dem Innern des Gehörs fortpflanzt.

§. 159.

Gebrauch der Parabel in der Verfertigung der Brennspiegel. Richtet die Axe einer hohlen Paraboloide, deren innere Wände wohl geglättet und polirt sind ungefehr gegen den Mittelpunkt der Sonne (§. 37). Wenn dieser hohle Körper auch nur von Papier oder Pappdeckel gemacht ist, so wird dadurch dennoch eine so grosse Anzahl von Strahlen das Innere dieses Instrumens mit der Axe parallel oder doch fast parallel anstossen (*a*) daß die Vereinigung derselben in den Brennpunkt

---

(*a*) Die Lichtstrahlen, die von einem sehr entfernten Punkt auf eine kleine Oberfläche fallen, sind in Betracht der Entfernung von dem leuchtenden Punkt sinnlich parallel. Um dieses leicht zu begreifen, stellet euch einen Büschel von Lichtstrahlen vor, die von dem leuchtenden Punkt G auslaufen (Fig. D. Platte 3.), und die zwischen den Linien GA, GC eingeschlossen sind, und den merklichen Winkel AGC machen. Diese sind nun nicht parallel. Wenn man aber die Seite

punkt F eine so grosse Hitze verursachen wird, daß brennbare Materien sich entzünden werden. Die Erfahrung stimmet hiemit vollkommen überein.

§. 159.

Anmerkung. Da der Brennpunkt F einer Paraboloide oder der erzeugenden Parabel ziemlich nahe bey dem Scheitelpunkt H sich befindet, wenn der Parameter von einer mittelmäßigen Grösse ist, weil der Brennpunkt nur um den 4ten Theil des Parameters vom Scheitlpunkt entfernt ist (§. 78), so muß man einen Theil dieses Körpers z. E. GHT herunter schneiden, um sich dem Brennpunkte F bequem von der Seite H nähern zu können, oder wenn dieser Brennpunkt ausser dem Spiegel fallen soll. Nun werden die noch übrigen Lichtstrahlen in einem Punkt F versammlet, der ausserhalb der

---

Seite G bis nach H zurücksetzet, so wird der Winkel AGC in den Winkel AHC verwandelt, da die Basis AC die nämliche bleibt, Nun ist dieser Winkel viel kleiner, als damals, wie die Spitze noch in G war. Dieses ist sehr leicht zu beweisen, wenn man die Linie HGB ziehet. Wenn man solchergestalt die Spitze H immer weiter von der Basis entfernet, so wird der Winkel AHC immer kleiner und folglich endlich so klein werden, daß er in Betracht der Winkel HAC und HCA für nichts zu achten ist. Folglich werden diese Winkel alsdenn beynahe 2 rechte Winkel ausmachen. Wenn man folglich HA und HC von einerley oder fast von gleicher Grösse annimmt, so wird der Winkel HAC vollkommen oder beynahe so groß seyn, als der Winkel HCA; folglich wird keiner von beyden merklich von einem rechten Winkel verschieden seyn, und die Linien AH und CH sind dem Augenschein nach auf AC perpendiculair. Nun sind aber 2 Linien, die auf einerley Linie perpendiculair stehen, unter einander parallel. Wenn folglich die Basis AC sehr klein und die Entfernung BH sehr groß ist, so werden die Strahlen AH und CH die gegen die Spitze H zulaufen, sich auch in einer grossen Weite nicht merklich von der parallelen Lage entfernen.

der Höhlung desselben ist; man erkennet aber auch zugleich, daß der Brennpunkt von seiner Stärke verliere.

Inzwischen kan der Brennpunkt einer Paraboloide dennoch eine beliebige Entfernung von dem Scheitelpunkt dieses Körpers bekommen. Denn man kann den Parameter von einer beliebigen Grösse annehmen. Folglich wird auch der 4te Theil desselben, welcher immer die Entfernung des Brennpunkts ist, von beliebiger Grösse seyn können. Ist aber diese Entfernung zu groß, so hört der Brennpunkt auf brennend zu seyn. Weil Erfahrung und Vernunftschlüsse zeigen, daß das reflectirte Licht nach und nach so, wie es sich von den reflectirten Punkten entfernet, seine Stärke verliere. Es schwimmet in der That eine so grosse Menge kleiner vester Körperchen zu aller Zeit in der Luft, daß sie einen Theil der Strahlen, woraus ein Büschel Licht besteht, zurück stossen. Wenn dieser reflectirte Büschel eine grosse Weite zu durchlaufen hat, so wird er immer schwächer und behält am Ende nur noch eine unmerkliche Hitze.

§. 160.

Wenn dieses Uebel nicht wäre, so könnte man durch eine hohle Paraboloide einen brennenden Punkt in eine brennende Linie von unbestimmter Länge verwandeln, das heißt, man könnte brennende Körper in jeder Distanz anzünden. Man dürfte nur einen sehr schmalen parabolischen Spiegel B (Fig. 38) so stellen, daß er mit dem viel grössern parabolischen Spiegel A einerley Brennpunkt F hatte. Denn nun muß sich nothwendig die dicke cylindrische Masse von Lichtstrahlen RR, die nach dem Brennpunkt F der abgekürzten Paraboloide A reflectirt worden sind, (§ 81) hernach jenseits dieses Brennpunkts gegen B in divergirende Strahlen vertheilen. Diese werden auf die innern Wände des Spiegels B fallen und in *rr* mit einander parallel werden (§. 82). Da man aber diese kleine Paraboloide als sehr schmahl angenom-

nommen hat, so werden die Lichtstrahlen einen sehr dichten cylindrischen Büschel von Licht ausmachen und also in einer sehr weiten Entfernung brennbare Körper entzünden können. Der Brennpunkt wird gewissermassen in allen Punkten dieser strahlenden Linie von unbestimmter Länge seyn. Diese Würkung aber, die man beym ersten Anblick natürlicher Weise vermuthet, wird durch die physische Ursachen, die wir angeführet haben, zerstöhret (§. 159). Wir rechnen nicht einmal, daß die Vielheit der Reflexionen die Stärke des Lichts schwächet, und daß die parallelen Lichtstrahlen niemals so viele Stärke zum Brennen haben können, als wenn sie in einem Brennpunkt vereiniget wären (*).

§. 161.

Wenn man die Flamme eines Wachsstocks oder eines Lichts in dem Brennpunkt einer hohlen Paroboloide stellet (Fig. 37), deren innere Wände nach Möglichkeit eben gemacht und vergoldet sind; wenn man darauf diesen Spiegel in eine Laterne setzet, so wird dadurch die ganze Laterne gleichsam brennend erscheinen, und das Licht des Wachsstocks wird auf eine grosse Weite und mit einer solchen Stärke reflectirt und fortgepflanzt werden, daß man dabey lesen könnte.

Die Ursache davon ist diese, weil die Lichtstrahlen, welche durch den Brennpunkt F gehen bey dem Auffallen auf die hohle Fläche der Parabel mit der Axe parallel reflectirt wer-

(*) Man sehe hiervon des Pater Kirchers *Magiam catoptric Libr. X. Pars III. Kolhansii Optic p 175. Kepleri Dioptr. p.* 56 und 106. Man hat sich auch bemühet, Spiegel zu erfinden, die sich selbst verbrennen. Die Construction derselben giebt man auf folgende Art an. Es sey (Fig. 37) DHN ein parabolischer Spiegel und in F der Brennpunkt desselben. Man schneide das Stück LHK herunter und setze statt desselben einen ebenen Boden LK hinein, auf welchen der Brennpunkt falle, so wird sich der Spiegel selbst verbrennen. B.

den (§. 82) und folglich einen Lichtcylinder bilden, der sich grade zu auf eine grosse Entfernung mit einiger Kraft fortpflanzt, wenn gleich nur ein kleiner Theil der Flamme des Wachsstocks vollkommen in dem Brennpunkt F ist. Auch der Pater Tacquet hat im 3ten Buch seiner Catoptrik versichert, daß man allein durch Hülfe eines solchen Spiegels im Stande sey, auf 400 Schuh weit vom Spiegel ein Buch mit kleiner Schrift zu lesen, wenn die Flamme des Wachsstocks im Brennpunkte stehet.

§. 162.

Anmerkung. Diese Arten von Laternen sollen hauptsächlich das Licht im Tragen grade vorwärts fortpflanzen. Die Wände, die den Spiegel einschliessen, müssen mit dem Horizonte parallel laufen. Das übrige ist, wie gewöhnlich.

§. 163.

Auch wäre es viel vortheilhafter, wenn man den innern Flächen der Wände eines Kamins eine parabolische Gestalt gäbe. Damit dieses aber von den Arbeitsleuten mit Bequemlichkeit geschehen könnte, so müßte der Baumeister einen Arm von einer Parabel, deren Länge ein Verhältniß gegen die Tiefe des Kamins hätte, geometrisch auf ein Brett zeichnen. Nur müßte er dahin sehen, daß der Brennpunkt dieser krummen Linie gegen die Mitte des Heerdes falle. Dieses wäre sehr leicht, wenn er dem Parameter oder der doppelten Ordinate LK am Brennpunkte (§. 93) eine Länge gäbe die der Breite des Kamins gleich wäre. Dieses würde eine Art von Modell seyn, dessen die Maurer in ihrer Construction sich bedienen könnten. Solche Kamine würden ohne Zweifel dadurch auf eine viel vortheilhaftere Art ein Zimmer erwärmen. Denn der Brennpunkt dieser erzeugenden Parabel wäre in der ganzen Höhe von 3 bis 4 Schuh, die sich über die Mitte des Heerdes erhebt,

hebt. Es würde alsdenn die Flamme oder alle vom Feuer durchdrungene Körperchen, die in dieser Brennlinie ja selbst um derselben herum sich befinden, ihre Hitze oder ihre kleine Feuertheilchen nach den Linien FL und FG — — gegen die parabolische Wände richten, und von da müßten sie bekanntermassen nach den Richtungslinien LR, die mit der Axe HO vollkommen oder doch beynahe parallel sind reflectirt werden (§. 82), folglich würden sie accurat ins Zimmer zurück geworfen werden. Sie würden sich alsomit den directen Lichtstrahlen vereinigen und man müßte viel weniger Holz und Zeit gebrauchen, daselbst eine mäßige Wärme hervor zu bringen. Denn bey der gewöhnlichen Construction wird ein grosser Theil der Feuerstrahlen in sich selbst oder in den Kamin zurück geworfen und von dem beständigen Storm der Luft, der sich, so bald das Feuer angezündet ist, dahin stürzt, sogleich weggeführet.

Will man noch sparsamer und haushältischer seyn und bey einerley Kosten einen beliebigen Grad der Wärme hervor bringen, so setze man eben so, wie man Wasser durch Röhren und Hähne führet, grade unter dem Heerde zwischen den Balken und Steinen ein Behältniß oder Becken; von Luft einen Quadratschuh groß und nach Umständen 3 bis 4 Schuh tief. Durch die Seitenflächen dieses Behältnisses müßten 2 Röhren gehen, die man zwischen den Balken und dem Pflaster bis gegen die Mitte der Mauer, die an beyden Seiten daran stößt durchlaufen ließ. Endlich müßte bey ihrem Ausgange ein Hahn angebracht werden, wovon wir den Gebrauch sogleich sehen werden.

Seitdem man das terrestrische Feuer mit Verstand zu gebrauchen angefangen hat, weiß man, daß die Wärme desselben mehr unterwärts als oberwärts gehe. Daß sie sich mehr herunter ziehe, als steige, oder daß sie wenigstens mehr darzu bestimmt sey. Folglich wird die Hitze des Heerds sehr schnell bis zu dem Be-

cken hindringen; sie wird die daselbst enthaltene Luft erwärmen, sie verdünnen und sie specifisch leichter machen, als eine nämliche Menge unverdünnter oder in ihrem ordentlichen Zustand sich befindenden Luft. Die äussere Luft wird sich folglich in die offene Röhren hinein stürzen, und wenn sie in das Behältniß kömmt, die daselbst erwärmte Luft wegjagen, um selbst bald darauf von einer stärkern Luft wieder heraus getrieben zu werden. Man wird daher einen beständigen Umlauf der Luft bekommen, die in dem Behältnisse erwärmet ist, und nun ihre Wärme mit ins Zimmer bringt. Folglich muß dasselbe in kurzer Zeit einen hinreichenden Grad der Wärme bekommen. So bald man nun auf einem Thermometer oder sonst bemerkt, daß es denjenigen Grad der Wärme, die der Gesundheit am zuträglichsten oder zu einem andern erforderlichen Bedürfnisse hinlänglich ist, erreichet hat, so schließt man den Hahn zu, um es beynahe in diesem Zustande zu erhalten. So wird daher die untere Wärme, die ohne dieses Kunststück fast gänzlich verlohren geht, die vornehmste Quelle der benöthigten Wärme werden.

§. 164.

Weil die Licht- oder Feuerstrahlen FH (Fig. 39), die durch den Brennpunkt F einer hohlen Paraboloide gehen, mit ihrer Axe FG parallel reflectirt werden (§. 82), so ist es offenbar, daß diese Strahlen, die solchergestalt auf die hohle Oberfläche einer andern Paraboloide OLS fallen, deren Axe GF und Brennpunkt G in einerley Linie mit der Axe und dem Brennpunkt des ersten Spiegels lieget; es ist offenbar sage ich, daß diese zum 2ten mal reflectirte Strahlen LG sich wieder in dem Brennpunkt G vereinigen werden (§. 81) und folglich daselbst brennbare Körper entzünden können.

Diese Theorie ist durch sehr viele Versuche bestätigt. Herr Du Fay, Mitglied der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Paris, erfuhr, daß man einen glücklichen Versuch

davon

davon zu Prag gemacht habe; er nahm sich daher vor, ihn zu Paris zu wiederhohlen. Es geschahe dieses würklich in Gegenwart des Herrn Mairans. Dieser Gelehrte war ein Mitglied und ehemaliger Secretair dieser nämlichen Akademie, und ich habe aus dem Munde dieses berühmten Mannes selbst folgende Nachricht erhalten. Im Jahr 1726 sezte man nach Anleitung der 39ten Figur 2 hohle parabolische Spiegel 6 Schuh weit von einander. In einem der Brennpunkte F legte man glüende Kohlen, und in dem andern Brennpunkt G Schießpulver. Darauf ließ man in dem Brennpunkt F einen Blasbalg gehen, um die Kohlen anzublasen und man sahe in kurzer Zeit das Pulver in G Feuer fangen. Dieses alles begreift man beym ersten Anblick der Figur, wenn man sich an die Theorie von dem Brennpunkt erinnert, den wir so oft erklärt haben (*).

§. 165.

(*) Dieser Versuch erfordert nach dem Zeugnisse des Herrn Abbé Nollets keine grosse Vollkommenheit der Spiegel. Es ist auch nicht nöthig, daß die Spiegel just eine parabolische Krümmung haben. Zahn in seinem *Oculo artificiali* p. 753. erzählet, daß er von einem glaubwürdigen Manne erfahren habe, daß er in Wien einem Versuche beygewohnet habe, bey welchem durch 2 sphaerische hohle Spiegel in einer Weite von 20 Schuh brennbare Materien angezündet worden. So versichert der Cavalieri in seinem Buche von den Kegelschnitten im 27ten Capittel, daß er in dem Brennpunkt eines bleyernen kugelichten Hohlspiegels glüende Kohlen gelegt, und die Strahlen mit einem andern parabolischen Spiegel, der aber so abgestuzt war, daß sein Brennpunkt sich hinter demselben befand (§. 159) aufgefangen und solchergestalt brennbare Materien angezündet habe. Eben so wenig kommt es auf die Materie an, woraus diese Spiegel verfertiget werden. Herr Varing, der dieses Kunststück von den Jesuiten zu Prag gelernet hatte, und von welchem es Herr Nollet empfieng, gebrauchte nur vergoldete hölzerne Spiegel. Herr Du Fay bediente sich vergoldete Gipsspiegel von 20 Zoll im Diameter und zündete damit guten Zunder auf 50 Schuh

weit

§. 165.

Der Pater Kircher erzählt in seiner Phonurgie einen Zug aus der Geschichte, wo eine Handlung vorkommt, die viel curiöser ist, als das vorhergehende. Er hat sie, wie er sagt, in der Geschichte der Abyßinier des Johann Paez gelesen (*). Dieser Geschichtschreiber erzählt, daß man durch einen grossen parabolisch ausgehölten Felsen auf 50 Schritte weit eine schwache Stimme, welche von einem weit entlegenen Orte herkam, habe hören können. Diesem Felsen grade gegen über befindet sich ein anderer, auf dessen Spitze man sehr deutlich alles, was sehr entfernte Personen, so schwach als möglich reden, verstehen kann. Schrie man daselbst, so würde man die vereinigte Stimmen eines ganzen Heeres zu hören glauben. Die Priester dieses Landes haben den Nutzen, den man von dieser Art von Wundern ziehen konnte, sehr wohl eingesehen. Um dem Volke zu beweisen, daß sie unmittelbar mit der Gottheit in einer Verbindung stünden, liessen sie diejenigen, die sich bey ihnen Raths erhohlen wolten, auf die Spitze dieses Felsens steigen; darauf redeten sie mit einer sehr schwachen Stimme von demjenigen Orte, der ihnen zu ihrer Absicht am geschicktesten schien, und diese Reden kamen als ein Widerhall in die Ohren der Rathfragenden. Diese bemerkten rund um sich her keine ordentliche Ursache dieser

---

weit an. Herr Abbé Nollet hat Spiegel von wohl geglätteten Kartenpapier versilbern lassen und sie sehr gut befunden. Doch hält er mit Recht vergoldete höher. Seine Spiegel waren sphaerisch und aus einer Kugel gemacht, deren Diameter 4 Schuh hatte. Der Spiegel hatte 18 Zoll im Diameter. B.

(*) Dieser Name soll ohne Zweifel Peter Paez heissen, der in Abyßinien als Beichtvater des Kaysers gestorben ist und von den Irrthümern der Abyßiner geschrieben hat. conf. Jöchers gelehrt. Lexic. B.

dieser Würkung, und hielten sich daher für würklich begeistert. Allein der Leser siehet daraus, daß man durch solche Kunststücke im Stande ist Dinge zu verrichten, die für den gemeinen Mann erstaunlich sind.

Lasset uns des Paez eigene Worte anführen. Er setzet die Scene in das Gebürge von Goyam. — — *Est hisce in montibus (Goyamae) rupes ingens ea naturae industria excavata ut speculum remote aspicientibus appareat. Huic alia rupes opposita, in cujus cacumine nil adeo submisse a quantumvis remotis dici possit, quod non audiatur: clamantibus vero in dicto loco, sonum adeo intendi, ut vox exercitus alicujus videatur. Norunt occultam resonantis naturae vim sacrificuli istius loci, qui ut se divinos demonstrent, homines in cacumine montis positos occultis hujusmodi vocibus de rebus futuris admonent; ii vero se numinis voce afflatos arbitrati, non raro in maximas calamitates devolvuntur, dum jussa exequi inconsultius properant.*

Vorausgesezt, daß die Sache wahr sey, so glaube ich mit dem Pater Kircher, daß dieses allein durch die Figur eines hohen sphaerischen oder parabolischen Spiegels geschehe, die die Natur dem erstern Felsen gegeben hat, und wo der Brennpunkt des Spiegels sich genau auf der Spitze des 2ten Felsens befindet. Durch eine solche Lage werden die mehresten Schußstrahlen RL (Fig. 37.) von dem hohlen Felsen wie in einem Punkt gegen den andern Felsen, auf dessen Spitze sich das Wunder zeigt, zurück geworfen (*).

* §. 166.

(*) Aehnliche curiöse Echos findet man unter andern in den physischen Abhandlungen der Akademie zu Paris, vom Herrn von Steinwehr übersezt, im ersten Theile Seite 94 und

* §. 166.

Bisher ist nur von hohlen parabolischen Spiegeln gezeiget worden, daß die durch den Brennpunkt gehende Strahlen mit der Axe parallel zurück geworfen werden. Allein man findet auch, daß der convexe parabolische Spiegel SaS (Fig. 40) die nämlichen Eigenschaften habe, wenn die Strahlen rS die erhabene Fläche desselben in einer Richtungslinie berühren, die durch den Brennpunkt F gehen.

Um dieses zu beweisen, ziehe man durch einen beliebigen Punkt S die Tangente *mt* an die erzeugende Parabel (§. 30), durch diesen nämlichen Punkt S lasse man eine Linie *dg* gehen, die mit der Axe F*g* parallel ist, so wird man finden, daß der Einfallswinkel *r*S*m* dem Winkel FS*t* gleich sey. Nun ist der Winkel FS*t* = *d*S*m* (§. 81) = *t*S*g*; folglich ist *r*S*m* = *t*S*g*; folglich ist dieser Winkel FS*t* der Reflexionswinkel, das heißt, die Strahlen *r*S müssen sich nach den Linien S*g*, die mit der Axe *a*F und folglich auch unter sich parallel sind, reflectiren (*a*).

* §. 167.

---

und folg. und im 3ten Theile Seite 779. In Muschenbrocks Naturwissenschaft vom Gottsched übersezt, in der Anmerkung zum §. 1161. In dem *Mercur de France* vom Jahr 1770 im Januar und in vielen andern Büchern. B.

(*a*) Bemerket, daß ein Strahl, der auf eine krummlinigte Fläche fällt, sich so reflectire, als fiele er auf die Tangente dieser krummlinigten Fläche, die durch den Einfallspunkt gezogen ist. Denn, wenn man durch diesen Punkt würklich eine Berührungsfläche gehen ließ, so würde man die Direction haben, die diese krumme Fläche in diesem Punkt hat. Folglich würde man auch den Winkel haben, den diese Fläche mit einem daselbst einfallenden Lichtstrahl machen würde. Anders kan man den Winkel nicht bestimmen, welchen eine grade Linie mit einer krummen macht. Denn eine Tangente an einem Einfallspunkt ist unveränderlich, und macht mit der krummen Linie einen Winkel der kleiner ist, als irgend ein gradlinigter Winkel. Wenn man sonst den Winkel, welchen eine grade Linie macht, indem

* §. 167.

Gebrauch der Parabel in Verdoppelung des Würfels. Es kommt darauf an, 2 mittlere Proportionallinien zwischen der Seite AD des gegebenen Würfels und zwischen der Linie AC zu finden, die doppelt so groß ist (*) (Fig. 41).
Nimmt

indem sie auf eine krumme fällt, durch die Divergenz dieser graden Linie mit einem Theil der krummen Linie schätzen wolte, so würde man keine Regel haben. Denn eine krumme Linie verändert in jedem Punkte ihre Direction. Folglich würde der Winkel kleiner oder grösser seyn, je nachdem man kleinern oder grössern Theil der krummen Linie für den Schenkel dieses Winkels annähme.

(*) Die Aufgabe von der **Verdoppelung des Würfels** ist von jeher unter den Geometern von grossem Ansehen gewesen. Die Geschichte dieses Problems, die ohne Zweifel eine Erfindung eines Mathematickers gewesen, um dem Problem ein gewisses feyerliches Ansehen zu geben, ist nach der Erzählung des **Philopponus** folgende. Es herrschte in dem Atheniensischem Gebiete die Pest auf eine erschreckliche Art. Man schickte nach **Delphos** um den Apoll zu befragen, wie dieses Uebel abgewendet werden könne? Er gab zur Antwort, daß er ihnen helfen würde, wenn man seinen Altar, der ein vollkommener Würfel war, so verdoppeln würde, daß er wieder ein richtiger Cubus sey. Daher heißt dieses Proplem das Delphische. Dieses schien den Unwissenden eine Kleinigkeit zu seyn. Sie nahmen die Seite des Altars doppelt so groß und lieferten also einen 8mal so grossen Würfel. Wie hierauf die Pest noch nicht aufhören wolte, so schickten sie aufs neue Gesandten zum Apoll. Er antwortete, man habe seiner Forderung keine Genüge gethan. Nun fieng man an zu vermuthen, daß mehr geheimnißvolles dahinter stäcke, und suchte die Hülfe der Geometer, die selbst sehr verlegen dabey waren. **Plato**, dieser grosse Mathematicker lehnte die Auflösung von sich ab, nach dem Zeugniß des **Valerius Maximus**, und schickte die Gesandten zum Eudoxus, nicht aber, wie er irrig vorgiebt zum Euclides, welcher um ein halbes Seculum später lebte. Die Geschichte dieses Problems wird vom Eratostenes auf eine andere eben so fabelhafte Weise erzählet. Doch worzu dieses erdichtete! Ist es nicht

Nimmt man folglich AC für die Axe der zu beschreibenden Parabel und AD für den Parameter an, so kan man

---

nicht glaublich, und ganz natürlich, daß denkende Geometer, da sie ähnliche Flächen nach einem gegebenen Verhältnisse vermehren konnten, daß sie dieses auch bey Körpern zu bewerkstelligen werden gewünschet haben? Nun wusten sie, daß sich ähnliche Körper zu einander verhalten, wie die Würfel ihrer ähnlichen Seiten; folglich reducirten sie die Aufgabe darauf, einen Cubus nach einem gegebenen Verhältnisse machen zu können. Nach dem Zeugnisse des Eutoccius in seinen Commentarien über das 2te Buch des Archimeds von der Kugel und dem Cylinder suchten ausser dem Plato, Appollonius von Pergen, Eratostenes, Pappus, Diocles, Nicomedes und andere diesen Knoten aufzulösen. Man findet in der theoretischen und practischen Geometrie des Johann Ardüser verschiedene Auflösungen davon. Man lese auch deswegen Slusius sein Mesolabium; von Wolf Analysis und des Paulus Mathias Doria seinen Brief an den Hyacinth, worin von der Apollonischen Parabel gehandelt wird; imgleichen die Ausgabe des Euclides vom Richardus Seite 545 und die vortrefliche Geschichte der Mathematick vom Montucla 1 B. Seite 186. folg. Hippocrates von Chius fand zuerst, daß diese Aufgabe aufgelöset seyn würde, wenn man zwischen 2 gegebenen Linien oder Grössen 2 mittlere Proportionalgrössen oder Linien finden könnte. Die Richtigkeit davon erhellet folgendermassen. Es sey die Seite des gegebenen Würfels $= a$; so ist der Würfel selbst $= a^3$, die Seite des zu findenden doppelten Würfels sey $= y$, so ist dieser Würfel $= y^3$. Folglich ist nach der Forderung $y^3 = (a^3)$ und also $y = \sqrt[3]{(2(a^3)} = a\sqrt[3]{2}$. Diese Grösse ist aber die erste von den 2 mittlern Proportionallinien zwischen a und $2a$, welches folgendergestalt bewiesen wird: Es sey die erste unbekannte mittlere Proportionallinie $= y$, die zwote $= z$, so verhält sich $a : y : z : 2a$. Folglich ist $az = y^2$ und $z = \frac{y^2}{a}$, und $z^2 = \frac{y^4}{a^2}$. Es ist aber auch $z^1 = 2ay$ folglich ist $\frac{y^4}{a^2} = 2ay$; folglich $y^4 = 2a^3y$ und $y^3 = 2(a^3)$. Folglich $y = a\sqrt[3]{2}$. Folglich ist nach

man diese krumme Linie nach §. 25 beschreiben: Und nachdem man die Linie AD von dem Scheitelpunkt A in D auf die Axe getragen hat, so muß man in der Mitte von AD die Perpendiculairlinie MO = AD aufrichten und aus dem Punkt O einen Cirkel durch den Punkt A beschreiben. Wenn man nun aus dem andern Durchschnittspunkte des Cirkels und der Parabel auf der Axe eine Perpendiculairlinie GS aufrichtet, so werden die Linien GS und AS die 2 gesuchten mittlern geometrischen Proportionallinien zwischen AD und AC seyn.

Beweis. 1) Das Centrum des Cirkels befindet sich nothwendig ausserhalb der Parabel. Denn AD ist der Parameter (Bedingung); Es wird daher die Ordinate DL an dem Punkt D der Linie AD gleich seyn (§ 27). Nun ist aber AD = OM (Construction); folglich ist DL = OM. Allein DL > MT (§. 10) folglich ist OM > als die Ordinate MT, die aus dem Punkt M gezogen ist. Folglich ist das Centrum des Cirkels ausserhalb der Parabel. Es ist also ein Theil des Cirkels innerhalb der Parabel und ein Theil ausserhalb derselben (Construction); folglich durchschneidet er nothwendig die Parabel in 2 Punkten; einmal wenn er hinein gehet und das zweytemal, wenn er wieder aus der Parabel heraus kommt.

2) Jtzt behaupte ich, daß folgendes Verhältniß richtig sey: AD : GS = GS : AS = AS : AC. Denn wenn man aus dem Mittelpunkt O des Cirkels die Perpendiculairlinie OR auf GS fallen läßt, so wird man gleich anfangs finden, daß RS = OM = AD = $\frac{1}{2}$ AC sey; folglich ist 2 RS = AC. Es ist aber 2 RS = RS + RH + HS = RS + GR

Q

nach dem obigen y oder die erste von den 2 mittlern Proportionallinien zwischen a und $2a$ die Seite des doppelten Würfels; Folglich ist auch in unserm § nur zwischen AD und AC die erste von den 2 mittlern Proportionallinien zu suchen, wenn man die Seite eines Würfels haben will, der doppelt so groß sey, als der Würfel von der Seite AD. B.

GR + HS (denn GR ist = RH aus geometrischen Gründen) = GS + HS ; folglich ist GS + HS = AC.

Allein wegen der Natur des Cirkels verhält sich AS : GS = HS : DS (*a*) = HS : AS — AD ; folglich ist GS × HS = (AS × AS) — (AS × AD) oder (GS × HS) + (AS × AD) = AS × AS. Nun ist AS × AD = $\overline{GS}^2$ (§. 20) folglich GS × HS + $\overline{GS}^2$ = $\overline{AS}^2$; folglich (HS + GS) × GS = $\overline{AS}^2$ und da HS + GS = AC, wie wir dieses schon gezeiget haben, so ist AC × GS = $\overline{AS}^2$; folglich verhält sich GS : AS = AS : AC. Es verhält sich aber auch AD : GS = GS : AS (§ 20); folglich verhält sich endlich auch AD : GS = GS : AS = AS : AC. w. z. E. W.

§. 168.

Zusatz. Folglich verhält sich auch $\overline{AD}^3$: $\overline{GS}^3$ = AD : AC (*b*). Es ist aber AC = 2 AD (Beding). Folglich

(*a*) Die Richtigkeit dieses Verhältnisses erkennet man auf folgende Art. Man ziehe die Hülfslinien HA und GD (Tab. XI Fig. 12) so entstehen dadurch 2 Triangel AHS und GDS. In diesen beyden Triangel ist der Winkel S beyden gemeinschaftlich, und der Winkel A = dem Winkel G, weil es Winkel an der Peripherie sind, die auf einerley Bogen stehen; folglich ist auch der Winkel GDS = AHS ; folglich sind die beyden Triangel sich ähnlich; folglich verhält sich auch AS : GS = HS : DS. B.

(*b*) Um dieses Verhältniß wohl zu verstehen, bemerke man, daß wir zum Schluß des vorigen § folgende Proportionen bekommen: AD : GS = GS : AS = AS : AC. oder zusammengezogen AD : GS : AS : AC. Folglich heißt das Verhältniß, welches unser Herr Autor in diesem § angiebt, in Worten so viel: In einer geometrischen Reihe von 4 Grössen verhält sich der Cubus des ersten Gliedes zum Cubus des

lich ist $\overline{GS}^3 = 2\,\overline{AD}^3$; Dieses beweiset, daß der Würfel $\overline{GS}^3$, der zur Seite die erste von den 2 mittlern Proportionallinien GS und AS zwischen AD und dem Duplum derselben AC hat, auch doppelt so groß sey, als der gegebene Würfel $\overline{AD}^3$.

Gebrauch der Parabel
bey der Theilung eines Winkels in 3 gleiche Theile (*).

§. 1.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel DCH (Tab. XI. Fig. 8) in 3 gleiche Theile zu theilen.

des 2ten Gliedes, wie das erste Glied, zum 4ten. Wir wollen, um uns kürzer ausdrücken zu können, die 4 Grössen, die in einem aneinander hängenden Verhältniß stehen, $a . b . c : d$. nennen. Es ist alsdenn zu beweisen, daß $a^3 : b^3 = a : d$ sich verhalte. Da a, b, c, d in einer continuirlichen Verhältniß stehen, so verhält sich also auch

1) $a : b = b : c$: folglich ist $ac = bb$. folglich auch $a^2 c = ab^2$; folglich $a^2 : b^2 = a : c$.
2) Verhält sich auch nothwendig $a : b = c : d$. folglich $ad = bc$. Nun hatten wir so eben die Gleichung $a^2 c = ab^2$. Folglich ist auch $a^2 c\, ad = ab^2 bc$ oder $a^3 cd = b^3 ac$. oder $a^3 d = b^3 a$; folglich verhält sich $a^3 : b^3 = a : d$.

Es muß also auch das Verhältniß wahr seyn $\overline{AD}^3 : \overline{GS}^3 = AD : AC$. B.

(*) Es ist dieses eine Aufgabe, die eben so berühmt ist, als das Problem von der Verdoppelung des Würfels. Ob diese Aufgabe schon eben so alt sey, als jene, läßt sich nicht mit Gewißheit

Auflösung. Wir setzen voraus, daß wir den Radius DC und die Sehne des ganzen Bogens DH kennen. Es kommt itzt darauf an, die Sehne DF zu finden, die zu dem dritten Theil des Bogens DFGH gehört. Wir wollen uns hier einbilden, daß die Theilung würklich schon geschehen sey, und daß dadurch der ganze Winkel DCH in die 3 gleichen Winkel DCF, FCG und GCH zerleget worden sey. Man ziehe alsdenn die Sehnen DF, FG, GH die auch von gleicher Grösse seyn werden. Endlich ziehe man FI mit GL parallel. Nun wollen wir die verschiedenen Linien benennen und aus dem, was wir von ihnen wissen, eine Gleichung herzuleiten suchen, deren Wurzel uns endlich DF geben wird. Es sey DH $= a$, DC $= b$, DF $= y$. Nun ist der Winkel FDH ein Winkel an der Peripherie, der auf dem Bogen FGH stehet; folglich ist sein wahres Maas $= \frac{1}{2}$ FGH (Geometrie) $=$ DF (Constr.) Das Maas des Winkels DCF ist auch $=$ DF. Folglich ist der Winkel FDH $=$ DCF. Nehmen wir itzt die beyden Triangel DCF und DFK vor uns, so ist 1) der Winkel DFC $=$ DFC. 2) FDH $=$ DCF; folglich ist auch FDC $=$ FKD, und die ganzen Triangel sind sich ähnlich. Folglich verhält sich auch CF : FD $=$ FD:

---

heit ausmachen, aber doch als wahr vermuthen. Es ist glaublich, daß man anfieng, sich die Frage vorzulegen, wie kan man einen gradlinichten Winkel in 3 gleiche Theile theilen? nachdem man ihn in 2 solcher Theile zu vertheilen wuste. Ja! natürlicher Weise machte man die Frage noch allgemeiner und suchte, wie man einen Winkel nach einem gegebenen Verhältnisse theilen könne? Denn darzu scheint die Quadratrix, die wenigstens in der Platonischen Schule bekannt war, erfunden zu seyn. Es ist also nach aller Wahrscheinlichkeit diese Aufgabe von der Dreytheilung des Winkels sehr alt. Soll diese Aufgabe aufgelöset werden, so kann dieses nur durch Hülfe der höhern Geometrie geschehen. Von den verschiedenen Auflösungen, die man darzu angegeben hat, führe ich hier diejenige an, zu welcher man die Parabel gebraucht. Von andern wird an einem andern Orte zu reden sich Gelegenheit zeigen. B.

FD : FK oder $b : y = y : \frac{yy}{b}$; folglich ist $FK = \frac{yy}{b}$. Es verhält sich auch CD : CF = DK : DF; und da CD = CF, so ist auch DK = DF = y. Folglich ist auch der Winkel DKF = DFK. Betrachten wir ferner die beyden Triangel DKF und FIK, so ist der Winkel FCG = CFI als Wechselwinkel (Constr.) folglich DCF = CFI. Folglich nach dem vorhin bewiesenen 1) FDK = KFI; 2) DFK = DKF; Folglich sind die Triangel DKF und IKF sich ähnlich; folglich verhält sich auch DF : FK = FK : KI oder $y : \frac{yy}{b} = \frac{yy}{b} : \frac{y^3}{bb}$. Es ist also $KI = \frac{y^3}{bb}$. Nun ist DF = DK, GH = LH (aus dem nämlichen Grunde) und FC = IL (Geom.) Folglich ist DF + FG + GH = AK + IL + LH = DK + IK + KL + LH = DH + $IK = a + \frac{y^3}{bb}$. Folglich ist $DF + FG + GH = a + \frac{y^3}{bb}$. Es ist aber DF + FG + GH = 3 DF = $3y$: Folglich ist $3y = a + \frac{y^3}{bb}$; folglich $3ybb = abb + y^3$. Folglich $y^3 - 3bby + abb = o$. Um nun die Wurzel von dieser Gleichung oder den eigentlichen Werth von y zu bekommen, mache man folgende Construction (Tab. XI. Fig 9) Man beschreibe mit DC der vorigen Figur = b als einem Parameter die Parabel GAHF. Man mache den Theil der Axe AD = $2b$. Man setze an dem Punkt D die Perpendiculairlinie DC = $\frac{1}{2}a$. Man nehme darauf C für ein Centrum und beschreibe mit dem Radius CA einen Cirkel, der die Parabel in 4 Punkten durchschneiden wird. Man ziehe von den Durchschnittspunkten H und F Perpendiculairlinien HI und FE auf die Axe der Parabel, so sind HI und FE Ordinaten der Parabel und AI und AE die Abscissen. Folglich HI = y und AI = x. Können wir nun zeigen, daß vermöge dieser Construction und der Supposition, daß HI

$= y$ sey, die obige Gleichung $y^3 - 3bby + abb = o$ entstehen werde, so muß HI würklich die gesuchte Wurzel oder der verlangte Werth von DF (in der vorigen Figur), folglich die Sehne zu dem 3ten Theile des Bogens DFGH seyn. Dieses ist aber würklich also, wie aus folgendem Beweisse erhellen wird. Es ist vermöge der Eigenschaft der Parabel $bx = y^2$ (§. 20). Folglich ist $x = \frac{y^2}{b}$. Nun ziehe man aus C eine Parallellinie mit HK und verlängere HI bis in K, so ist $KC = AD - AI = 2b - \frac{y^2}{b}$. Es ist auch $KH = HI + IK = HI + DC = y + \frac{1}{2}a$. Endlich ist $CH = CA = \surd(\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2) = \surd(4bb + \frac{1}{4}aa) =$; Folglich ist $\overline{CH}^2 = \frac{1}{4}aa + 4bb$. Es ist aber auch $\overline{CH}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KH}^2 = (2b - \frac{y^2}{b})^2 + (y + \frac{1}{2}a)^2 = 4bb - 4y^2 + \frac{y^4}{bb} + yy + ay + \frac{1}{4}aa$; folglich ist $\frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + \frac{y^4}{bb} + yy + ay + \frac{1}{4}aa$. Folglich, wenn man $\frac{1}{4}aa$ und $4bb$ auf beyden Seiten gegen einander aufhebt, und $+ yy$ von $- 4yy$ würklich wegnimmt, so ist $\frac{y^4}{bb} - 3yy + ay = o$. Folglich $y^4 - 3bbyy + abby = o$. Folglich endlich $y^3 - 3bby + abb = o$. Folglich ist HI eine Sehne, die den gegebenen Bogen DFGH und folglich den Winkel DCH in 3 gleiche Theile theilet. Es ist auch FE eine wahre Wurzel und eine Sehne, die den Bogen HBD, als das Complementum des vorigen zum ganzen Cirkel in 3 gleiche Theile theilet (*).

Von

(*) Bin ich wider alles Vermuthen einigen Personen dunkel geblieben, so mögen sie zuversichtlich glauben, daß die Dunkelheit nicht in dem Vortrage selbst, sondern in ihren wenigen Fähig-

Von der Ellypse.

* §. 1.

Erster Hauptsatz. Es sey AMD (Fig. 42) eine solche krummlinichte Figur, daß die Quadrate BM^2 der Ordinaten BM, die auf einer ihrer Sehnen perpendiculair stehen, beständig den ihnen zugehörigen Rectangeln $AB \times BD$, der durch BM gemachten Segmente gleich sind: So behaupte ich, daß diese Figur ein Cirkel sey, dessen Diameter AD ist.

Beweis. Es sey C die Mitte von AD. Nun ist $AB = AC - BC$ und $BD = AC + BC$; Denn es ist $CD = AC$; Weil folglich nach der Bedingung $BM^2 = AB \times BD$, so ist auch $BM^2 = (AC - BC) \times (AC \times BC) = AC^2 - BC^2$ Lasset uns itzt die Linie CM ziehen. Es ist klar, daß $BM^2 = CM^2 - BC^2$; Folglich ist $AC^2 - BC^2 = CM^2 - BC^2$; Hieraus folgt, daß $AC = CM$; Folglich ist jeder Punkt M des Umkraises der krummen Linie gleich weit

Fähigkeiten zur Mathematick oder in einer gar zu geringen Aufmerksamkeit liege. Ich befürchte eher von einigen Männern den Vorwurf einer zu sorgfältigen Auseinandersetzung, der mir aber weder unerwartet noch empfindlich seyn würde. Ein stiller Dank, den ein junger Liebhaber der erhabenen Mathematick mir zollet, weil ich ihm auf seinem mühsamen Wege einige Steine auf die Seite geschaft habe, ist mir viel zu schätzbar, als daß ich nicht mit Vergnügen das schlechte Gemurmel solcher Leute anhören solte, die, um selbst nur immer glänzend zu scheinen, ihre Schüler in der Finsterniß unterhalten. Man lese Crousaz Vorrede zu seinem *Comment.* über den *l'Hôpital*. B.

von dem Centrum entfernt; Folglich ist die gegebene Figur ein Cirkel, dessen Diameter AD ist.

§. 2.

Zusatz. Hieraus folgt, daß im Cirkel die Quadrate der Ordinaten GP, BM sich zu einander verhalten, wie die correspondirenden Rectangel, das heißt, $\overline{GP}^2 : \overline{BM}^2 = AG \times GD : AB \times BD$. Denn es ist $\overline{GP}^2 = AG \times GD$ (§. 1) und $\overline{BM}^2 = AB \times BD$: Folglich verhält sich $\overline{GP}^2 : \overline{BM}^2 = AG \times GD : AB \times BD$ (*a*).

§. 3.

Anmerkung. Damit wir uns nicht in verdrüßliche Wiederhohlungen einzulassen nöthig haben, so bemerke man in Ansehung des folgenden, daß die Flächen, wodurch wir den Kegel schneiden, allezeit als perpendiculair gegen den Axentriangel ABC dieses Körpers angenommen werden (Fig. 83) und wenn mehrere Flächen sich durchschneiden, daß ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt LOM gegen die Fläche dieses Triangels und folglich gegen alle diejenigen Linien perpendiculair sey, die auf dieser Fläche durch den Punkt O gezogen werden, in welchem der Kegel durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt LOM durchschnitten wird. Denn dieses alles ist im §. 2. 5. 6. der Parabel bewiesen worden.

§. 4.

Erklärung. Wenn die Seiten AB, AC eines Axen-

(*a*) Der umgekehrte Satz des §. 2 ist falsch, das heißt, man kann nicht schliessen, daß die Ordinaten zu einem Cirkel gehören, weil die Quadrate derselben sich untereinander verhalten, wie die correspondirenden Rectangel. Diese Eigenschaft kann auch der Ellypse zukommen, wie wir es §. 10 zeigen werden.

Axentriangels von einem ungleichseitigen Kegel (Fig. 43) durch eine Fläche GLRM so durchschnitten werden, daß der gemeinschaftliche Durchschnitt GR dieser Ebene und des Triangels mit der Seite AB einen Winkel AGR = ACB macht, der von dem Diameter BC mit der andern Seite AC gemacht wird, so sagt man, daß die Seiten antiparallel mit der Basis durchschnitten sind.

§. 5.

Zweyter Hauptsatz. Wenn man einen ungleichseitigen Kegel antiparallel mit seiner Basis durchschneidet, so ist die Ebene GLRM, die dadurch entstehet, ein Cirkel.

Beweis. Man lasse durch einen beliebigen Punkt der antiparallelen Fläche eine Ebene gehen, welche den Kegel parallel mit seiner Basis durchschneidet, um dadurch einen Cirkel DLPM zu bekommen, der mit der Basis dieses Kegels parallel ist, und dessen Diameter DP mit dem Diameter BC parallel ist, (§. 1. der Parabel) und daß der Winkel DPA = BCA = AGR sey (Beding.) Da man ferner die Basis dieses Kegels gegen die Fläche des Triangels ABC als perpendiculair annimmt, so wird auch der Cirkel DLPM gegen diese nämliche Fläche perpendiculair seyn, und folglich wird der gemeinschaftliche Durchschnitt LOM dieser beyden Ebenen GLRM und DLPM gegen die Linien DP, GR, die auf diesem Triangel gezogen sind, perpendiculair und folglich in der Mitte O durchschnitten werden. Nun sind die Triangel DOG und POR der antiparallelen Lage wegen sich ähnlich; folglich verhält sich DO : OG = OR : OP. Deswegen ist $OG \times OR = DO \times OP = \overline{OL}^2$ oder $\overline{OM}^2$ (Geometr.) folglich ist $OG \times OR = \overline{OL}^2$. Folglich ist die Ebene GLRM ein Cirkel (§. 1).

* §. 6.

Dritter Hauptsatz. Wenn aber der Kegel so durchschnitten wird, daß der Schnitt LMTP (Fig 44) weder parallel noch antiparallel mit der Basis dieses Körpers ist, das heißt, daß der Winkel ACT > oder < BCA, so wird dieser Durchschnitt kein Cirkel seyn.

Beweis. Man lasse durch die Mitte O der Linie LT eine mit der Basis BC antiparallele Ebene gehen, so wird dadurch der Cirkel GMRP entstehen (§. 5); folglich ist PO = OM und $\overline{PO}^2$ oder $\overline{OM}^2 = OG \times OR$. Würde aber die Figur LMPT auch ein Cirkel seyn, so wäre auch $\overline{OM}^2 = LO \times OT$; folglich $LO \times OT = GO \times OR$, oder es verhielte sich LO : GO = OR : OT; Folglich würden die Triangel GOL und ROT sich ähnlich seyn (Geometr.); Folglich würden die den gleichnamigten Seiten LO, OR entgegenstehenden Winkel OGL, und OTR sich gleich seyn (Geom.). Folglich wäre der Winkel LTA = RGA = ACB. (Constr.); Folglich würde LT parallel mit BC seyn. Dieses ist aber gegen unsere Bedingung. Folglich kann die Figur LMTP kein Cirkel seyn.

§. 7.

Anmerkung. Man könnte durch den Punkt O statt der antiparallelen Ebene, eine mit der Basis parallellaufende gehen lassen. Solchergestalt wäre aber der 3te Satz nicht aus dem 2ten hergeleitet worden. Dieses ist aber ein Fehler, wenn man anders verfahren kan.

§. 8.

Zusatz. Weil also die Figur LMTP kein Cirkel ist, und weil LT durch die Mitte desselben gehet (indem die Perpendi-

pendiculairlinien, die aus irgend einem Punkt M des Umkreises auf diese Linie gezogen sind, in 2 Theile getheilet werden), so kann der Punkt O nicht gleich weit von allen Punkten dieses Umkreises entfernet seyn. Lasset uns also sehen, von welcher Seite sich die größte Entfernung zeiget.

Es sind hier 2 Fälle. Denn durch diesen Durchschnitt LT kann der Winkel TLA < oder > gemacht worden seyn als BCA oder RGA, der durch die antiparallele Linie GR, die durch die Mitte O der Seite LT gezogen ist, entstanden ist. In dem ersten Falle, das heißt, wenn der Winkel TLA < RGA ist, so ist die Linie LT grösser als die Perpendiculairlinie MOP, die auf der Mitte O aufgerichtet ist. In dem 2ten Fall, oder wenn TLA > RGA ist, so ist LT kleiner als MOP.

Beweis des ersten Falls. Man ziehe durch die Mitte O die Antiparallellinie GOR (Fig. 44) und zugleich durch den nämlichen Punkt die Parallellinie DH. Man wird alsdenn finden, daß, da GR antiparallel ist, (Constr.) der Winkel ODG in dem Triangel GOD dem Winkel ORH in dem Triangel HOR gleich sey. Es ist aber der äussere Winkel ORH grösser, als der innere OTR; folglich ist ODG > OTR; folglich kann man bey dem Winkel ODG oder ODL einen Winkel ODS nehmen, der dem Winkel OTR oder OTH gleich ist, und folglich wird DS die Linie LT in einem Punkt S zwischen O und L schneiden; Folglich ist OS < OL oder OT und die Triangel ODS und OTH sind sich ähnlich: Folglich verhält sich OS : DO = OH : OT oder es ist $OS \times OT = DO \times OH = \overline{OM}^2$ oder $\overline{OP}^2$. (indem man nämlich einen Cirkel annimmt, dessen Diameter DH ist, weil sonst OM der gemeinschaftliche Durchschnitt des Cirkels und der Figur LMPT wäre. Denn man kann aus dem Punkt O nur eine einzige Perpendiculairlinie auf die Fläche des Triangels ABC aufrichten) folglich

folglich ist $OL \times OT$ oder $\overline{OL}^2 > OS \times OT$; Folglich auch $> \overline{OM}^2$; folglich ist $OL > OM$; folglich ist $2\ OL$ oder $LT > 2\ OM$ oder MP. w. d. 1ste z. E. W.

Beweis des 2ten Falls (Fig. 45), wo der **Winkel** TLA > RGA der antiparallelen **Linie** RG, die **durch** die **Mitte** O der **Linie** LT gezogen ist. Man ziehe, (wie vorhin), mit BC die Parallellinie DOH, so wird der Winkel ODG = ORH seyn. Es ist aber ORH < OTH; Folglich ist ODG oder ODL < OTH. Wenn man folglich DS so weit verlängert, bis sie mit der verlängerten Linie TL zusammen stößt, um dadurch den Winkel ODS zu bekommen, der dem Winkel OTH gleich ist, so wird DS nothwendig mit OL in einem Punkt S zusammen stossen, der auf der andern Seite von O gegen L zu liegt, und es wird OS > OL und die Triangel ODS und OTH sich ähnlich seyn. Folglich verhält sich $OD : OS = OT : OH$. oder $OS \times OT = OD \times OH = \overline{OM}^2$. Es ist aber $OS \times OT > OL \times OT$ oder $\overline{OL}^2$; Folglich ist $\overline{OM}^2 > \overline{OL}^2$ oder $OM > OL$. Folglich $2\ OM$ oder $MP > 2\ OL$ oder LT. W. d. z. E. W.

§. 9.

Erklärungen. Es sey itzt LMSTPL (Fig. 46) ein Durchschnitt eines Kegels, der durch eine Fläche entstehet, welche die beyden Seiten AB und AC des Axentriangels ABC dieses Körpers so durchschneidet, daß sie weder parallel noch antiparallel mit der Basis BC ist. Dieses ist nun nach §. 6 kein Cirkel, sondern nach der Benennung der Alten eine **Ellypse** (*a*), und wenn man annimmt, daß der Winkel ALT kleiner sey, als der Winkel, den die antiparallele Linie macht, so

(*a*) Man wird den Grund davon im §. 23. sehen.

so wird LT die Hauptaxe oder grosse Axe oder die größte Länge der Ellypse seyn (§. 8). Eine jede Linie OS oder rM, die von einem beliebigen Punkt des Umkreises dieser Figur perpendiculair auf LT herunter gezogen ist, ist eine Ordinate gegen diese Axe; die Theile der Axe OT und OL, die durch die Ordinate OS bestimmt werden, heissen Segmente; die Perpendiculairlinie ID, die auf der Mitte K der Linie LT aufgerichtet ist, heißt die kleine Axe oder *axis conjugatus* (*a*) gegen die Axe LT. Eine jede Linie, die von einem Punkt der Peripherie der Figur auf ID herunter gezogen ist, heisset eine Ordinate der kleinen Axe, und die Theile der kleinen Axe, die durch diese Ordinate bestimmt werden, sind Segmente derselben (*).

§. 10.

Vierter Hauptsatz. In einer Ellypse, das heißt, in einen Kegelschnitt, wie LMSTPL ist, der kein Cirkel ist, (§ 6)

(*a*) Die Ursache dieser Benennung wird im §. 21. erklärt werden.

(*) Die gewöhnlichste Art, wie man sich die Entstehung der Ellypsen vorstellet, ist freylich diejenige, da man sich dieselbe als aus einem Kegel geschnitten gedenket. Ja! man glaubt vielleicht gar berechtigt zu seyn, jeden andern Körper als untauglich dazu anzusehen. Nichts destoweniger ist es gewiß, daß man auch aus jedem Cylinder vollkommene Ellypsen schneiden kann, und zwar solche Ellypsen, die mit den aus einem Kegel entstandenen genau einerley sind. Dieses hat schon vor mehr als 1000 Jahren der Serenus eingesehen, der in 2 ganzen Büchern, worin natürlicher Weise viele artige Nebenuntersuchungen vorkommen, ausführlich davon gehandelt hat. Man darf nur den Cylinder schief durchschneiden, so hat man eine Ellypse, und es wird keinem, der ein wenig sich geübet hat, schwer werden, die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen. Man lese darüber des Halleys Ausgabe des Serenus. Auch hat Deschales in seinem *Mundus mathematicus* nach dem Serenus die Eigenschaften dieser Ellypse untersucht. B.

(§. 6) verhalten sich die Quadrate der Ordinaten $\overline{OS}^2$, $\overline{rM}^2$, wie die Rechtecke aus den correspondirenden Segmenten der Axe, das heißt, es verhält sich $OS : \overline{rM}^2 = OT \times OL : rL \times rT$ (Fig. 45).

Beweis. Man lasse durch zwey beliebige Punkte S und M des Umkreises dieser Figur 2 Ebenen gehen, welche den Kegel mit seiner Basis parallel durchschneiden. Diese werden alsdenn Cirkel vorstellen. Folglich ist $\overline{OS}^2 = OR \times OQ$ und $\overline{rM}^2 = rF \times rG$ (Geom.) lasset uns nun die ähnlichen Triangel LRO und LFr betrachten. Da verhält sich $OR : rF = OL : rL$ und wegen der beyden ähnlichen Triangel TOQ und TrG ist $OQ : rG = OT : rT$. Wenn man folglich diese Glieder der beyden Proportionen der Ordnung nach durch einander multiplicirt, so finden wir dieses Verhältniß $OR \times OQ : rF \times rG = OL \times OT : rL \times rT$. Wenn wir in diesem Verhältniß $\overline{OS}^2$ anstatt $OR \times OQ$ und $\overline{rM}^2$ in der Stelle von $rF \times rG$ setzen, so wird daraus: $\overline{OS}^2 : \overline{rM}^2 = OL \times OT : rL \times rT$, w. z. E. W.

§. 11.

Allein wenn man fände, daß die Quadrate der Ordinate OS, rM gegen die Linie LT sich unter einander verhielten, wie die Rechtecke der correspondirenden Segmente, so dürfte man daraus noch nicht schliessen, daß die äussersten Punkte S und M dieser Perpendiculairlinien in einer Ellypse wären. Denn diese nämliche Eigenschaft kommt auch dem Cirkel zu (§. 2) Deswegen ist der vorige Satz umgekehrt falsch (*a*).

§. 12.

(*a*) Allein es wird wahr seyn, wenn man voraus setzt, oder sonst schon

§. 12.

Fünfter Hauptsatz. Es verhält sich das Quadrat $\overline{OS}^2$ jeder Ordinate OS der grossen Axe LT zu dem Rechteck $OT \times OL$ aus den correspondirenden Segmenten, OT und OL, wie das Quadrat der kleinen Axe zum Quadrat der grossen Axe, oder wie das Quadrat der halben kleinen Axe zum Quadrat der halben grossen Axe, das heißt, $\overline{OS}^2 : OT \times OL = \overline{KD}^2 : \overline{KT}^2$.

Beweis. Wenn KD eine Ordinate ist, so folgt daraus (§. 10) daß $\overline{OS}^2 : \overline{KD}^2 = OT \times OL : KT \times KL$ oder $\overline{KT}^2$. Wenn man folglich die Glieder versetzt, so verhält sich $\overline{OS}^2 : OT \times OL = \overline{KD}^2 : \overline{KT}^2$. w. z. E. W.

§. 13.

Anmerkung Ich glaube, daß man mir den Beweis schenken werde, daß der Umkreis der Ellypse eine krumme Linie sey. Und da sie auf einer Ebene beschrieben ist, so lasset uns darin die andern Eigenschaften, die nicht von dem Körper, von dem sie erzeugt sind, abhängen, aufsuchen. Lasset uns aber immer das nachfolgende aus den vorhergehenden herleiten.

§. 14.

Erster Zusatz. Lasset uns izt die 47te Figur betrachten, worin AB die grosse Axe ist; CD aber die kleine Axe; G das Centrum der Ellypse; MP eine Ordinate an der grossen Axe. In diesem Fall heißt ein jeder Theil GP dieser Axe

schon weiß, daß das Quadrat einer jeden Ordinate nicht den Rechteck aus den Segmenten der Axe gleich ist, die durch diese Ordinaten entstanden sind.

Axe, welcher zwischen dem Centrum G und dem Endpunkt einer Ordinate MP enthalten ist, eine Abscisse (*). Es sey folglich AB $= 2a$; AG oder GB $= a$; CD $= 2b$; CG oder GD $= b$; MP $= y$; GP $= x$: So ist AP $= a - x$ und PB $= a + x$; folglich ist AP $\times$ PB $= (a - x)(a + x) = aa - xx$.

Wenn man also die Eigenschaft der Ellypse, die man im 5ten Hauptsatze bestimmt hat, analytisch ausdrücket, so bekommt man folgendes Verhältniß: yy ($\overline{MP}^2$) : $aa - xx$ (AB $\times$ PB) $= bb$ ($\overline{CG}^2$) : aa (AG $\times$ GB oder $\overline{GB}^2$) Hieraus schließt man, daß $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ sey. Eine Gleichung, die allen Punkten dieser krummen Linie in Absicht auf ihre grosse Axe zukommt, und wodurch sie vom Cirkel unterschieden ist. Denn im Cirkel sind die Axen oder Diameter sich gleich. Also $a = b$: Folglich wird aus der vorigen Gleichung für den Cirkel $aa - xx = yy$.

§. 15.

Zweyter Zusatz. Weil $\overline{MP}^2$: AP $\times$ PB $= \overline{CG}^2 : \overline{GB}^2$ und CG $<$ GB; so siehet man, daß $\overline{MP}^2 <$ AP $\times$ PB, das heißt, daß das Quadrat einer Ordinate an der grossen Axe einer Ellypse kleiner sey, als das Rechteck aus den correspondirenden Segmenten dieser Axe. Dieses bestimmet einen andern Unterschied zwischen dieser krummen Linie und den Cirkel. Denn in diesem ist das Quadrat der Ordinaten dem Rechteck aus den correspondirenden Segmenten gleich.

§. 16.

(*) Das heißt, die Abscissen nehmen ihren Anfang von dem Mittelpunkt der Ellypse. Dieses ist aber nicht immer nothwendig, sondern die mehrsten Auctoren rechnen den Anfang der Abscissen von A und alsdenn heisset AT oder AP eine Abscisse. B.

§. 16.

Dritter Zusatz. Der Ausdruck für das Quadrat der Absciſſe iſt dieſer: $xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$. Denn nach dem §. 14 iſt $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$. Nun verſetze man die Glieder $-xx$ und $-\frac{aayy}{bb}$ ſo iſt $aa - \frac{aayy}{bb}$ oder $\frac{aabb - aayy}{bb} = xx$.

§. 17.

Vierter Zusatz. Es iſt das Quadrat der Ordinate $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$. Man darf nur, um ſich hievon zu verſichern, die beyden Helften der Gleichung $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ mit bb multipliciren, ſo iſt $aabb - bbxx = aayy$; folglich $\frac{aabb - bbxx}{aa} = yy$.

§. 18.

Fünfter Zusatz. Wenn man beſtändig die Gleichung $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ annimmt, ſo iſt offenbar, daß, wenn die Abſciſſe x gröſſer wird, die Ordinate y kleiner werden müſſe. Denn wenn x gröſſer wird, ſo wird auch xx gröſſer und folglich wird $aa - xx$ kleiner; weil man von dem Quadrat aa eine gröſſere Gröſſe xx abziehet. Wenn aber $aa - xx$ kleiner wird, ſo muß auch die andere gleiche Gröſſe $\frac{aayy}{bb}$ kleiner werden. Da aber aa und bb beſtändige Gröſſen ſind, ſo kan jene in Betracht dieſer nicht kleiner werden. Folglich wird ſie es in Anſehung des yy. Wenn alſo die Abſciſſen wachſen, ſo nehmen die Ordinaten ab, das heißt, die Ordinaten werden kleiner, je weiter ſie vom Mittelpunkt der Ellypſe ſich

entfernen. Folglich ist die Helfte der kleinen Axe die größte Ordinate gegen die grosse Axe und die beyden Endpunkte der kleinen Axe C und D bestimmen die größte Breite der Ellypse.

§. 19.

Sechster Zusatz. Hieraus folgt, daß eine Perpendiculairlinie DA an einem Endpunkt D der kleinen Axe die krumme Linie nur in einem einzigen Punkt D berühren werde. Denn wenn DQ parallel mit der grossen Axe AB ist (Constr.), und sie berührte die krumme Linie in einem andern Punkt H, so würde, wenn man aus diesem Punkt die Ordinate HK zöge $HK = DG$ seyn, das heißt, die Ordinaten würden nicht kleiner werden, so wie sich vom Centrum entfernen. Dieses ist aber unmöglich.

§. 20.

Siebender Zusatz. Lasset uns von einem beliebigen Punkt M auf die kleine Axe die Perpendiculairlinie oder die Ordinate $MR = GP = x$ ziehen, so ist $RG = MP = y$; $CR = CG - RG = b - y$; $RD = GD + RG = b + y$; Folglich ist $CR \times RD = bb - yy$. Es ist aber (§. 16) $\frac{aabb - aayy}{bb} = xx$ oder $xx \times bb = (bb - yy) aa$; Folglich ist $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$ oder es verhält sich $xx : bb - yy = aa : bb$; das heißt, $\overline{MR}^2 : CR \times RD = \overline{AG}^2 : \overline{CG}^2$.

§. 21.

Achter Zusatz Die Ellypse hat also einerley Eigenschaften, man mag die Ordinaten auf der grossen oder kleinen Axe nehmen. Daher nennet man diese Axen conjugirte Axen, von dem lateinischen Worte conjugatus, verbunden, das heißt Axen, die eine

Wer-

Verwandſchaft mit einander haben. Man wird folglich, wie im §. 18 daraus ſchlieſſen können, daß, wenn die Abſciſſen y der kleinen Axe gröſſer werden, die Ordinaten x kleiner werden; daß die Helfte der groſſen Axe die gröſte Ordinate der kleinen Axe ſey, und daß die beyden Endpunkte A und B, die gröſte Weite der Ellypſe beſtimmen; daß aber auch im Gegentheil nach dem 2ten Zuſatze (§. 15) das Quadrat eine Ordinate an der kleinen Axe gröſſer ſey, als das Rechteck aus den damit correſpondirenden Segmenten der Axe. Weil in der Proportion $xx : bb - yy = aa : bb$ (§. 20), $aa > bb$ iſt, ſo muß auch $xx > bb - yy$ oder $\overline{MR}^2 > CR \times RD$ ſeyn. Dieſes iſt ein neuer Unterſchied zwiſchen der Ellypſe und dem Cirkel.

§. 22.

Neunter Zuſatz. Aus dem Satze, daß die Ordinaten der kleinen Axe, ſo wie ſich vom Centrum entfernen, immer kleiner werden, folgt, daß eine Perpendiculairlinie AV an einem der Endpunkte der groſſen Axe die krumme Linie nur in einem einzigen Punkt berühre. Denn wenn ſie dieſelbe in einem andern Punkt T berührte, und man zöge aus dieſem Punkt eine Ordinate TN an die kleine Axe, die mit der Perpendiculairlinie AV parallel iſt, (Conſtr.), ſo würde TN $=$ AG ſeyn; das heiſſet, die Ordinaten an der kleinen Axe würden nicht kleiner werden, ſo wie ſich vom Centrum entfernen. Dieſes widerſpricht aber dem §. 21.

§. 23.

Zehnder Zuſatz. Wenn die Abſciſſen GP und GS ſich gleich ſind (Fig. 48) ſo ſind es auch die zu ihnen gehörige Ordinaten PV und SK. Denn wenn man die vorige Benennung behält und GS $= t$, SK $= z$ ſetzet, ſo iſt (§. 16)

 $xx =$

$xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$ und aus der nämlichen Ursache $tt =$ $\frac{aabb = aazz}{bb}$. Folglich, weil nach der Bedingung GP = GS oder $x = t$ so wird auch $xx = tt$ seyn und folglich $\frac{aabb - aayy}{bb} = \frac{aabb - aazz}{bb}$. Wenn man folglich mit bb auf beyden Seiten multiplicirt, darauf von beyden Seiten $aabb$ abzieht und die beyden Reste durch aa dividirt, so ist $-zz$ $= -yy$ oder $zz = yy$ oder $z = y$, das heißt, SK = PV.

§. 24.

Wenn aber umgekehrt die Ordinaten SK und PV sich gleich sind, so sind auch ihre Abscissen GS und GP es gleichfalls. Um sich davon zu überzeugen muß man sich erinnern, daß (§. 17) $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ und eben so $zz = \frac{aabb - bbtt}{aa}$; Folglich da $y = z$ ist (Beding.), so wird auch $yy = zz$ und folglich $\frac{aabb - bbxx}{aa} = \frac{aabb - bbtt}{aa}$ seyn. Daraus schließt man, wie in §. 23, daß $x = t$ oder GP = GS sey.

§. 25.

Eilfter Zusatz. Wenn man also die beyden Endpunkte V und K jeder 2 gleicher Ordinaten PV und SK durch die Linie VK mit einander verbindet, so wird diese Linie durch das Centrum G gehen und daselbst in 2 gleiche Theile getheilet werden.

Denn es ist offenbar, daß die rechtwinklichten Triangel GPV und GSK sich ähnlich sind. Folglich verhält sich PV : SK = GP : GS = GV : GK. Nun ist aber PV = SK (Beding.) Folglich GP = GS und GV = GK, das heißt, die Entfernung PS dieser gleichen Ordinationen ist durch die

die Linie VK in 2 gleiche Theile getheilet worden. Es theilet aber das Centrum der Ellypse diese nämliche Distanz auch in 2 gleiche Theile (§. 24); Folglich ist G der Mittelpunkt derselben; Folglich wird eine jede Linie VGK, die durch das Centrum G der Ellypse gehet, und sich an den 2 Punkten dieser krummen Linie endiget, in dem Punkt G in 2 gleiche Theile getheilet. Daher heisset eine jede Linie, die VGK ähnlich ist, ein Diameter.

§. 26.

Wenn man umgekehrt von den Endpunkten V und K eines Diameters die Ordinaten VP und KS fallen läßt, so sind diese von einerley Grösse und ihre Abscissen GP und GS werden sich auch gleich seyn. Denn vermöge der ähnlichen Triangel GPV und GSK haben wir folgendes Verhältniß: VG : GK = VP : KS = GP : GS Nun ist VG = GK (§. 25), weil VGK ein Diameter ist (Beding.); Folglich ist VP = KS und GP = GS.

§. 27.

Zwölfter Zusatz. Weil Ordinaten, die gleichweit vom Mittelpunkte entfernet sind, sich gleich sind (§. 23), so ist die Ellypse gegen ihr unterstes Ende L nicht weiter, als gegen ihr oberstes Ende T. (Fig. 46) obgleich der Kegel dünner oder spitziger in T als in L ist (*a*).

* §. 28.

(*a*) Diese Betrachtung kann uns in unsern Urtheilen sehr zurückhaltend machen. Wenn man den Kegel in der Queere oder von oben nach unten so durchschneidet, daß dadurch eine Fläche LSTPL (Fig. 46) entstehet, so urtheilet man sogleich, daß diese Art von Ovale die Gestalt einer Birne oder Klocke haben müsse, weil der Kegel von oben nach unten zu immer dicker wird. Dieses ist also sehr falsch, wie man es auch ohne Theorie finden kann. Man darf nur einen Kegel nach der gegebenen

*§. 28.

Dreyzehender Zusatz. Wenn man das Verhältniß ansetzet: AB : CD = CD zu einer dritten Proportionallinie P. (Fig. 47) oder $2a : 2b = 2b : \frac{4bb}{2a} = \frac{2bb}{a}$ so ist $p = \frac{2bb}{a}$. Diese 3te Proportionallinie wird alsdenn der Parameter der grossen Axe genennet. Nach dieser Voraussetzung findet man, daß das Rechteck $AP \times PB$ jeder 2 Segmente der grossen Axe sich zum Quadrate $\overline{PM}^2$ ihrer Ordinate verhalte, wie die grosse Axe AB zum Parameter p; oder, wenn man die Proportion ansezt $2a : 2b = b : p$, so ist $aa - xx\ (AP \times PB) : yy\ (\overline{PM}^2) = 2a\ (AB) : p$.

Beweis. Weil $2a : 2b = 2b : p$. (Beding.), so verhält sich auch $4aa : 4bb = 2a : p$ (*); Folglich ist $\frac{4aa}{4bb}$ oder $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$. Wenn man folglich $\frac{2a}{p}$ in der Gleichung $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ (§. 14) in der Stelle von $\frac{aa}{bb}$ setzet, so wird daraus $aa - xx = \frac{2aayy}{p}$ oder $(aa - xx)\ p = 2a \times yy$. Hieraus folgt das Verhältniß: $aa - xx : yy = 2a : p$.

§. 29.

Vierzehnter Zusatz. Setzet man ferner an: CD : AB

---

nen Anweisung zerschneiden, so wird man den Beweis vor Augen liegen haben.

(*) Man sehe die Erläuterung, die ich zum §. 168 der Parabel gegeben habe. B.

$AB = AB : m$, und m heißt der Parameter der kleinen Axe CD, so wird man finden, daß der Rechteck $CR \times RD$ aus 2 Segmenten der kleinen Axe sich zum Quadrat $\overline{MR}^2$ ihrer Ordinate verhält, wie die kleine Axe CD zum Parameter m. Nun sey $2b : 2a = 2a : m$, so verhält sich $CR \times RD$ $(bb - yy) : \overline{MR}^2 (xx) = CD (2b) : m$.

Dieses als richtig zu erkennen, darf man nur den Beweis vom §. 28 wiederhohlen, indem man spricht: Weil $2b : 2a = 2a : m$., so verhält sich auch $4bb : 4aa = 2b : m$, oder $\frac{bb}{aa} = \frac{2b}{m}$: Folglich verwandelt sich die im §. 20 gestandene Gleichung $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$ in folgende: $bb - yy = \frac{2bxx}{m}$ oder $(bb - yy) m = 2b \times xx$ Hieraus folgt das Verhältniß: $bb - yy : xx = 2b : m$.

* §. 30.

Anmerkung. Die Gleichung $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$ (§. 28) oder $bb - yy = \frac{2bxx}{m}$ (§. 29) heißt die Gleichung der Ellypse in Vergleichung gegen den Parameter. Diese Gleichung kann so, wie die Gleichung aus den Axen dienen, die krumme Linie zu beschreiben, und die Eigenschaften derselben zu entdecken. Ja sie ist noch einfacher, weil $\frac{2a}{p}$ ein Verhältniß von simpeln Linien, da hingegen $\frac{aa}{bb}$ ein Verhältniß von Quadraten ist.

§. 31.

Funfzehnder Zusatz. Das Quadrat $\overline{PM}^2$ der Ordinate der grossen Axe ist kleiner, als das Rechteck aus AP und dem Parameter dieser Axe p.

Beweis. Man hat im §. 28 gesehen, daß dieser Parameter $p = \frac{2bb}{a}$ sey. Nun weiß man aber daß $GP = x$ und $AP = a - x$ ist. Man muß folglich beweisen, daß $\overline{PM}^2 < AP \times p$, oder daß $yy < (a - x)\, p$ oder endlich daß $yy < (a - x)\, \frac{2bb}{a}$ sey. Man erinnere sich deswegen daran, daß $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ sey (§. 17), so verhält sich $\overline{PM}^2 : AP \times p = \frac{aabb - bbxx}{aa} : (a - x)\, \frac{2bb}{a}$; und wenn man die 2 letzten Glieder durch $\frac{bb}{a}$ dividirt, $= \frac{aa - xx}{a} : (a - x)\, 2$; und wenn man noch einmal mit $a - x$ dividirt $= \frac{a + x}{a} : 2$; oder wenn man mit a multiplicirt, $= a + x : 2a$. Folglich ist $\overline{PM}^2 : AP \times p = a + x : 2a$. oder $= BP : BA$. Es ist aber $BP < BA$. Folglich ist auch $\overline{PM}^2 < AP \times p$. W. z. E. W.

* §. 32.

Anmerkung. Weil also das Quadrat $\overline{PM}^2$ der Ordinate PM nicht so groß ist, als $AP \times p$, oder weil zu dieser Gleichheit noch etwas fehlet: so haben die alten Geometer diese krumme Linie deswegen eine Ellypse genennet. Denn das griechische Wort Ἐλλειπσις, wovon das Wort Ellypse offenbar hergeleitet ist, bedeutet einen Mangel oder etwas fehlendes.

§. 33.

§. 33.

Sechzehnder Zusatz. Wenn man mit dem Halbmesser AG $= a$ aus dem Endpunkt C oder D der kleinen Axe, als aus einem Mittelpunkt auf der grossen Axe die Punkte F und f bemerket, und wenn man von diesen solchergestalt bestimmten Punkten nach einem Punkt der krummen ellyptischen Linie die Linien FM und fM ziehet, so ist die Summe derselben FM $+ f$M jederzeit der grossen Axe AB oder $2a$ gleich (Fig. 47).

Beweis. Man benenne die Entfernung GF oder Gf der Punkte F und f vom Centrum G mit dem Buchstaben c und erinnere sich des 5ten Hauptsatzes (§. 12), woraus folgende Gleichung entstand: $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ (§. 14), woraus man schloß, daß $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ sey (§. 17). Auch bemerke man, daß, wenn man CF $=$ AG $= a$ ziehet, wegen des recht winklichten Triangels FGC, $\overline{FG}^2 = \overline{FC}^2 - \overline{CG}^2$ oder $cc = aa - bb$ (a) und wenn man von dem Punkt M die Ordinate PM ziehet, FP $=$ FG $-$ GP $= c - x$; Folglich ist $\overline{FP}^2 = cc - 2cx + xx$, und P$f$ $=$ fG $+$ GP $= c + x$; Folglich $\overline{Pf}^2 = cc + 2cx + xx$. Folglich ist $\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{FP}^2 = yy + cc - 2cx + xx$; wenn man folglich in dieser lezten Gleichung den Werth von cc und yy sezet, so ist $\overline{FM}^2 = \frac{aabb - bbxx}{aa} + aa - bb - 2cx + xx$,

(a) Weil $cc = aa - bb$, so ist $bb = aa - cc = (a - c)(a + c)$. Nun ist $(a - c) =$ AG $-$ GF $=$ AF und $a + c =$ GB $+$ GF $=$ FB. Woraus man siehet, daß bb oder $\overline{CG}^2 = AF \times FB$ sey, oder daß $AF = \frac{\overline{CG}^2}{FB}$.

oder wenn man alles unter einerley Benennung bringt, $\overline{FM}^2 = \frac{aabb - bbxx + a^4 - aabb - 2a^2cx + aaxx}{aa} = \frac{a^4 - 2a^2cx + aaxx}{aa}$ $\frac{-bbxx}{aa}$; setzet man folglich cc an der Stelle von $aa - bb$, wodurch xx multiplicirt wird, so ist $\overline{FM}^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + ccxx}{aa}$ und wenn man folglich die Quadratwurzel ausziehet, $FM = \frac{aa - cc}{a}$.

Eben so ist $\overline{fM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{Pf}^2 = yy + cc + 2cx + xx$ und wenn man die vorige Substitution macht, $= \frac{(aabb - bbxx + a^4 - aabb + 2a^2cx + a^2x^2)}{aa} = \frac{a^4 + 2a^2cx + a^2 - b^2x^2}{aa}$, und wenn man an die Stelle von $a^2 - b^2$, wodurch xx multiplicirt wird, cc setzet $= \frac{a^4 + 2a^2cx + ccxx}{aa}$. Wenn man folglich die Quadratwurzel ausziehet so ist $fM = \frac{aa + cx}{a}$.

Folglich ist $FM + fM = \frac{aa - cx}{a} + \frac{aa + cx}{a} = \frac{2aa}{a} = 2a$; W. z. E. W.

§. 34.

Erster Zusatz. Hieraus folgt, daß wenn man durch einen beliebigen Punkt M (Fig. 49) der krummen Linie eine Linie fM ziehet, und sie so lange verlängert, bis $MP = MF$ ist; wenn man alsdenn PF ziehet, und endlich durch die Mitte L dieser Linie und durch den gegebenen Punkt M eine andere Linie OLMS ziehet; Es folgt, sage ich, aus dem vorigen, daß diese Linie die Tangente an dem Punkt M sey.

Beweis. Es ist bloß dieses zu beweisen, daß OLMS die

die krumme Linie nur in einem einzigen Punkt berühre. Nun stehet aber OLMS (Constr.) auf der Mitte der Linie PF perpendiculair. Wenn sie folglich die krumme Linie in irgend einem andern Punkt Q berührte, so würde $QP = QF$ seyn; Folglich $fQ + QP = fQ + QF = 2a = AB$ (§. 33), Es ist aber $fM + MF$ auch $= 2a$ (§. 33) $= fM + MP$ (Constr.); Folglich ist $fQ + QP = fM + MP = fP$. Das heißt, eine grade Linie fP würde einer krummen Linie fQP gleich seyn, die zwischen den nämlichen Punkten P und f wäre. Dieses ist aber unmöglich (Geom.); Folglich —

§. 35.

Zweyter Zusatz. Es ist der Winkel $FMO = fMS$. Denn $FMO = PMO$ (Constr.) $= fMS$ seinem Verticalwinkel; Folglich ist $FMO = fMS$, das heißt, wenn man von dem Punkten F und f die Linien FM und fM an einem und denselben Punkt M ziehet, so wird der Winkel, den sie mit der Tangente an diesem Punkte machen, auf beyden Seiten sich gleich seyn.

§. 36.

Dritter Zusatz. Wenn man folglich in einem der Punkte F einen leuchtenden Körper oder ein Feuer setzte, so werden alle Licht- oder Feuerstrahlen, die auf die krumme Linie fallen, in einen andern Punkt f zurückgeworfen werden; denn giengen die reflectirten Strahlen nicht nach f, so würde der Einfalls- und Reflexionswinkel sich nicht gleich seyn. Deswegen werden die Punkte F und f, die nach dem 6ten Hauptsatze (§. 33) bestimmt sind, **Brennpunkte** genennet.

Diese Eigenschaft der Ellypse ist sehr merkwürdig. Wir werden alsdenn Gebrauch davon machen, wenn wir diese krumme Linie auf die ausübenden Künste anwenden.

* §. 37. I.

Die Entfernung AF (Fig. 47) des einen Brennpunkts F einer Ellypse von dem nächsten Endpunkte der Axe ist grösser, als der 4te Theil des Parameters dieser krummen Linie; das heißt: $AF > \frac{p}{4}$.

Beweis. $AF = \frac{\overline{CG}^2}{FB}$ (Anmerk. §. 33), und $p = \frac{4bb}{2a}$ (28) folglich ist $\frac{p}{4} = \frac{bb}{2a} = \frac{\overline{CG}^2}{AB}$. Nun ist klar, daß $\frac{\overline{CG}^2}{FB} > \frac{\overline{CG}^2}{AB}$ weil $FB < AB$ ist; folglich ist $AF > \frac{p}{4}$.

* §. 37. II.

Wenn man durch das Centrum einer Ellypse G (Fig. 49) mit einer beliebigen Tangente HR eine Parallellinie NV ziehet, so wird diese Parallellinie von der Linie FK, die aus dem entferntesten Brennpunkt F nach dem Berührungspunkt K gezogen wird, ein Stück TK herunter schneiden, welches so groß ist, als die Helfte der grossen Axe: das heißt $TK = a = \frac{AB}{2}$.

Beweis. Man ziehe aus dem andern Brennpunkt f mit NV eine Parallellinie fe, so ist der Winkel $Kef = KTV = HKT$, als dessen Wechselwinkel, $= fKR$ (§. 35) $= efK$, als dessen Wechselwinkel (Constr.): Folglich ist der Winkel $Kef = efK$; folglich $Ke = Kf$ und $Fe = FK - Ke = FK - Kf$. Da ferner $FG = Gf$, so ist auch $FT = Te$ oder $Te = \frac{Fe}{2} = \frac{FK - Kf}{2}$ (weil $Fe = FK - Kf$); Folglich ist $Te + eK = \frac{FK - Kf}{2} + Kf$ (denn es ist

ist $Kf = eK$); Folglich ist $TK = \frac{FK + Kf}{2} = \frac{AB}{2}$ (§. 33) W. z. E. W.

§. 38.

Fünfter Zusatz. Es ist offenbar, wenn man die Perpendiculairlinie Md aus dem Berührungspunkt M aufrichtet, daß diese nicht durch das Centrum G gehen werde; weil Md und FP (Constr.) auf der Tangente OS perpendiculair stehen; so geben die ähnlichen Triangel fPF und fMd folgendes Verhältniß: $fM : MP$ oder $MF = fd : dF$. Es ist aber $fM > MF$. Folglich ist auch $fd > dF$; folglich ist der Punkt d der Linie Md, die auf der krummen Linie perpendiculair stehet, nicht im Mittelpunkt der Ellypse. Hier ist also noch ein anderer Unterschied zwischen dem Cirkel und der Ellypse. Denn im Cirkel gehet eine jede Linie, die auf der Peripherie perpendiculair stehet, durch den Mittelpunkt.

§. 39.

Sechster Zusatz. Man siehet also, daß eine jede Linie MG, die von einem Berührungspunkt M nach dem Mittelpunkt G der Ellypse gezogen wird, mit der Tangente einen schiefen Winkel GMO mache. (Man setzt voraus, daß der Berührungspunkt keiner von den Endpunkten der Axen sey) und daß der Winkel FMf durch die Perpendiculairlinie Md in 2 gleiche Theile getheilet werde.

§. 40.

Wenn hingegen der Winkel FMf durch die Linie Md in 2 gleiche Theile getheilet ist, so behaupte ich

1) daß diese Linie auf der Tangente OS an dem Berührungspunkt M perpendiculair stehe.

2) Daß diese nemliche Linie OS, die an das äusserste Ende

de dieser Linie Md perpendiculair gezogen ist, nothwendig eine Tangente der Ellypse an dem Punkt M sey.

Beweis. 1) $dMF = dMf$ (Beding.) und $FMO = fMS$ (§. 35.) folglich ist $dMO = dMS$: folglich ist Md perpendiculair auf OS

2) Weil der Winkel $dMO = dMF + FMO = dMf + fMS$ und weil $dMF = dMf$ (Beding.) so ist $FMO = fMS = PMO$ als einem Verticalwinkel. Folglich ist $FMO = PMO$. Wenn man deswegen $MP = MF$ macht, und die Linie PF ziehet, so ist der Winkel $MPL = MFL$ und der Winkel $MLP = MLF$; das heißt, OS ist gegen die Basis PF des gleichschenklichten Triangels PMF perpendiculair, folglich gehet sie durch die Mitte dieser Grundlinie; folglich ist sie eine Tangente an dem Punkt M. (§. 34.)

* §. 41.

Siebender Zusatz. Lasset uns nach Gefallen eine Linie DM mit der grossen Axe AB einer Ellypse parallel ziehen (Fig. K.), und aus dem Punkt, wo sie diese krumme Linie berührt, lasset uns nach den Brennpunkten F und f, die Linien MF und Mf ziehen. Lasset uns den Winkel FMf durch die unbestimmte Linie LH in 2 gleiche Theile theilen, so wird sie alsdenn auf der Tangente CME, die an dem Punkt M gezogen ist, perpendiculair stehen. (§. 40.) Lasset uns $MD = Mf$ machen. Wenn man nun aus den Punkten D und f die Perpendiculairlinie DL und fH auf LH ziehet, so verhalten sich diese zu einander, wie die grosse Axe zur Entfernung der beyden Brennpunkte von einander, das heißt, $DL : fH = AB : Ff$.

Beweis. Vermöge der Bedingung ist DM mit AT parallel, und also der Winkel $DML = ATM$. Wenn man

nun

nun die Perpendiculairlinie MP fallen läßt, so sind die rechtwinklichten Triangel DLM und MPT sich ähnlich. Folglich verhält sich DL : MP = MD oder Mf : MT. Ziehet man nun aber die Linie TS auf Mf perpendiculair, so sind die rechtwinklichten Triangel fHM uud MST, die den Winkel fMH mit einander gemein haben, sich ähnlich; folglich verhalten sich Mf : MT = fH : TS; folglich DL : MP = fH : TS oder DL : fH = MP : TS = fM : fT. (*) Wenn man aber fM so lange verlängert, bis MO = MF wird, und alsdenn OF ziehet, die gegen die Tangente CE perpendiculair (Bew. §. 34.) und folglich parallel mit MT oder LH seyn wird, die auch auf der nemlichen Linie CE perpendiculair stehet, (Constr. Geometr.) so bekommt man das Verhältniß fM : fT = fO : Ff; folglich DL : fH = fO : Ff = fM + MF : Ff. (weil fO = fM + MF) = AB : Ff. (Denn fM + MF = AB (§. 33.); folglich DL : fH = AB : Ff. W. z. E. W.

Wenn man im umgekehrten Falle die Linie fH auf die Linie LMH perpendiculair ziehet, die einen Winkel FMf, der durch 2 Linien MF und Mf, die von dem nemlichen Punkt einer Ellypse nach ihren beyden Brennpuncten F und f gezogen sind, gemacht wird, in 2 gleiche Theile theilet, und wenn man hernach eine 4te Proportional-Linie zu den 3 Linien Ff, AB und fH sucht, und an dem Punkt M auf der verlängerten Linie HM einen rechtwinklichten Triangel MDL construirt, dessen Hypothenuse = Mf oder DM, und worinn die eine von den beyden andern Seiten = DL ist, so wird alsdenn DM mit AB parallel seyn.

Be-

(*) Denn in den beyden Triangeln fPM und fST ist 1) der rechte Winkel bey S und P in beyden sich gleich 2) der Winkel TfS = PfM. Folglich sind diese beyden Triangel sich ähnlich; Folglich verhält sich MP : TS = fM : fT. Es verhielte sich aber auch DL : fH = MP : TS : Folglich ist auch DL : fH = fM : fT. W.

Beweis. Es verhält sich, vermöge der Construction, DL : fH = AB : Ff = fO : fF (weil fO = AB Constr. und §. 35.) = fM : fT, (weil MT mit OF, vermöge der Construction, parallel ist) = DM : fT, (weil DM = fM nach der Construction.) Folglich ist DL : fH = DM : fT oder DL : DM = fH : fT. Folglich sind die rechtwinklichten Triangel DLM und fHT sich ähnlich. (Geometr.) Folglich ist der Winkel DML = fTH = ATM. Folglich haben die 2 Linien DM und AT oder AB eine gleiche Neigung gegen die nämliche Linie LH; Folglich sind sie unter einander parallel. W. z. E. W.

Man muß sich bemühen, diesen Zusatz nebst dem umgekehrten Satz von ihm wohl zu verstehen. Wir werden ihn in der Dioptrik gebrauchen.

* §. 42.

Achter Zusatz. Eine jede Tangente OS (Fig. 49.) an irgend einem Punkt M der Ellypse, die von den Endpunkten der Axen unterschieden ist, hat nothwendig eine Neigung in irgend einem Punkt O mit der verlängerten grossen Axe zusammen zu stossen. Denn wäre OS mit der grossen Axe AB parallel, so würde der Winkel FfM = LMP = LMF (Constr.) = MfF, als Wechselwinkel, seyn; Folglich würde der Winkel FfM dem Winkel MFf gleich seyn; Folglich Mf = MF, welches unmöglich ist; Folglich ist die Tangente OS nicht mit der grossen Axe AB parallel; Folglich stößt sie mit derselben würklich in einem Punkt O zusammen, oder hat wenigstens eine Neigung dazu.

* §. 43.

Neunter Zusatz. Die Distanz FA des einen Brennpunkts F von dem nächsten Endpunkt A der grossen Axe, ist grösser als der 4te Theil des Parameters der Hauptaxe AB der Ellypse.

Denn

Denn es ist $FA = AG - FG = a - c$ und der Parameter $p = \frac{2bb}{a}$ (§. 28.) Folglich $\frac{p}{4} = \frac{2bb}{4a} = \frac{bb}{2a}$. Nun verhält sich aber $a - c$ (FA) : $\frac{bb}{2a} = 2aa - 2ac : bb$, (wenn man nämlich die 2 ersten Glieder dieses Verhältnisses mit $2a$ multiplicirt, und wenn man ferner nach der Note zum §. 33 an die Stelle von bb, $aa - cc$ setzet) wie $2aa - 2ac : aa - cc$; und wenn man die beyden lezten Glieder durch $a - c$ dividirt, wie $2a : a + c$ Folglich verhält sich FA : $\frac{bb}{2a}$ oder $\frac{p}{4} = 2a : a + c = AB : BF$. Es ist aber $AB >$ BF; Folglich auch $FA > \frac{p}{4}$ (*).

§. 44.

Zehnter Zusatz. Die Ordinate FN (Fig. 48) an einem von den Brennpunkten der Ellypse, ist so groß, als $\frac{p}{2}$ oder als die Helfte des Parameters der grossen Axe AB.

Beweis. Nach dem fünften Hauptsatz (§. 12) ist $AF = AG - FG = a - c$ und $FB = a + c$: Folglich ist $AF \times FB = (a - c)(a + c) = aa - cc = bb$ (Anmerk. zum §. 33): Folglich verhält sich $\overline{FN}^2 (yy) : AF \times FB (bb) = \overline{CG}^2 (bb) : \overline{AG}^2 (aa)$ (§. 12.) Folglich ist $\overline{FN}^2$ oder $yy = \frac{b^4}{aa}$; Folglich $FN = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$ (§. 28). W. z. E. W.

S *§. 45.

(*) Man sehe den §. 37. I. allwo dieser nämliche Satz schon einmal auf eine etwas veränderte Art bewiesen worden ist. B.

* §. 45.

Siebender Hauptsatz. Wenn man in der 50ten Figur an dem Berührungspunkt M eine Linie Md annimmt, die gegen die Tangente OM perpendiculair ist, und die Ordinate MP an die Axe AB ziehet, so ist der halbe Unterschied der Linien FM und fM, die aus den Brennpunkten an diesen Punkt M gezogen worden $= \frac{cx}{a}$.

Beweis. Nach dem 6ten Hauptsatze (§ 33) war $2a = f\text{M} + \text{FM}$; Wenn man nun den Unterschied zwischen diesen 2 Linien $2d$ nennet, so wird der halbe Unterschied $= d$ seyn; Folglich ist FM $= a + d$ und FM $= a - d$ (*); Folglich

(*) Es ist $f\text{M} + \text{FM}$ eine Summe und nach der Figur fM grösser als FM; Folglich ist auch zwischen ihnen eine Differenz denkbar. Nun ist die ganze Summe $f\text{M} + \text{FM} = 2a$; Folglich die halbe Summe $= a$. Ist die ganze Differenz $= 2d$, so ist die halbe Differenz $= d$ Es will also der Ausdruck im Texte $f\text{M} = a + d$ und $\text{FM} = a - d$ so viel sagen: Man bekommt die größte von 2 Grössen, die zusammen eine Summe ausmachen, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt und man bekommt die kleinste von diesen Grössen, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt. Daß aber dieses richtig sey, kann man folgendermassen erkennen. Es sey die größte Grösse $= \text{Q}$ und die kleinste $= q$. Die Summe derselben $= \text{S}$ und und ihre Differenz $= \text{D}$; so entstehet ohne Zweifel die Summe, wenn ich die beyden Grössen Q und q. addire: Folglich ist $\text{Q} + q = \text{S}$. Die Differenz aber entstehet, wenn von Q die kleinere abgezogen wird; Folglich ist $\text{Q} - q = \text{D}$. Es ist also

$$\begin{array}{l} \text{Q} + q = \text{S} \\ \text{Q} - q = \text{D} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Folglich } 2\,\text{Q} = \text{S} + \text{D}$$

$$\text{Folglich } \text{Q} = \frac{\text{S} + \text{D}}{2} = \tfrac{1}{2}\text{S} + \tfrac{1}{2}\text{D}$$

Eben

lich $\overline{fM}^2 = aa + 2ad + dd$ und $\overline{FM}^2 = aa - 2ad + dd$; Ferner ist $FP = FG - GP = c - x$ und $Pf = Gf + GP = c + x$; Folglich $\overline{FP}^2 = cc - 2cx + xx$ und $\overline{Pf}^2 = cc + 2cx + xx$: Nach dieser Voraussetzung kann bewiesen werden, daß $d = \frac{cx}{a}$.

Vermöge des rechtwinklichten Triangels FMP ist $\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2$ oder $aa - 2ad + dd = cc - 2cx + xx + yy$ (A) Eben so erhalten wir durch den rechtwinklichten Triangel fPM folgende Gleichung: $\overline{fM}^2 = \overline{Pf}^2 + \overline{PM}^2 = aa + 2ad + dd = cc + 2cx + xx + yy$ (B). Ziehen wie diese 2 Gleichungen A und B gehörig von einander ab, so ist $4ad = 4cx$; Folglich $d = \frac{cx}{a}$. W. z. E. W.

* §. 46.

Achter Hauptsatz. Machet man die Verlängerung $MV = FM$, so ist FM oder $MV = \frac{aa - cx}{a}$.

Beweis. Weil nach dem Beweise des §. 45 FM oder $MV = a - d$ und weil $d = \frac{cx}{a}$ (§. 45), so ist $FM = MV = a - \frac{cx}{a} = \frac{aa - cx}{a}$. W. z. E. W.

Eben so: $Q + q = S$
$Q - q = D$

Folglich $2q = S - D$

$q = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D$.

Diese Ausdrücke beweisen die Richtigkeit der Benennung des Herrn Autors. B.

* §. 47.

Neunter Hauptsatz. Die Entfernung Fd des Brennpunkts F von dem Punkt d, wo die Perpendiculairlinie Md auf die Tangente der Axe stößt, ist $= \frac{a^2c - c^2x}{aa}$.

Beweis. Nachdem man FV, welche Linie nothwendig auf OM perpendiculair stehet (Beweis §. 34), gezogen hat, so werden die Triangel fMd und fVF sich ähnlich seyn; Folglich verhält sich fV : fF = MV oder FM : fd. Es ist aber $f\text{V} = f\text{M} + \text{FM} = 2a$ (§. 33); $f\text{F} = 2c$ und MV oder FM $= \frac{aa - cx}{a}$ (§. 46). Folglich, wenn man diese analytischen Werthe in der vorhergehenden Proportion setzet; so verhält sich $2a : 2c = \frac{aa - cx}{a} : \text{F}d$. Folglich ist $\text{F}d = \frac{a^2c - c^2x}{aa}$. W. z. E. W.

* §. 48.

Zehnter Hauptsatz. Man behalte immer die obige Construction, so ist der Ausdruck für die Subtangente Pd dieser: Nämlich es ist $\text{P}d = \frac{bbx}{aa}$.

Beweis. Man weiß, daß $\text{FP} = \text{FG} - \text{GP} = c - x$ und $\text{F}d = \frac{a^2c - c^2x}{aa}$ (§. 47). Nun ist $\text{P}d = \text{F}d - \text{FP} = \frac{a^2 - c^2x}{aa} - c + x$, und wenn man alles unter einerley Benennung bringt, und was sich aufheben läßt, wegnimmt $= \frac{aax - ccx}{aa}$; Folglich ist $\text{P}d = \frac{a^2x - c^2x}{ca}$. Es ist aber $a^2 - c^2 = bb$. Folglich ist $\text{P}d = \frac{bbx}{aa}$. W. z. E. W.

* §. 49.

* §. 49.

Zusatz. Hieraus folgt, daß GP : Pd $= 2a : p$. Denn weil GP $= x$ und P$d = \frac{bbx}{aa}$ (§. 48), so verhält sich auch GP : P$d = x : \frac{bbx}{aa} = aax : bbx$ $= aa : bb = 2a : p$. (Bew. §. 28); Folglich GP : Pd $= 2a : p$. W. z. E. W.

* §. 50.

Eilfter Hauptsatz. Es ist die Subtangente PO $= \frac{aa - xx}{x}$.

Beweis. Weil der Triangel OMd bey M rechtwinklicht und weil MP auf Od perpendiculair ist, so verhält sich Pd : PM $=$ PM : PO (Geometr.) Nun ist P$d = \frac{bbx}{aa}$ (§. 48) und PM $= y$. Folglich $\frac{bbx}{aa} : y = y :$ PO $=$ $\frac{aayy}{bbx}$. Allein $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (§. 17) Folglich ist PO $= \frac{aa\ (aabb - bbxx)}{(aa)\ (bbx)} = \frac{aa - xx}{x}$. W. z. E. W.

*§. 51.

Ein anderer Beweis, der aus der allgemeinen Methode, die Tangenten der krummen Linien zu ziehen, die im §. 28. 29. der Parabel erklärt ist, gefolgert ist.

Wenn wir den Faden der Wahrheiten, die wir eben vestgesetzt haben hätten, zerreissen wollen, so hätten wir gleich anfangs und unmittelbar nach dem 4ten Hauptsatze (§. 10) den Werth der Subtangente PO $= \frac{aa - xx}{x}$ finden können, wie wir sogleich zeigen werden (§. 50).

Gesetzt also, man wolle an dem Punkt N der Ellypse eine Tangente ziehen, so ist offenbar, daß sie irgend in einem Punkt O die verlängerte Axe berühren müsse (§ 42) Indem man folglich die Ordinate NP ziehet, so ist es klar, wenn man in dem rechtwinklichten Triangel NOP das Verhältniß der Subtangente PO gegen eine bekannte Grösse bestimmen könnte, daß man die Tangente ON habe.

Lasset uns deswegen annehmen, daß ON eine Sekante sey, daß heißt, daß sie die krumme Linie in 2 Punkten N und Q durchschneide, und daß man 2) die Ordinate QT gezogen habe. Es sey ferner $AG = a$; $GP = x$; $PT = r$; $GT = GP - PT = x - r$; $AP = a - x$; $PB = a + x$; Folglich ist $AP \times PB = aa - xx$; $AT = AG - GP + PT = a - x + r$. $TB = PG + GB - PT = a + x - r$; Folglich $AT \times TB = (a - x + r)(a + x - r) = aa - xx + 2rx - rr$; $PO = s$; $OT = PO + PT = s + r$; Folglich $\overline{PO}^2 = ss$ und $\overline{OT}^2 = ss + 2rs + rr$.

Lasset uns itzt bemerken, daß nach dem 4ten Hauptsatz (§. 10) folgendes Verhältniß statt habe: $\overline{QT}^2 : \overline{PN}^2 = AT \times TB : AP \times PB$ und wegen der ähnlichen Triangel OTQ und OPN verhält sich $\overline{QT}^2 : \overline{PN}^2 = \overline{OT}^2 : \overline{PO}^2$. Folglich ist $AT \times TB : AP \times PB = \overline{OT}^2 : \overline{PO}^2$. Das ist, wenn man für die Glieder dieser Proportion die analytischen Grössen setzt: $aa - xx + 2rx - rr : aa - xx = ss + 2rs + rr : ss$. Wenn man folglich das 2te Glied vom ersten und das 4te vom 3ten abzieht, so verhält sich $2rx - rr : aa - xx = 2rs + rr : ss$; Wenn man folglich die Producte aus den mittelsten und äussersten Gliedern macht, so ist $2rs^2x - r^2s^2 = 2a^2rs - 2rsx^2 + a^2r^2 - r^2x^2$, oder wenn man durch r dividirt, so ist $2ssx - rss = 2a^2s - 2sx^2$

+

$+a^2r - rx^2$ (B). Dieses ist die Gleichung, worauf man kommt, wenn die Linie ONQ eine Sekante ist. Allein, wenn man sich einbildet, daß sie sich um den Punkt O drehe, bis die Punkte N und Q zusammen fallen, welches geschiehet, wenn sie die Tangente wird, so wird QT alsdenn NP werden und die Differenz PI der Abscissen wird o werden. Folglich ist alsdenn $r = o$. Dadurch werden alle Glieder in der Gleichung B in welchen r sich findet, wegfallen. Folglich wird diese Gleichung folgende werden: $2ssx = 2aas - 2ssx$. Wenn man folglich mit $2s$ dividirt, so ist $sx = aa - xx$ und folglich s oder $PO = \frac{aa - xx}{x}$, wie im §. 50.

* §. 52.

Erster Zusatz. Folglich ist $PO \times x = aa - xx = (a - x)(a + x)$. Folglich verhält sich $x : a - x = a + x$: PO oder GP ; AP = BP : PO. In dieser Proportion sind die 3 ersten Glieder gegeben, wenn man den Punkt N und die Axe AB kennet. Diese determinirt PO und folglich auch ON.

* §. 53.

Es sey hingegen der Punkt N und die Axe AB einer Ellypse gegeben, und man setze das Verhältniß an: GP : AP = BP zu einem 4ten Gliede. Dieses Glied trage man von P in O um ON zu ziehen. Nun behaupte ich, daß diese Linie ON die Tangente in dem Punkt N seyn werde.

Denn wäre sie die Tangente nicht, so würde man an den Punkt N eine andere Tangente NS ziehen können, welche oberhalb oder unterhalb ON fiele, und man würde alsdenn folgendes Verhältniß haben: GP : AP = BP : PS (§. 52; weil in diesem Falle PS die Subtangente seyn würde. Es verhält sich aber vermöge der Bedingung GP : AP = BP :

BP : PO; Folglich wäre PS = PO, welches unmöglich ist.

Man hat also durch diese Umkehrung des vorigen Satzes ein 2tes Mittel, an einen gegebenen Punkt einer Ellypse eine Tangente zu ziehen, ohne seine Zuflucht zum §. 34 zu nehmen.

* §. 54.

Zweyter Zusatz. Wenn man noch $GP = x$ zu $PO = \frac{aa - xx}{x}$ addirt (§. 50. 51), so ist $GP + PO = x + \frac{aa - xx}{x} = \frac{xx + aa - xx}{x} = \frac{aa}{x}$. Folglich ist $GO = \frac{aa}{x}$ oder $GO \times x = a \times a$ oder $GO \times GP = GA \times GA$. Folglich verhält sich $GP ; GA = GA : GO$. Dieses ist ein drittes Mittel die Tangente ON zu bekommen.

* §. 55.

Dritter Zusatz. Wenn man $GA = a$ von $GO = \frac{aa}{x}$ abziehet (§. 54) so ist $GO - GA = \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x} = AO$. Folglich $AO \times x = aa - ax = (a - x)\,a$ oder $AO \times GP = AP \times GA$. Folglich verhält sich $GP : AP = GA : AO$: Ein 4tes Mittel eine Tangente an den Punkt N zu ziehen.

* §. 56.

Vierter Zusatz. Lasset uns die kleine Axe DC verlängern, bis sie mit der Tangente OM in R zusammen stößt, und lasset uns die Ordinate ML dieser Axe ziehen, so wird der Ausdruck für die Subtangente LR folgender seyn: $LR = \frac{bb - yy}{y}$.

Beweis. Es ist $GL = PM = y$ und wegen der ähnlichen

lichen Triangel OGR und OPM verhält sich GR : PM = GO : OP Es ist aber $GO = \frac{aa}{x}$ (§ 54) und $OP = \frac{aa-xx}{x}$ (§. 50. 51); Folglich wird aus der vorigen Proportion folgende: $GR : y = \frac{aa}{x} : \frac{aa-xx}{x}$; Folglich ist $GR = \frac{aay}{aa-xx}$; Folglich ist $LR = GR - GL = \frac{aay}{aa-xx} - y = \frac{aay - aay + yxx}{aa-xx}$; Folglich ist $LR = \frac{yxx}{aa-xx}$ (A); Es ist aber $xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$ (§. 16). Wenn man daher den Werth von xx in der Gleichung A setzet, so wird daraus

$$LR = \frac{\frac{aabby - aay^3}{bb}}{aa - \frac{aabb + aayy}{bb}} = \frac{\frac{aabby - aay^3}{bb}}{\frac{aabb - aabb + aayy}{bb}}$$

$= \frac{aabby - aay^3}{aayy} = \frac{bb - yy}{y}$, wenn man durch aay dividiret: Folglich ist $LR = \frac{bb-yy}{y}$. W. z. E. W.

* §. 57.

Fünfter Zusatz. Weil $LR = \frac{bb-yy}{y}$, so ist $LR \times y = bb - yy$ $(b+y)(b-y)$; folglich verhält sich $y : b+y = b-y : LR$ oder $GL : DL = LC : LR$. Wenn folglich der Punkt M und die kleine Axe gegeben sind, und man ziehet die Ordinate ML, so ist die Subtangente LR bestimmt, und folglich auch die Tangente MR.

* §. 58.

Sechster Zusatz. Wenn man $y = GL$ zu der Grös-

se $\frac{bb-yy}{y}$ addirt, so ist LR + GL $= \frac{bb-yy}{y} + y =$ $\frac{bb-yy+yy}{y} = \frac{bb}{y}$; Folglich ist LR + GL, das heißt, GR $= \frac{bb}{y}$ oder GR $\times y = bb$. Daraus ziehet man das Verhält- niß $y : b = b$: GR oder GL : GC = GC : GR Die- ses giebt ein Mittel GR und folglich die Tangente MR zu be- kommen.

*§. 59.

Siebender Zusatz. Wenn man $b =$ GC von $\frac{bb}{y} =$ GR subtrahirt, so ist GR — GC $= \frac{bb}{y} - b = \frac{bb-by}{y}$; Folg- lich ist GR — GC, das heißt, CR $= \frac{bb-by}{y}$ oder CR $\times$ $y = bb - by = (b-y)\,b$. Folglich $y : b = b - y$: CR oder GL : GC = LC : CR. Dieses ist ein neues Mittel die Tangente MR zu bekommen.

§. 60.

Anmerkung. Alle diese Zusätze beweisen, daß man sich der grossen oder kleinen Axe bedienen könne, um an irgend einen Punkt, der von dem Endpunkt der Axe unterschieden ist, eine Tangente zu ziehen. Denn es ist leicht, das Umge- kehrte aller dieser Sätze als wahr zu beweisen, so wie man es im §. 53 gethan hat.

§. 61.

Achter Zusatz. (*a*) An den Endpunkten der grossen Axe

(*a*) Man kann die folgenden §. von 61 — 66 vorbeyschlagen, doch

Axe AB (Fig. 51) lasset uns die Perpendiculairlinien BQ und AS aufrichten, die in den Punkten Q und S durch die Tangente OS an dem Punkt M determinirt sind, so wird das Product aus diesen Perpendiculairlinien dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich seyn, das heißt, $BQ \times AS = \overline{CG}^2$.

Beweis. Man ziehe die Ordinate $PM = y$ und es sey immer $AG = GB = a$; $GP = x$; $OP = \frac{aa - xx}{x}$ (§. 50. 51); So ist $OB = OP + GP - GB = \frac{aa - xx}{x} + x - a$, und wenn man alles unter einerley Benennung bringt, und was sich aufhebt, wegläßt, $= \frac{aa - ax}{x}$; Folglich ist $OB = \frac{aa - ax}{x}$. Eben so ist $OA = BA + OB = 2a + \frac{aa - ax}{x} = \frac{2ax + aa - ax}{x} = \frac{ax + aa}{x}$; Folglich ist $OA = \frac{ax + aa}{x}$. Dieses sey voraus gesezt.

Durch die ähnlichen Triangel OPM, und OBQ bekommen wir folgendes Verhältniß: $OP : PM = OB : BQ$, oder wenn wir die analytischen Ausdrücke substituiren, $\frac{aa - xx}{x} : y = \frac{aa - ax}{x} : BQ$. Wenn wir folglich das 1ste und 3te Glied durch $\frac{a - x}{x}$ dividiren, und darauf das 3te Glied zum 2ten machen, so verhält sich $a + x : a = y : BQ$

doch sind die Zusätze von einem sehr grossen Nutzen in der physischen Astronomie; vornämlich zum Verstande des Buchs des Herrn Sigorgne. Und man findet sie nirgends mit einer gehörigen Ausführlichkeit bewiesen. Ich habe mir in diesem Betracht Mühe gegeben, nichts auszulassen, welches Anfänger aufhalten könnte.

BQ (M): Gleichermassen geben die ähnlichen Triangel OPM und OAS folgendes Verhältniß: OP : PM = OA : AS oder $\frac{aa - xx}{x} : y = \frac{ax + aa}{x} : AS$. Wenn wir folglich das erste und dritte Glied durch $\frac{a + x}{x}$ dividiren und alsdenn das 3te Glied zum 2ten machen, so verhält sich $a - x : a = y : AS$ (N): wenn wir folglich die Glieder dieser beyden Verhältnisse M und N der Ordnung nach durch einander multipliciren, so verhält sich $aa - xx : aa = yy : BQ \times AS = \frac{aayy}{aa - xx}$ (T) Es ist aber $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (§. 17); wenn man folglich in der Gleichung T diesen Werth von yy substituirt, so findet man, daß $BQ \times AS = \frac{aa \times (aa - xx) \times bb}{aa\,(aa - xx)} = bb$ sey, das heißt: $BQ \times AS = \overline{CG}^2$. W. z. E. W.

§. 62.

Neunter Zusatz. Wenn man aus den Brennpunkten F und f die Perpendiculairlinien FH und fh auf eine Tangente der Ellypse an einem Punkt M, der von den Endpunkten der Axen verschieden ist, ziehet, so wird das Product aus diesen Perpendiculairlinien dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich seyn, oder $fh \times FH = \overline{OG}^2$.

Beweis. Man behalte die nämliche Benennung wie oben. Man nenne $Gf = GF = c$ und ziehe $FC = a$ (§. 33), damit $cc = aa - bb$, so ist $Of = OP + GP - Gf = \frac{aa - xx}{x} + x - c = \frac{aa - cx}{x}$; folglich ist $Of = \frac{aa - cx}{x}$ und $OF = OP + GP + GF = \frac{aa - xx}{x} + x + c = \frac{aa + cx}{x}$;

Folglich

Folglich ist $OF = \frac{aa + cx}{x}$ Man hat auch gesehen, (§. 61) daß $OB = \frac{aa - ax}{x}$ und daß $OA = \frac{aa + ax}{x}$.

Itzt merke man, daß die ähnlichen rechtwinklichten Triangel Ohf und OBQ folgendes Verhältniß geben: $Of : OQ = fh : BQ$ (S); Eben so, daß die ähnlichen Rechtwinklichten Triangel OHF und OAS dieses Verhältniß geben $OF : OS = FH : AS$ (T); Wenn man also die Glieder dieser Verhältnisse T und S der Ordnung nach durch einander multiplicirt, so verhält sich $Of \times OF : OQ \times OS = fh \times FH : BQ \times AS$ (K). Wenn man folglich beweiset, daß $Of \times OF = OQ \times OS$, so wird auch bewiesen seyn, daß $fh \times FH = BQ \times AS$ und folglich $= \overline{CG}^2$ sey. (§. 61).

I. Man hat gesehen, daß $Of = \frac{aa - cx}{x}$ und $OF = \frac{aa + cx}{x}$; Folglich $Of \times OF = \frac{(aa - cx)}{x} \times \frac{(aa + cx)}{x} = \frac{a^4 - c^2x^2}{xx}$ und wenn man $aa - bb$ an der Stelle von cc setzet $= \frac{a^4 - aaxx + bbxx}{xx}$; Folglich ist $Of \times OF = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{xx}$.

II. Lasset uns itzt die analytischen Werthe von OQ und OS suchen und lasset uns deswegen gleich anfangs bemerken, daß wegen des rechtwinklichten Triangels OPM, $\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \frac{(aa - xx)^2}{x^2} + yy$; Folglich $OM =$



$\sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}+y^2\right)}$ Wenn man nun die ähnlichen Triangel OPM und QBQ betrachtet, so bekommen wir folgendes Verhältniß : OP : OM = OB : OQ oder wenn man die analytischen Werthe substituirt, $\frac{aa-xx}{x^2} : \sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}+y^2\right)} = \frac{aa-xx}{x^2}$: OQ Wenn man folglich das erste und dritte Glied durch $\frac{a-x}{x}$ dividirt, und alsdenn das 2te Glied zum 3ten, und das dritte zum zweyten macht, so verhält sich $a + x : a = \sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}+y^2\right)}$: OQ. (G)

Eben so geben die ähnlichen Triangel OPM und OAS folgendes Verhältniß: OP: OM = OA : OS oder $\frac{aa-xx}{x}$: $\sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}\right)+y^2} = \frac{aa+ax}{x}$: OS. Wenn man folglich das erste und dritte Glied durch $\frac{a+x}{x}$ dividirt und das 2te und 3te Glied mit einander verwechselt, so verhält sich $a - x : a = \sqrt{\left(\frac{(aa-xx)^2}{x^2}+yy\right)}$: OS. (L). Wenn man folglich die einzelnen Glieder der Verhältnisse G und L der Ordnung nach durch einander multiplicirt, so verhält sich $aa-xx : aa = \frac{(aa-xx)^2}{xx} + yy : OQ \times OS =$

$$\frac{\frac{(aa-xx)\;(aa-xx)\;(aa)}{xx}}{aa-xx} + \frac{aayy}{a^2-xx} \quad (T)$$

Nun ist aber $yy = \frac{aabb-bbxx}{aa}$ (§. 17.) $= (aa-xx)\,\frac{bb}{aa}$

Wenn

Wenn man folglich in der Gleichung $T\,(aa - xx)\,\frac{bb}{aa}$ an der Stelle von yy setzet, so ist $OQ \times OS =$

$$\frac{\frac{(aa-xx)\,(aa-xx)\,(aa)}{xx}}{aa-xx} + \frac{aa\,(aa-xx) \times \frac{bb}{aa}}{aa-xx}$$

$$= \frac{(aa-xx)\,aa}{xx} + bb = \frac{a^4 - (a^2x^2) + (b^2x^2)}{xx};$$

Folglich ist $OQ \times OS = \frac{a^4 - (a^2x^2) + (b^2x^2)}{xx} = Of \times QF$ (N°. I. dieses §.). Wenn man folglich das Verhältniß K wieder vornimmt, so ist $fh \times FH = BQ \times AS = \overline{CG}^2$ (§. 61). W. z. E. W.

§. 63.

Zehenter Zusatz. Lasset uns an 2 Punkten M und T einer Ellypse (Fig 52) 2 Tangenten Hh und QR ziehen, und aus einerley Brennpunkt F 2 Perpendiculairlinien FH und FR auf diesen Tangenten anrichten. Nun behaupte ich, daß diese Perpendiculairlinien gegen einander in dem Verhältniß der Quadratwurzeln aus den Trägern FM und FT wachsen, die von dem Brennpunkt F an die Brennpunkte M und T gezogen sind, das heißt, daß FH im Verhältniß gegen FR kleiner sey, als $\sqrt{(FM)}$ gegen $\sqrt{(FT)}$ Es muß folglich bewiesen werden, daß $\frac{FH}{FR} < \frac{\sqrt{FM}}{FM}$.

Beweis. Lasset uns von dem andern Brennpunkt f die Linie fh auf Hh und fQ auf QR perpendiculair ziehen. Darauf lasset uns bemerken, daß die Rechtwinklichten Triangel FHM und fhM sich ähnlich sind. Denn es ist der Winkel $FMH = fMh$ (§. 35); Folglich verhält sich $FM : FH = fM : fh$; Folglich ist $fh = \frac{FH \times fM}{FM}$; Folglich $fh \times$

FH

$FH = \frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM}$. Nun ist aber $fh \times FH = \overline{CG}^2$ (§. 62); Daher ist $\frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM} = \overline{CG}^2$; und folglich $\overline{FH}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$.

Man siehet eben so, da die rechtwinklichten Triangel FRT und fQT sich ähnlich sind, weil der Winkel $FTR = fTQ$ (§. 35), daß auch folgendes Verhältniß statt habe $FT : FR = fT : fQ = \frac{FR \times fT}{FT}$; Folglich $\frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT} = fQ \times FR = \overline{CG}^2$ (§. 62); Folglich $\overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT}$, und also verhält sich $\overline{FH}^2 : \overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM} : \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT} = \frac{FM}{fM} : \frac{FT}{fT}$; Folglich ist $\frac{\overline{FH}^2}{FR} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$. Allein $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} < \frac{FM}{FT}$ Denn es verhält sich $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} : \frac{FM}{FT} = \frac{fT}{fM} : 1$. (wenn man die 2 ersten Glieder durch $\left(\frac{FM}{FT}\right)$ dividiret) $= fT : fM$. Nun ist aber $fT < fM$; Folglich auch $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} < \frac{FM}{FT}$; Folglich ist $\frac{\overline{FH}^2}{FR^2} < \frac{FM}{FT}$ und wenn man die Quadratwurze ausziehet $\frac{FH}{FR} < \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$. W. z. E. W.

* §. 64.

Zweyter Zusatz. Wenn man nach dem Zusatz des ersten

ersten Hauptsatzes der Newtonischen Principien annimmt, daß die Geschwindigkeit eines Planeten in M, welcher sich in einer elliptischen Laufbahn BMCA um den Brennpunkt F bewegt (Fig. 51), sich zur Geschwindigkeit in C, wo die mittlere Entfernung von dem Brennpunkte ist, verhalte, (*a*) wie die Perpendiculairlinie FT die von diesem Brennpunkt auf die Tangente an dem Punkt C gezogen ist, zur Perpendiculairlinie FH, die von dem nämlichen Brennpunkt auf die Tangente an M gezogen ist, so behaupte ich, daß sich die Geschwindigkeit in M zur Geschwindigkeit in C verhalte, wie die Quadratwurzel aus der Distanz fM des Planeten von dem andern Brennpunkt f zur Quadratwurzel aus der Distanz FM von dem Hauptbrennpunkt F.

Beweis. Es sey c die Geschwindigkeit des Planeten in dem Punkt M und C seine Geschwindigkeit in C; so ist zu beweisen, daß $c : C = \sqrt{fM} : \sqrt{FM}$ Nun verhalten sich aber nach der Bedingung $c : C = FT$ oder $CG : FH$ Folglich ist $c^2 : \overline{C}^2 = \overline{CG}^2 : \overline{FH}^2$. Es ist aber $\overline{CG}^2 = fh \times FH$ (§. 62) Folglich verhält sich $c^2 : C^2 = fh \times FH : \overline{FH}^2$ Allein es sind die rechtwinklichten Triangel fhM

T und

(*a*) Es ist FC die mittlere Entfernung des Planeten von dem Brennpunkt F, weil FC die mittlere arithmetische Proportionallinie zwischen der größten Entfernung FB und der kleinsten FA ist. Denn $FC = GA$ (§. 33) Nun verhält sich $FB - GB$ oder $GA = GA - FA$ (*). Folglich $FB - FC = FC - FA$.

(*) Um die Richtigkeit dieses Verhältnisses deutlich einzusehen, sey $AG = GB = FC = a$, und FG, als die Abscisse, $= x$; so ist $AF = a - x$. Es ist also das obige Verhältniß analytisch ausgedrückt folgendes $(a + x) - a = a - (a - x)$. Daß aber dieses würklich ein arithmetisches Verhältniß sey, davon kann man sich überzeugen, wenn man die Summen aus den beyden äussersten und innersten Gliedern macht; diese werden sich gleich seyn; denn es ist $(a + x) + (a - x) = 2a$. B.

und FHM sich ähnlich, weil der Winkel $fMh = FMH$ (§. 35) Folglich verhält sich $fh : FH = fM : FM$, und folglich $c^2 : C^2 = fM : FM$. Hieraus ziehet man den Schluß, daß $c : C = \sqrt{fM} : \sqrt{FM}$. W. z. E. W.

§. 65.

Zwölfter Zusatz. Es verhält sich der Radius Vector FM zum Sinus des Winkels $FMH = \sqrt{(FM \times fM)} : CG$.

Beweis. Denn, wenn man FM für den Sinus Totus oder für den Radius des Bogens, der den Winkel FMH misset, annimmt, so ist klar, daß FH der Sinus des Winkels FMH sey. Folglich ist zu beweisen, daß $FM : FH = \sqrt{(FM \times fM)} : CG$. Nun verhält sich aber $FM \times FM : FM \times fM = FM : fM = FH : fh$ (denn die rechtwinklichten Triangel FHM und fhM sind sich ähnlich) $= FH \times FH : fh \times FH$. Folglich $FM \times FM : FM \times fM = FH \times FH : fh \times FH$. Es ist aber $fh \times FH = \overline{CG}^2$ (§. 62) Folglich $FM \times FM : FM \times fM = FH \times FH : \overline{CG}^2$. Wenn man folglich die Quadratwurzel auszieht und das 2te und 3te Glied mit einander verwechselt, so verhält sich $FM : FH = \sqrt{(FM \times FM)} : CG$. W. z. E. W.

§. 66.

Aufgabe. Aus den gegebenen 2 Axen der Ellypse AB und CD die Brennpunkte zu finden, und die krumme Linie zu beschreiben (Fig. 53).

Auflösung. I. Lasset die Linien AB und CD sich in ihrer Mitte G perpendiculair durchschneiden, und nehme an, daß $AB > CD$ sey. Traget nun AG oder GB von den Endpunkten C oder D der kleinen Axe nach F und f auf die

grosse

grosse Axe, so sind die also bestimmten Punkte F und f die Brennpunkte der zu beschreibenden krummen Linie (§. 33. 35. 36).

II. **Weil nun die Summe der Linien, die aus den** Brennpunkten F und f nach einerley Punkt der Ellypse gezogen werden, jederzeit der grossen Axe AB gleich sind (§. 33), so lasset uns AB in L von G gegen F zu in 2 beliebige Theile theilen. Darauf lasset uns aus dem Brennpunkt F mit der Linie AL einen Bogen in a und a beschreiben: So sind diese beyden Punkte in der gesuchten Ellypse. Wenn man solchergestalt die grosse Axe in 2 andere Theile in den Punkten H und K theilet, und eben so, wie kurz vorher verfährt, so wird man nach der Figur so viele Punkte der gesuchten krummen Linie bekommen, als man verlangt. Wenn man nun diese alle durch eine einzige Linie verbindet, so wird diese Linie die verlangte Ellypse seyn.

Beweis. Von einem jeden Punkt b, der nach der vorgeschriebenen Construction determinirt wird, lasset uns die Perpendiculairlinie $bS = y$ auf $AB = 2a$ ziehen, damit $AG = GB = FC = a$ sey. Es sey ferner $CG = GD = b$; $GS = x$; Der Unterschied zwischen Fb und $bf = 2d$: Da folglich $Fb + bf = 2a$ (§. 33), so ist $Fb = a - d$ nnd $fb = a + d$ (*); $FG = Gf = c$; Fo glich $FS = FG - GS = c - x$ und $fS = Gf + GS = c + x$; und weil der Triangel FGC ein rechtwinklichter ist, so ist $\overline{FC}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{CG}^2$ oder $aa = cc + bb$. Woraus folgt, daß $cc = aa - bb$. Dieses alles sey vorausgesezt.

Jzt ist vermöge des rechtwinklichten Triangels fSb, $\overline{fb}^2 = \overline{fS}^2 + \overline{bS}^2$ oder $aa + 2ad + dd = cc + 2cx + xx + yy$ (M) und aus dem rechtwinklichten Triangel FSb

 schliessen

(*) Siehe meine Anmerkung zum §. 45. B.

schliessen wir, daß $\overline{Fb}^2 = \overline{FS}^2 + \overline{bS}^2$, oder $aa - 2ad + dd = cc - 2cx + xx + yy$. (L) Wenn man folglich die erste Helfte der Gleichung L von der ersten Helfte der Gleichung M und die 2te von der 2ten abzieht, so ist $4ad = 4cx$; Folglich $d = \frac{cx}{a}$ und $dd = \frac{c^2x^2}{aa}$. Wenn man folglich in der Gleichung M $\frac{cx}{a}$ an der Stelle von d und $\frac{ccxx}{aa}$ an der Stelle von dd setzet, so wird aus dieser Gleichung werden $aa + 2cx + \frac{ccxx}{aa} = cc + 2cx + xx + yy$ oder, wenn man von beyden Seiten $2cx$ abziehet, so ist $aa + \frac{c^2x^2}{aa} = c^2 + x^2 + y^2$. Wenn man folglich durch aa multiplicirt, $a^4 + c^2x^2 = a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2$. Setzet man also in dieser lezten Gleichung $aa - bb$ in der Stelle von cc, so bekommt man $a^4 + a^2x^2 - b^2x^2 = a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 + a^2y^2$. Und wenn man von beyden Seiten $a^4 + a^2x^2$ abzieht und $-a^2b^2$ auf die andere Seite bringt, so ist $a^2b^2 - b^2x^2 = a^2y^2$, oder $(aa - xx)\,bb = aa \times yy$. Daraus folgt dieses Verhältniß $yy : aa - xx = bb : aa$: der $\overline{bS}^2 : AS \times SB = \overline{CG}^2 : \overline{AG}^2$. Dieses ist die Charakteristische Eigenschaft der Ellypse (§. 12. 14), wenn $AG > CG$, wie man hier annimmt. Folglich sind der Punkt b und alle andere Punkte $a\ d\ m.\ n.\ o$ — —, die man auf eine gleiche Art gefunden hat, in einer Ellypse, wovon AB und CD die Axen sind. W. z. E. W.

§. 67.

Lehnsatz. Wenn man einen Cirkel ARB (Fig. 54) über der grossen Axe AB einer Ellypse ACB beschreibt, und wenn man die Ordinaten Jb, Kd — — am Cirkel ziehet, die

die in den Punkten f und g die Ellypse durchschneiden, so werden die Ordinaten fb, gd. — — — der Ellypse sich verhalten, wie die correspondirenden Ordinaten des Cirkels Ib, Kd — — das heißt: $fb : Ib = gd : Kd = CG : RG$.

Beweis. I. Denn es ist $\overline{fb}^2 : Ab \times bB = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$ (§. 12. 14. 66). Nun ist aber nach den Eigenschaften des Cirkels $Ab \times bB = \overline{Ib}^2$. Folglich verhält sich $\overline{fb}^2 : \overline{Ib}^2 = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$ oder $fb : Ib = CG : RG$.

II. Eben deswegen verhält sich auch $gd^2 : Ad \times dB = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$. Es ist aber $Ad \times dB = \overline{Kd}^2$ Folglich verhält sich $\overline{gd}^2 : \overline{Kd}^2 = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$ oder $gd : Kd = CG : RG$. Folglich, weil $fb : Ib = CG : RG$ (1), so verhält sich auch $fb : Ib = gd : Kd$. W. z. E. W.

§. 68.

Aufgabe. Das Verhältniß der Oberfläche der Ellypse gegen die Fläche des Cirkels zu finden, der über ihrer größten Axe construirt worden ist (Fig. 54).

Auflösung. I. Man nehme an, daß die halbe grosse Axe in eine sehr grosse Anzahl kleiner Theile getheilet worden sey; (Man zeichnet hier, um die Verwirrung zu vermeiden, nur 4 derselben) Imgleichen, daß man aus den Theilungspunkten b. d. e. G so wohl auf den Cirkel als auf die Ellypse Ordinaten gezogen habe, und daß man ferner, um diese beyden Figuren äussere Parallelogramme beschrieben habe, so ist aus dem §. 68 der Parabel klar, daß die gesammten Parallelogramme, die um dem 4ten Theil des Cirkels beschrieben sind, so beschaffen seyn können, daß ihre Summe von dem Quadranten um weniger als jede angebliche Grösse

verschieden sey. Man kann folglich die Summe dieser Parallelogramme für die Fläche des Quadranten des Cirkels annehmen und eben so die Summe der Parallelagramme, die um dem 4ten Theil der Ellypse beschrieben sind, für die Oberfläche des 4ten Theils der Ellypse setzen.

II. Nach dieser Voraussetzung erhellet es, daß das Rechteck $Ab \times bf : Ab \times bl = bf : bl$. Denn sie haben eine gemeinschaftliche Basis Ab Es verhält sich aber $bf : bl = CG : RG$ (§. 67) Folglich $Ab \times bf : Ab \times bl = CG : RG$.

Eben so $bd \times dg : bd \times dK = dg : dK = CG : RG$. Folglich $bd \times dg : bd \times dK = CG : RG$:

Gleichfalls verhalten sich $de \times eh : de : em = eh : em$ $CG : RG$; folglich $de \times em = CG : RG$.

Endlich verhält sich $eG \times CG : eG \times RG = CG : RG$. Und folglich hat man diese Reihe von gleichen Verhältnissen $Ab \times bf : Ab \times bl = bd \times dg : bd \times dK = de \times eh : de \times em = eG \times CG : eG \times RG$: Folglich $(Ab \times bf) + (bd \times dg) + (eG \times CG) : (Ab \times bl) + (bd \times dK) + (de \times em) + (eG \times GR) = (Ab \times bf) : (Ab \times bl) = CG : RG$ (*), das heißt, die Fläche des 4ten Theils der Ellypse verhält sich zur Oberfläche des Quadranten vom Cirkel $= CG : RG$ (1) $= 2CG : 2RG = AB$. Folglich verhält sich die Oberfläche der ganzen Ellypse zur Oberfläche des ganzen Cirkels, der über der grossen Axe beschrieben ist, wie die kleine Axe zur grossen Axe. W. z Th. und z. E. W.

Zusatz. Folglich erhält man die Fläche der Ellypse, wenn man die kleine Axe durch die Fläche des Cirkels, der über

(*) Man sehe meine Anmerkung zum §. 65 der Parabel; Man wird alsdenn dieses Verhältniß richtig finden. B.

über ihre grosse Axe beschrieben ist, multiplicirt und dieses Product durch die nämliche grosse Axe dividirt.

* §. 69.

Anmerkung. Wenn man über der kleinen Axe einen Cirkel beschreibet, so könnte man eben so beweisen, daß die Oberfläche der Ellypse sich zur Oberfläche des Cirkels verhalte, wie die grosse Axe zur kleinen Axe. Daraus erkennet man, daß aus der Quadratur des Cirkels auch die Quadratur der Ellypse entstehe.

* §. 70.

Erster Zusatz. Daraus folgt, daß der halbe ellyptische Abschnitt A*dgf*A sich zum halben correspondirenden Abschnitt des Cirkels ADKIA verhalte, wie die Fläche der Ellypsis zur Fläche des Cirkels, der über der grossen Axe derselben beschrieben ist.

Denn man kann, wie vorhin, beweisen, daß alle Rechtecke, die man um dem halben ellyptischen Abschnitt beschreiben könnte, sich zu den, um dem Cirkel beschriebenen verhalten würden, wie die kleine Axe zur grossen, oder wie die Fläche der Ellypse zur Fläche des Cirkels (§. 68).

* §. 71.

Zweyter Zusatz. Wenn man folglich die Lage der graden Linie FQ zu finden wüßte, (Fig. 55) die durch den Brennpunkt F der Ellypse gehet, und den Cirkel, der über ihrer grossen Axe beschrieben wäre nach einem gewissen gegebenen Verhältniß theilte, und wenn man alsdenn die Ordinate QP fallen liesse und F*m* auf dem Punkt *m*, wo QP die Ellypse durchschneidet, zöge, so würde F*m* auch die Fläche der Ellypse nach dem nämlichen gegebenen Verhältniß theilen.

Lasset uns daher annehmen, daß die dreyseitige Figur des Cirkels BFQ sich zur Cirkelfläche verhalte 1 : 5 : So behaupte ich, daß der Ellyptische Triangel BFM sich auch zur Fläche der Ellypse verhalte = 1 : 5 :

Beweis. Es sey die Cirkelfläche = A; die Fläche der Ellypse = E, so ist zu beweisen, daß wenn BFQ : A = 1 : 5, auch BFM : E = 1 : 5. Lasset uns deswegen

1) uns erinnern, daß der halbe ellyptische Abschnitt BMP sich zum halben Abschnitt vom Cirkel BQP verhalte = E : A. (§. 70).

2) Daß der Triangel FPM sich zum Triangel FPQ, der die nämliche Basis FP hat, verhalte = MP : QP. = kleine Axe : grossen Axe (§. 67) = E : A (§. 68). Folglich ist FPM , FPQ = E : A.

Folglich haben wir folgende 2 Proportionen BMP : BQP = E : A und FPM : FPQ = E : A : Folglich sind die Verhältnisse der einen gleich den Verhältnissen der andern. Wenn wir folglich der Ordnung nach die Glieder der beyden Proportionen zusammen addiren, so bekommen wir PMP + FPM : BQP + FPQ = 2E : 2A = E : A (*). Wenn wir folglich das 2te und 3te Glied mit einander verwechseln, so

(*) Um zu zeigen, daß dieses Verhältniß richtig sey, so ist allgemein darzuthun, daß wenn man in 2 geometrischen Proportionen $a : b = c : d$ und $g : h = c : d$, worin die beyderseitigen Verhältnisse sich gleich sind, die Glieder der 2 Proportionen der Ordnung nach zusammen addirt, wieder eine würkliche Proportion heraus kommen müsse, das heißt, daß $a + g : b + h = 2c : 2d$. Es wird aber dieses Verhältniß ohne allen Zweifel richtig seyn, wenn das Product der mittelsten Glieder dem Product der äussern Glieder gleich seyn wird. Es wird folglich zu beweisen seyn, daß $(b + h)\ 2c = (a + g)\ 2d$ oder daß $2bc + 2ad + 2hc = 2ad + 2gd$. Es ist aber vermöge der angenommenen Proportionen $ad = bc$ und $gd = hc$; Folglich auch $2ad = 2hc$; Folglich $(b + h)\ 2c = (a + g)\ 2d$ Folglich auch $a + g : b + h = 2c : 2d$. B.

so ist BMP + FPM : E = BQP + FPQ : A. Nun ist aber BMP + FPM = BFM und BQP + FPQ = BFQ; Folglich BFM : E = BFQ : A. Allein BFQ : A = 1 : 5 (Beding); Folglich BFM : E = 1 : 5. W. z. E. W.

*§. 72.

Anmerkung. Die Theilung des Cirkels nach einem gegebenen Verhältniß durch eine Linie, die durch den Brennpunkt der Ellypse gehet, wird also auch ein Mittel geben, die Fläche der Ellypse nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen, indem die Theilungslinien durch den Brennpunkt gehen. Es ist dieses eine von den berühmten Aufgaben des Keplers, die in der physischen Astronomie so nützlich ist (*). Da es mir aber scheint, daß die geometrische Auflösung derselben von der Quadratur des Cirkels und von der Rectification der Peripherie derselben abhänge, so gebe ich hier ein von mir erfundenes Mittel, wodurch man der Aufgabe sehr nahe kommt. Wenn die Entfernung *FG* des Brennpunkts *F* vom Centrum G, welche ich die Excentricität nenne, nicht merklich ist.

*§. 73.

Aufgabe. Die Cirkelfläche nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen, daß die Theilungslinien durch einen innerhalb demselben liegenden und vom Mittelpunkt unterschiedenen Punkt *F* gehen (Fig. 56).

Auflösung, die sehr einfach ist, und wodurch man dem wahren Innhalt sehr nahe kommt.

 Nach-

(*) Man lese was der Herr von Tschirnhausen hierinn geleistet hat, in den Actis Erudit. Lips. 1696. und Bernoulli Oper. T. I. p. 159. B.

Nachdem ihr durch die gegebenen Punkte *F* und G einen Diameter AB gezogen habt, so theilet den Cirkel nach dem gegebenen Verhältniß so, daß ihr die Theilungslinien durch das Centrum G gehen lasset, das heißt, wenn das Verhältniß z. E. wie 1 : 6 ist, so machet den Bogen BQ = dem 6ten Theil des Umkreises, so wird der Sector BGQ offenbar der 6te Theil des Cirkels seyn. Ziehet darauf *F*R und durch das Centrum G die Parallellinie GM; wenn ihr nun die Linie *F*M ziehet, so behaupte ich, daß der Triangel B*F*M den Cirkel fast nach dem gegebenen Verhältniß theilen werde.

Beweis. Man hat zu zeigen, daß der Triangel B*F*M beynahe dem Ausschnitt BGQ gleich sey. Es haben aber diese beyden Figuren den Theil BGLM gemeinschaftlich. Es ist also nur noch übrig zu beweisen, daß der Triangel *F*GL fast dem Triangel LQM gleich sey. Dieses aber zeiget sich sogleich. Denn die beyden Triangel *F*GM und GQM haben einerley Basis GM und sind zwischen einerley Parallellinien GM und *F*Q gelegen (Constr.); Folglich sind sie sich gleich. Und wenn man folglich von ihnen den gemeinschaftlichen Theil GLM wegnimmt, so bekommt man den Triangel *F*GL = dem Triangel LQM, beynahe = der dreyseitigen Figur LQM. Weil die Sehne QM fast mit dem Bogen zusammen fällt. — — W. z. E. W.

* §. 74.

Dritter Zusatz. Es folgt noch aus dem §. 68 daß die Ellypse der Fläche eines Cirkels gleich sey, dessen Diameter die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der grossen und kleinen Axe der Ellypse ist.

Beweis. Es sey die Fläche der Ellypse = E. Die grosse Axe derselben = A; die Fläche des Cirkels, der auf dieser Axe beschrieben ist = C; Die kleine Axe = D; Der

Diameter

Diameter, der die mittlere Proportionallinie ist $= M$; Die Fläche dieses Cirkels $= P$: So kommt es darauf an, zu beweisen, daß $E = P$. Nun verhält sich aber vermöge der Bedingung $A : M = M : D$; Folglich $\overline{A}^2 : \overline{M}^2 = A : D$. (*). Es verhält sich aber $\overline{A}^2 : \overline{M}^2 = C : P$. (**); Folglich $C . P = A : D$. Nun verhalten sich $A : D = C : E$ (§. 68), folglich $C : P = C : E$. Weil folglich $C = C$, so muß auch $E = P$ seyn.

* §. 75.

Vierter Zusatz. Es verhalten sich die Flächen der Ellypsen unter einander, wie die Producte aus ihren Axen.

Beweis Es seyn E und e die Flächen zwoer Ellypsen, die man mit einander vergleicht; A und B die Axen von E und a und b die Axen von e. Nun ist zu beweisen, daß $E : e = A \times B : a \times b$.

Lasset uns, um dieses zu beweisen, statt der Ellypse diejenigen Cirkel nehmen, die ihnen gleich sind, das heißt, deren Diameter die mittlere geometrische Proportionallinien zwischen A und B und zwischen a und b sind (§. 74). Es sey folglich E die Oberfläche des ersten Cirkels; M dessen Diameter; e die Fläche des 2ten Cirkels; und m sein Diameter. Nun verhalten sich aber nach der Bedingung $A:M = M:B$ und $a : m = m : b$; Folglich ist $\overline{M}^2 = AB$ und $\overline{m}^2 = ab$. Folglich $\overline{M}^2 : \overline{m}^2 = AB : ab$. Es ist aber $\overline{M}^2 : \overline{m}^2$
$= E$

(*) Man lese meine Erläuterung zum §. 168 der Parabel. B.

(**) A ist der Diameter des Cirkels C und M der Diameter des Cirkels P. Nun verhalten sich aber die Cirkelflächen, wie die Quadrate dieser Diameter; Folglich $\overline{A}^2 : \overline{M}^2 = c : P$. B.

$= E : e$.(Geom.); Folglich $E : e = AB : ab$ W. z. E. W.

§. 76.

Erklärung. Eine Ellypsoide ist ein Körper, der durch das Herumwälzen einer halben Ellypse ACB um eine ihrer Axen AB erzeuget wird (Fig. 54).

* §. 77.

Aufgabe. Den körperlichen Innhalt einer Ellypsoide zu finden.

Auflösung. Weil eine Ellypsoide durch die Herumwälzung einer halben Ellypse um ihre Axe erzeugt wird, so wird die halbe Ellypsoide durch die Herumwälzung des 4ten Theils der Ellypse ACG um die Helfte der Axe AG erzeugt werden. Eben so wird auch eine halbe Kugel erzeugt, wenn man einen Quadranten ARG sich um AG drehen läßt. Wenn wir demnach das Verhältniß der halben Ellypsoide gegen die halbe Kugel bestimmen können, die zum Diameter die grosse Axe AB der erzeugenden Ellypse ACB hat, so werden wir auch, da wir den körperlichen Innhalt der Kugel ausrechnen können, dadurch den Innhalt der Ellypsoide finden.

Lasset uns bemerken, daß wenn man den 4ten Theil der Ellypse ACG, so wie den Quadranten ARG um die Helfte der grossen Axe AG sich herum drehen läßt, die äusseren Parallelagramme sowol des 4ten Theils der Ellypse als des Quadranten des Cirkels, Cylinder von gleicher Höhe erzeugen werden. Denn man nimmt die Theile Ab, bd, de, eG für gleich an; und daß folglich die Summe der Cylinder, die um der halben Kugel beschrieben sind, für den Innhalt der halben Kugel genommen werden können, und daß die Summe der Cylinder, die um der halben Ellypsoide gezeichnet sind, von der halben Ellypse selbst nicht unterschieden sind. Dieses

ward

ward damals bewiesen, als man den körperlichen Innhalt des parabolischen Afterkegels untersuchte (§. 72. der Parabel).

Nach dieser Voraussetzung verhält sich der Cylinder von AI zu dem Cylinder von Af, die von einerley Höhe sind, wie der Cirkel von bI zur Cirkelfläche, deren Diameter $bf = \overline{bI}^2 : \overline{bf}^2$. (Geometr.) $= \overline{RG}^2 : \overline{CG}^2$ (§. 67) Folglich verhält sich der Cylinder von AI zum Cylinder von $Af = \overline{RG}^2 : \overline{CG}^2$. Eben so verhält sich der Cylinder von bK zum Cylinder von bg, wie die Cirkel, deren Diameter dK und $bg = \overline{dK}^2 : \overline{dg}^2 : \overline{RG}^2 : \overline{CG}^2$. Ein gleiches beweiset man von allen übrigen Cylindern von dm und dh, cQ und eC: Folglich verhält sich die Summe der Cylinder, die um die halbe Kugel gezeichnet sind, das heißt, die halbe Kugel, die ich G nennen will, zu der Summe der Cylinder, die um die halbe Ellypse gezeichnet sind, das heißt zur halben Ellypse, die ich E nenne, wie $\overline{RG}^2 : \overline{CG}^2$ oder $G : E = \overline{RG}^2 : \overline{CG}^2 = 2G : 2E$ (*). Folglich ist $2E = \frac{2G + \overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$ (L). Es sey itzt der Cirkel von dem Radius $RG = a$; der Cirkel von dem Radius $CG = b$; so bekommt man dieses Verhältniß $b : a = \overline{CG}^2 : \overline{RG}^2$ (Geometr.) Folglich $\frac{b}{a} = \frac{\overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$. Und folglich, wenn man $\frac{b}{a}$ an der Stelle von $\frac{\overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$ in der Gleichung L setzt, so ist $2E = \frac{2G + b}{a}$. Es ist aber 2G der körperliche Innhalt der ganzen

(*) Man lese hierüber die im §. gegebene Erläuterung. B.

ganzen Kugel, welche so groß ist als $\frac{2}{3}$ des um ihr beschriebenen Cylinders (Geometrie), das heißt, $2G = a \times \frac{2}{3} AB$. Folglich ist $2E = a \times \frac{2AB}{3} \times \frac{b}{a} = \frac{2}{3} AB \times b$. Hieraus siehet man, daß man den körperlichen Innhalt der ganzen Ellypsoide finde, wenn man den Cirkel, der zum Radius die Helfte CG der kleinen Axe der gegebenen Ellypse hat, durch $\frac{2}{3}$ der grossen Axe AB multiplicirt.

* §. 78.

Zwölfter Hauptsatz. Wenn man in der 57ten Figur durch den Berührungspunkt M den Diameter MK gezogen hat, und wenn man darauf einen andern Diameter mit der Tangente MO parallel ziehet, und wenn man die Ordinaten MP und IS auf die grosse Axe fallen läßt, so werd man 1) finden, daß das Quadrat $\overline{GI}^2$ = sey dem Rechteck $AP \times PB$ und daß 2) das Quadrat $\overline{GP}^2$ = sey dem Rechteck $AI \times IB$.

Beweis. Es sey beständig $AG = GB = a$; $CG = GD = b$; $PM = y$; $GP = x$. So ist $AP = a + x$; $PB = a - x$ und $AP \times PB = aa - xx$; $GI = s$; Folglich $AI = a + s$; $IB = a - s$ und $AI \times IB = aa - ss$. Es ist folglich zu beweisen, daß $ss = aa - xx$ und $xx = aa - ss$.

Weil nach der Construction GS mit MO parallel ist, so ist klar, daß die rechtwinklichten Triangel MPO und GIS sich ähnlich sind. Folglich verhält sich $PO : GI = PM : IS$ oder $\overline{PO}^2 : \overline{GI}^2 = \overline{PM}^2 : \overline{IS}^2$. Es ist aber $PO = \frac{aa - xx}{xx}$. (11ter Hauptſ. §. 50, 51); Folglich ist $\overline{PO}^2 = \frac{(aa - xx)}{xx} \frac{(aa - xx)}{xx}$. Folglich wird die vorige Proportion analytisch ausgedruckt diese: $\frac{(aa - xx)(aa - xx)}{xx} : ss = yy : \overline{IS}^2$:

(R)

(R) Es ist aber (§ 12) $\overline{GB}^2 : \overline{CG}^2 = AI \times IB : \overline{IS}^2$ oder $aa \,.\, bb = aa - ss : \overline{IS}^2 = \frac{aabb - bbss}{aa}$ und $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (§. 17) Wenn man folglich in der Proportion R die Werthe von yy und $\overline{IS}^2$ substituirt, so ist $\frac{(aa - xx)(aa - xx)}{xx} : ss = \frac{aabb - bbxx}{aa} : \frac{aabb - bbss}{aa}$ und wenn man die beyden lezten Glieder dieser Proportion durch $\frac{bb}{aa}$ dividiret, so ist $\frac{(aa - xx)(aa + xz)}{xx} : ss = aa - xx : aa - ss$. Und wenn man das erste und 3te Glied durch $aa - xx$ dividiret, so ist $\frac{aa - xx}{xx} : ss = 1 = aa - ss$. Folglich ist $\frac{(aa - xx)(aa - ss)}{xx} = ss$ oder $ssxx = a^4 - a^2x^2 - a^2s^2 + s^2x^2$. Wenn man folglich $ssxx$ von beyden Seiten abzieht, und $-a^2ss$ auf die andere Seite bringt, so ist $a^2s^2 = a^4 - a^2x^2$. Wenn man folglich durch a^2 dividirt, $s^2 = aa - xx$, oder $\overline{GI}^2 = AP \times PB$. W. d. 1ste W.

2) Weil $ss = aa - xx$, so ist auch $xx = aa - ss$, das heißt, $\overline{GP}^2 = AI \times IB$. W. d. 2te W.

§. 79.

Erklärung. Wenn 2 Diameter MK und SF so beschaffen sind, daß der eine von beyden SF mit der Tangente MO, die an dem Endpunkt des andern Diameter MK gezogen ist, parallel ist (Constr. der Figur), so nennet man sie conjugirte Diameter, weil sie einerley Function haben. Wir

Wir werden dieses weiter unten sehen. Und eine jede Linie NH oder VH (Fig. 58) die von irgend einem Punkt N oder V der Ellypse mit der Tangente mO oder mit dem Diameter SF parallel gezogen ist, ist eine Ordinate an dem conjugirten Diameter mK.

§. 79. II.

Erster Zusatz. Es folgt aus dem 12ten Hauptsatze daß der Triangel GPm = GIS oder daß GP × Pm = GI × IS; denn man hat oben gesehen, daß $\overline{GI}^2 = AP \times PB$ und $\overline{GP}^2 = AI \times IB$; Es ist aber (§. 10) $\overline{PM}^2 : \overline{IS}^2 := AP \times PB : AI \times IB$; Folglich ist $\overline{PM}^2 : \overline{IS}^2 = \overline{GI}^2 : GP$ oder Pm : IS = GI : GP. Folglich ist GP × Pm = GI × IS.

* §. 80.

Zweyter Zusatz. Wenn folglich beyde conjugirte Diameter sich gleich wären oder wenn Gm = GS, so wäre GI = GP (a) und $\overline{GI}^2 = \overline{GP}^2$ oder $ss = xx$. Folglich würde die Gleichung $ss = aa - xx$, die in §. 78 gefunden, diese werden $xx = aa - xx$. Folglich $2xx = aa$ oder $xx = \frac{aa}{2} = a \times \frac{a}{2}$. Hieraus folgt das Verhältniß $a : x = x : \frac{a}{2}$, das heißt, wenn die conjugirten Diameter sich gleich sind, so ist die Absciſſe GP oder x derjenigen Ordinate, die von dem Endpunkt P eines Diameters auf die grosse Axe gezogen ist, die mittlere Proportionallinie zwischen der Helfte und dem 4ten Theil der grossen Axe.

* §. 81.

(a) Denn da die rechtwinklichten Triangel GPM und GIS dem Innhalt nach sich gleich sind, und da sie beyde eine Hypothenuse von einerley Grösse haben, so sind auch nothwendig alle ihre Seiten sich gleich.

* §. 81.

Wenn man im Gegentheil auf der grossen Axe AB die Linie GP oder x als die mittlere Proportionallinie zwischen der halben grossen Axe und dem 4ten Theil derselben, das heißt, zwischen a und $\frac{a}{2}$ annimmt, und wenn man aus dem Punkt P die Ordinate PM ziehet; darauf den Diameter MK, die Tangente MO und den Diameter SF parallel mit MO ziehet, so behaupte ich, daß die conjugirten Diameter MK und SF sich gleich sind oder daß GM=SG sey.

Beweis. Denn man lasse die Ordinate IS herunter fallen, so ist $\overline{GI}^2 = AP \times PB$ (§. 78) $= aa - xx$ (T). Nun verhält sich aber $a : x = x : \frac{a}{2}$ (Beding). Folglich ist $xx = \frac{aa}{2}$. Wenn man folglich diesen Werth von xx in die Gleichung T setzet, so ist $\overline{GI}^2 = aa - \frac{aa}{2} = \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2} = xx = \overline{GP}^2$. Folglich ist GI = GP (a). Allein GI×IS = GP×PM (§ 79. II.) folglich verhält sich GI : GP = PM : IS. Weil folglich GI = GP, so ist auch IS = PM; und folglich GM = GS oder MK = SF. W. z. E. W.

* §. 82.

Dritter Zusatz. Es ist offenbar, daß es in einer Ellypse nur ein paar gleicher conjugirter Diameter gäbe. Es ist gewiß, daß auf der grossen Axe nur 2 Punkte sind, der eine auf der Seite von A, der andere auf der Seite von B, wo

(a) Bemerket, daß wenn man nach der 57ten Figur die beyden conjugirten Diameter von einerley Grösse annimmt, die Abscisse GI einerley mit GP seyn müsse. Nur deswegen lassen wir sie als verschieden erscheinen, damit die Stärke des Beweises desto merklicher werde.

man Abscissen ziehen kann, die die mittlere Proportionallinien zwischen der Helfte und dem 4ten Theil der grossen Axe sind. Allein da die Ordinaten, die aus diesen Punkten gezogen würden, einerley Diameter bestimmen würden, wie man sich leicht davon überzeugen kann (§. 25), so kann man folglich nothwendig in der nämlichen Ellypse nur ein Paar gleicher conjugirter Diameter haben.

* §. 83.

Anmerkung. Um diese Diameter leicht zu erhalten, ohne eine mittlere Proportionallinie zu suchen, so muß man bemerken, daß die Gleichung $xx = aa - xx$ (§. 80) eine Gleichung am Cirkel sey, worin die Abscissen vom Centrum anfangen, und daß man sie also würklich construire, wenn man die Abscisse so groß als die Ordinate macht. Dieses ist leicht, wenn man eine doppelte Ordinate von der Helfte des 4ten Theils des Cirkels, der auf der grossen Axe der Ellypse construiret ist, herunter fallen läßt. Es werden alsdenn die beyden Punkte, in chen diese doppelte Ordinate die Ellypse durchschneidet, dazu dienen, die 2 conjugirten Diameter zu ziehen, weil alsdenn die Abscisse des Cirkels ihrer Ordinate gleich seyn wird.

Dieses Verfahren ist viel kürzer, als wenn man eine mittlere Proportionallinie sucht. Doch ist es nicht durchaus nothwendig.

* §. 84.

Vierter Zusatz. Wenn man die kleine Axe CD gebrauchen will, um 2 gleiche conjugirte Diameter zu bekommen, so nehme man GQ als die mittlere Proportionallinie zwischen der Helfte und dem 4ten Theil der Axe, das heißt, zwischen b und $\frac{b}{2}$. Man ziehe die Ordinate QM; durch den Punkt M, wo sie mit der Ellypse zusammen stößt, ziehe man den Diameter MK und die Tangente MO, und mit dieser

ziehe

ziehe man durch das Centrum G die Parallellinie SF, so werden die beyden Linien MK und SF die beyden gleichen conjugirten Diameter seyn.

Beweis. Wenn man von dem Punkt M die Ordinate PM ziehet, so ist PM=QG und $\overline{PM}^2 = \overline{GQ}^2$. Folglich, weil $b : GQ = GQ : \frac{b}{2}$ (Constr.), so ist $\overline{GQ}^2 = \frac{bb}{2}$ und folglich $\overline{PM}^2 = \frac{bb}{2}$. Allein $\overline{PM}^2 : AP \times PB = \overline{CG}^2 : \overline{GB}^2$ (§. 12) das heißt, wenn man die analytischen Werthe substituirt $\frac{bb}{2} : aa - xx = bb : aa$. Folglich ist $aa \times \frac{bb}{2} = (aa - xx)\, bb$. Wenn man folglich mit bb dividiret $\frac{aa}{2} = aa - xx$. Folglich nach der Versetzung $xx = aa - \frac{aa}{2} = \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2}$ oder $xx = a \times \frac{a}{2}$ Folglich ist $a : x = x : \frac{a}{2}$, das heißt, die Abscisse GP oder x ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Helfte und dem 4ten Theil der grossen Axe. In diesem Fall bestimmt aber die Ordinate PM die beyden gleichen conjugirten Diameter. (§. 81).

* §. 85.

Fünfter Zusatz. Wenn man die kleine Axe CD so lange verlängert, bis sie in dem Punkt H mit der Tangente MO zusammen stößt, so wird man finden, daß GS, die Helfte des conjugirten Diameters SF, die mittlere Proportionallinie sey zwischen den Segmenten MH und MO der Tangente HMO, die durch den Berührungspunct M gezogen ist und durch die beyden verlängerten Axen determinirt wird. Es ist folglich zu beweisen, daß MH : GS=GS : MO, oder daß $\overline{GS}^2 = MO \times MH$ sey.

Beweis. Man hat schon gesehen, daß die beyden rechtwinklichten Triangel MPO und GIS sich ähnlich sind

 (Constr.)

(Constr.) Folglich verhält sich GS : MO = GI. PO. (S), und wenn man an die kleine Axe die Ordinate MQ ziehet, so werden auch die rechtwinklichten Triangel HQM und GIS sich ähnlich seyn (weil HO mit GS parallel ist (Constr.)) Folglich verhält sich GS : MH = GI : MQ. (T). Wenn man folglich die Glieder dieser beyden Verhältnisse S und T der Ordnung nach durch einander multiplicirt, so ist $\overline{GS}^2 : MO \times MH = \overline{GI}^2 : PO \times MQ$. (R) Es ist aber MQ = GP $= x$ und $PO = \frac{aa - xx}{x}$ (§. 50. 51); Folglich ist PO × $MQ = \frac{(aa - xx)}{x} x = aa - xx = (a + x)(a - x) =$ $AP \times PB = \overline{GI}^2$ (§. 78); Folglich ist $PO \times MQ = \overline{GI}^2$. Wenn man folglich die Proportion R wieder vornimmt, so ist MO × $MH = \overline{GS}^2$ oder MH : GS = GS : MO. W. z. E. W.

* §. 86.

Sechster Zusatz. Nimmt man demnach an, daß GM < GS sey, und verlängert GM so lange, bis die verlängerte Linie MT eine dritte Proportionallinie zu den beyden Linien GM und GS ist, so werden die 4 Punkte G, O, H, T in der Peripherie eines Cirkels seyn, wovon das Centrum in irgend einem Punkt R der Hypothenuse HO ist.

Denn es ist GM : GS = GS : MT. (Beding) Folglich ist $GM \times MT = \overline{GS}^2$. Nun ist aber $\overline{GS}^2 = MO \times$ MH (§. 85); Folglich ist GM × MT = MO × MH; Folglich verhält sich GM : MH = MO : MT; Folglich schneiden sich die beyden Linien GT und HO so, daß die Theile der einen sich umgekehrt verhalten, wie die Theile der andern, und folglich sind ihre Endpunkte O. G. H. T in der Peri-

pherie eines Cirkels (*), dessen Centrum sich in der Hypothenuse HO befinden muß, denn da der rechte Winkel OGH ein Winkel an der Peripherie ist, so muß nothwendig HO ein Diameter seyn.

Um das Centrum dieses Cirkels zu finden, muß man

(*) Zur Erläuterung dieser Folge wird diese beygefügte Anmerkung einigen Lesern nicht unangenehm seyn. Ich beziehe mich auf die 12 Fig. Tab. XI. Hier werde ich 1) beweisen, daß wenn 4 Punkte H, D, A, G in der Peripherie eines Cirkels liegen, alsdenn die Theile der Linien DG und AH, die sich in dem Punkt C schneiden, in einem umgekehrten Verhältnisse gegen einander stehen, oder daß CA : CD = CG : CH. Der Beweis ist dieser: Es ist der Winkel DCA = HCG als Verticalwinkel. Der Winkel D = H als Winkel an der Peripherie, die auf einerley Bogen stehen. Folglich sind die Triangel DCA und HCG sich ähnlich. Folglich verhält sich AC : CD = CG : CH. Daß aber auch 2) umgekehrt geschlossen werden könne, daß diese 4 Punkte H, D, A, G in der Peripherie eines Cirkels liegen, wenn AC : CD = CG : CH, oder wenn die Theile der Linien DG und AH in umgekehrtem Verhältniß stehen: Dieses erhellet nun folgendermassen. Daß die Peripherie durch die 3 Punkte G, A, D gewiß gehen werde oder gehen könne, ist kein Zweifel, weil man durch 3 gegebene Punkte immer einen Cirkel beschreiben kann. Es kommt also nur darauf an, noch zu zeigen, daß die Peripherie auch durch den Punkt H gehen müsse. Wir führen den Beweis auf folgende Art: Gesetzt, die Peripherie gienge nicht durch H; folglich gehet sie durch irgend einen andern Punkt I oder K jenseits oder disseits H. Gesetzt, sie gehe durch K, so verhält sich also nach dem vorigen Satze AC . CD = CG : CK. Es verhält sich aber auch vermöge der Bedingung AC : CD = CG : CH. Folglich wäre CH = CK. Folglich ein Theil so groß, als das Ganze: Welches unmöglich ist. Aus dem nämlichen Grunde kann die Peripherie auch nicht durch einem Punkt I gehen, der jenseits H ist. Folglich muß sie nothwendig durch den Punkt H gehen. Dieses ist nun mit leichter Mühe auf den Fall in unserm § anzuwenden, den man nun ohne Schwürigkeit verstehen muß. B.

eine Perpendiculairlinie LR auf der Mitte der Sehne GT aufrichten, die die Hypothenuse HO in irgend einem Punkt R berühren wird. Denn es muß der Winkel LMR ein spitziger Winkel seyn, weil GMO ein stumpfer ist. (§. 39) Und folglich müssen MR und LR in einem Punkt R zusammen stossen. Dieser wird das Centrum des Cirkels seyn, der durch die 4 Punkte O, G, H, T gehet.

* §. 87.

Siebender Zusatz. Man siehet hieraus, was man zu thun habe, um die beyden Axen der Ellypse zu finden, in welcher SF, MK die beyden ungleichen conjugirten Diameter sind, deren Grösse und Lage gegen einander man kennet. Man muß MT zur 3ten Proportionallinie zwischen GM und GS machen; Man muß durch den Punkt M die Linie HMO parallel mit SF ziehen; Man muß auf der Mitte von GT die Perpendiculairlinie LR aufrichten, und aus dem Punkt R, wo sie mit der Linie HO zusammen stößt, durch den Durchschnittspunkt G den Cirkel GHTO beschreiben, der die Linie HMO in den Punkten H und O durchschneiden wird. Wenn man nun von diesen Punkten nach dem Mittelpunkt der Ellypse die Linien OG und HG ziehet und sie nach Belieben verlängert, so werden die beyden Axen sich in diesen Linien befinden, weil sie sich im Mittelpunkt nach rechten Winkeln durchschneiden, (Construction); Und weil $GM : GS = GS : MT$: (Constr.) so ist $\overline{GS}^2 = GM \times MT = HM \times MO$. (Nach der Natur des Cirkels); Folglich ist $\overline{GS}^2 = HM \times MO$. Dieses beweiset, daß die Punkte H und O in den verlängerten Axen sind (§. 85).

Um die Länge dieser Axen zu bestimmen, muß man merken, daß die Linie HMO die Tangente ist (§. 79. I.) Wenn man folglich MP auf OG und MQ auf HG perpen

diculair

diculair ziehet und GB zur mittlern Proportionallinie zwischen GP und GO, GC aber als die mittlere Proportionallinie zwischen GQ und GH annimmt, so werden alsdenn die Linien GB und GC die halben Axen seyn (§. 54. 58) u. s. w.

* §. 88.

Dreyzehnter Zusatz. Das Rechteck MH×HK (Fig. 58) aus den Abschnitten eines Diameters MK, die durch eine beliebige Ordinate NH dieses Diameters gemacht werden, verhalten sich zum Quadrate dieser Ordinate $\overline{NH}^2$, wie das Quadrat des Diameters MK zum Quadrat seines conjugirten Diameters FS oder wie das Quadrat von GM zum Quadrat von GS.

Beweis. Man ziehe durch den Punkt H, wo die Ordinate NH den Diameter MK durchschneidet, QHR mit der Axe AB parallel und HL auf dieselbe perpendiculair und aus den Punkten M und N ziehe man auf die nämliche Axe die Ordinaten MP und NT. diese verlängere man, bis sie die Linie QR in R durchschneide; Ferner sey $AG = GB = a$; $CG = GD = b$; $GP = x$; $PM = y$; $GL = m$; $HR = LT = s$; Folglich $GT = GL + LT = m + s$; $GM = GK = g$; $GH = z$; $MH = GM - GH = g - z$; $HK = GK + GH = g + z$; Folglich $MH \times HK = (g - z)\ (g + z) = gg - zz$; $NH = t$ oder $\overline{NH}^2 - tt$; $GS = d$ oder $\overline{GS}^2 = dd$; $AT = AG + GL + LT = a + m + s$ und $TB = GB - GL - LT = a - m - s$; Folglich $AT \times TB = (a + m + s)\ (a - m - s) = aa - mm - 2ms - ss$; $AP = AG + GP = a + x$; $PB = GB - GP = a + x$; Folglich $AP \times PB = (a + x)\ (a - x) = aa - xx$; Und wenn man die Tangente MO an dem Punkt M annimmt, so ist $PO = \frac{aa - xx}{x}$ (§. 50. 51) Es ist, also zu beweisen,

daß MH×HK ($gg - zz$) : $\overline{NH}^2$ (tt) = $\overline{GM}^2$ (gg) : $\overline{GS}^2$ (dd).

Da die Triangel GPM und GLH sich ähnlich sind, so verhält sich GP (x) : PM (y) = GL (m) : LH = $\frac{my}{x}$ = TR und da NH mit MO parallel gezogen ist (Constr.), so sind auch die Triangel MPO und HNR sich ähnlich (*); Folglich verhält sich PO $\frac{(aa - xx)}{x}$: PM (y) = HR(s): RN = $\frac{sxy}{aa - xx}$; Folglich ist NT = TR − RN = $\frac{my}{x} - \frac{sxy}{aa - xx}$. Folglich ist $\overline{NT}^2 = \left(\frac{my}{x} - \frac{sxy}{aa - xx}\right)^2 = \frac{m^2y^2}{xx} - \frac{2msy^2}{aa - xx} + \frac{s^2x^2y^2}{(aa - xx)^2}$. Wir können aber noch einen andern Werth von $\overline{NT}^2$ finden. Denn es ist bewiesen worden (§. 10), daß AP×PB ($aa - xx$) : AT×TB ($aa - mm - 2ms - ss$) = $\overline{PM}^2$ (yy) : $\overline{NT}^2 = \frac{aayy - mmyy - 2msy^2 - s^2y^2}{aa - xx}$; Wenn man folglich diese 2 Werthe von $\overline{NT}^2$ mit einander vergleicht, so ist $\frac{m^2y^2}{xx} - \frac{2msy^2}{aa - xx} + \frac{s^2x^2y^2}{(aa - xx)^2} = \frac{a^2yy - m^2yy - 2msyy - s^2yy}{aa - xx}$, und wenn man in dieser Gleichung auf beyden Seiten $\frac{-2msy^2}{aa - xx}$ aus-

(*) Denn der Winkel bey R ist so groß, als der Winkel bey P, (als rechte Winkel) und da MO mit HN und PM mit TR parallel ist (Constr.), so ist die Figur MN ein Parallelagramm; [illegible] ist OMP = HNR; Folglich sind die Triangel sich ähnlich.

auslöscht und durch yy dividirt, so ist $\frac{m^2}{xx} + \frac{s^2x^2}{(aa-xx)^2} = \frac{aa-mm-ss}{aa-xx}$ und wenn man durch xx multiplicirt, so ist $mm + \frac{s^2x^4}{(aa-xx)^2} = \frac{a^2x^2 - m^2x^2 - s^2x^2}{aa-xx}$; wenn man folglich mm auf die andere Seite und alles unter einerley Benennung bringt, so ist $\frac{s^2x^4}{(aa-xx)^2} = \frac{a^2x^2 - m^2x^2 - s^2x^2 - a^2m^2 + m^2x^2}{aa-xx}$; Wenn man folglich das, was sich aufheben läßt, wegnimmt, und den Rest durch $aa-xx$ multiplicirt, so ist $\frac{s^2x^4}{aa-xx} = a^2x^2 - s^2x^2 - a^2m^2$; Wenn man folglich den Ausdruck $-s^2x^2$ auf die andere Seite und alsdenn mit dem andern unter einerley Benennung bringt, so ist $\frac{s^2x^2 + a^2s^2x^2 - s^2x^4}{aa-xx} = aaxx - a^2m^2$; oder indem man das, was sich aufheben läßt, wegnimmt $\frac{a^2s^2x^2}{aa-xx} = a^2x^2 - a^2m^2$ und wenn man durch aa dividirt $\frac{s^2x^2}{aa-xx} = x^2 - m^2$, und indem man weiters durch $aa-xx$ multiplicirt, so ist $s^2x^2 = (x^2 - m^2)(aa-xx)$ und wenn man durch xx dividirt, so ist s^2 oder $\overline{HR}^2 = \frac{x^2 - m^2)(aa-xx)}{xx}$.

Lasset uns itzt zu den ähnlichen Triangeln GPM und GLH zurückkehren, so verhält sich GP (x) : GM (g) = GL (m) : GH $= \frac{gm}{x}$: Folglich ist $\overline{GM}^2 - \overline{GH}^2 = gg - \frac{ggmm}{xx}$. Nun ist aber $\overline{GM}^2 - \overline{GH}^2 =$

$(GM - GH)(GM + GH) = MH \times HK$; Folglich ist $MH \times HK = gg - \frac{ggmm}{xx} = \frac{ggxx - ggmm}{xx}$; Nun kann man sich aber leicht überzeugen, daß $MH \times HK \left(\frac{ggxx - ggmm}{xx}\right) : \overline{HR}^2 \left(\frac{(xx - mm)(aa - xx)}{x}\right) = \overline{GM}^2 (gg) : \overline{GI}^2 (aa - xx)$ (§. 78.) Denn das Produkt der äussern Glieder ist dem Produkt der innern Glieder gleich. Wenn man folglich das 2te und 3te Glied mit einander verwechselt, so ist $MH \times HK : \overline{GM}^2 = \overline{HR}^2 : \overline{GI}^2$. Nun verhält sich aber wegen der ähnlichen Triangel RHN und IGS (*) $\overline{HR}^2 : \overline{GI}^2 = \overline{NH}^2 : \overline{GS}^2$: Folglich $MH \times HK : \overline{GM}^2 = \overline{NH}^2 : \overline{GS}^2$; Und wenn man folglich das 2te und 3te Glied mit einander verwechselt, so ist $MH \times HK : \overline{NH}^2 = \overline{GM}^2 : \overline{GS}^2$, oder $gg - zz : tt = gg : dd$. W. z. E. W.

* §. 89.

Erster Zusatz. Da die Ordinate NH nach Belieben angenommen ist, so folgt daraus, daß dieses von einer jeden andern Ordinate gelten werde, und daß folglich $MH \times HK : \overline{VH}^2 = \overline{GM}^2 : \overline{GS}^2$; Folglich $\overline{VH}^2 = \overline{NH}^2$ oder $VH = NH$, das heißt, eine jede Sehne NV, die eine Ordinate an den Diameter MK oder mit der Tangente an dem Scheitelpunkt dieses Diameters parallel ist, wird durch diesen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet. * §. 90.

(*) Denn VN ist mit FS parallel (Constr.); Folglich ist der Winkel MHN = MGS und da HR auch mit GO parallel ist (Constr.), so ist MHR = MGO; Folglich ist MHN − MHR = MGS − MGO; Folglich ist nach der Figur RHN = IGS. Nun ist ausserdem noch der Winkel bey R = dem Winkel bey I als rechte Winkel; Folglich sind diese Triangel sich ähnlich. B.

*§. 90.

Anmerkung. Wenn man diese Wahrheit in Absicht auf die Ordinate VH grade zu hätte beweisen wollen, so würde man sich statt der Ordinate an der Axe NT und des correspondirenden Rechtecks AT×TB der Ordinate VE und des correspondirenden Rechtecks AE×EB, imgleichen des Triangels HVK bedienet haben Wenn wir die Seiten dieses Triangels mit den Seiten des Triangels MPO würden verglichen haben, so würden wir dadurch die Richtigkeit von folgendem Verhältnisse haben einsehen können. $MH \times HK : \overline{VH}^2 = \overline{gM}^2 : \overline{gS}^2$.

*§. 91.

Zweyter Zusatz. Weil $gg - zz : tt = gg : dd$. (§. 88) so ist $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$. Folglich, wenn z = GH kleiner wird, so wird t = NH grösser werden, das heißt, wenn die Abscissen eines Diameters einer Ellypse kleiner werden, so werden die Ordinaten dieses Diameters grösser; und umgekehrt, wenn die Abscissen grösser werden, so werden die Ordinaten kleiner. Wir haben dieses in Ansehung der Axen schon bewiesen (§. 18. §. 21). Man setzet hierbey voraus, daß das Centrum der krummen Linie der Anfang der Abscissen sey und daß die Ordinaten auf einerley Seite des Mittelpunktes genommen sind.

*§ 92.

Dritter Zusatz. Wenn eine nach Belieben angenommene Sehne Ax durch einen Diameter MK in dem Punkt b in 2 gleiche Theile getheilet wird, so wird diese Sehne eine Ordinate dieses Diameters seyn, das heißt, sie wird nothwendig mit der Tangente MO, die durch den Endpunkt dieses Diameters gezogen ist, parallel seyn.

Beweis.

Beweis. Gesetzt sie wäre es nicht, so könnte man also durch den Punkt A mit der Tangente MO eine andere Parallellinie Ay ziehen, die oberwärts oder unterwärts der Sehne Ax fallen, und eine Ordinate des Diameters MK seyn (§. 79. I.) und folglich durch diesen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet seyn würde (§ 89); Folglich wäre $Ar = ry$; Es ist aber nach der Voraussetzung $Ab = bx$; Folglich verhielte sich $Ar : Ab = ry : bx$. Wenn man folglich die Sehne xy zöge, so würde rb oder MK mit xy parallel seyn (Geometr.); Wenn man folglich aus den Punkten x und y die Ordinaten yt und xb an den Diameter MK zöge, so würden sie sich gleich seyn. Weil Parallellinien zwischen Parallellinien sich gleich sind. Folglich würde man in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkt auf einerley Seite gleiche Ordinaten haben, oder welches auf eins hinausliefe, es würden mit der Abnahme der Abscissen, die Ordinaten nicht zu nehmen. Dieses ist absurd (§. 91).

*§. 93.

Vierter Zusatz. Es folgt daraus, daß eine Linie HL (Fig. 59) die die beyden Mittelpunkte H und L der beyden Sehnen VB und rn der Ellypse, die unter sich parallel sind, mit einander verbindet, nothwendig, wenn sie nach Umständen verlängert wird, durch den Mittelpunkt der krummen Linie gehe. Es wird also diese Linie nothwendig einer von den Diametern seyn.

Beweis. Lasset uns aus dem Mittelpunkt H der Sehne rn den Diameter MK ziehen, so ist offenbar, daß rn eine Ordinate an diesem Diameter seyn werde, (§. 92) und daß folglich VB, die eine Parallellinie von rn ist (Beding), auch eine Ordinate an dem nämlichen Diameter seyn werde; und daß sie von demselben in 2 gleiche Theile getheilet werde (§. 89); Folglich wird der Diameter, der durch die Mitte

von

von rn gehet, auch durch die Mitte von VB gehen. Folglich wird die Linie HL, die die beyden Mittelpunkte dieser Sehne vereiniget, da sie 2 gemeinschaftliche Punkte mit diesem Diameter hat, von demselben nicht unterschieden seyn. Man muß also den Schluß machen, daß eine jede Linie, welche zwo parallellaufende Sehnen einer Ellypse in 2 gleiche Theile theilet, nothwendig einer von den Diametern dieser krummen Linie sey.

* §. 94.

Fünfter Zusatz. Durch einerley Punkt H einer Ellypse kann man nicht 2 Sehnen ziehen, die durch den Diameter in 2 gleiche Theile getheilet wären. Denn, wenn dieses wäre, so würden diese Sehnen Ordinaten an dem Diameter MK seyn (§. 92), oder sie würden mit der Tangente MO parallel seyn und man würde durch den nämlichen Punkt 2 Linien mit einer einzigen parallel ziehen können, welches unmöglich ist.

* §. 95.

Sechster Zusatz. Wenn eine Sehne rn einer Ellypse in 2 gleiche Theile durch einen Diameter MK getheilet wird, und wenn man durch einen der Endpunkte M dieses Diameters mit dieser Sehne eine Parallellinie MO ziehet, so sage ich, daß dieses eine Tangente an dem Punkt M seyn wird.

Beweis. Wenn MO in einem solchen Falle nicht die Tangente wäre, so würde man an dem Punkt M eine Tangente Mx ziehen können, die über oder unter MO fiel und mit der Sehne rn parallel wäre. Denn da rn durch den Diameter MK in 2 gleiche Theile getheilet wird (Beding), so würde dieses die Ordinate an diesem Diameter oder mit der Tangente an dem Punkt M parallel seyn (§. 92); Es würde auch umgekehrt die Tangente Mx mit der nämlichen Sehne rn parallel seyn. Es ist aber auch MO mit ihr parallel

rallel (Beding). Man würde also in dem nämlichen Punkt 2 Linien MO und Mx haben, die mit einerley Linie rn parallel wären. Dieses ist unmöglich. Folglich muß nothwendig eine Linie MO, die durch den Endpunkt eines Diameters mit der Sehne parallel gezogen ist und durch diesen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet ist, das heißt, die mit einer Ordinate dieses Diameters parallel ist, eine Tangente an dem Punkt M seyn.

§. 96.

Anmerkung. Man könnte diese Wahrheit eben so, wie man den §. 19 und 22 bewiesen hat, bestätigen, indem man sie unmittelbar aus dem §. 91 herleitete.

§. 97.

Siebender Zusatz. Wenn man folglich voraussetzt, daß man an einen Diameter eine Ordinate ziehen könne, ohne darzu eine Tangente an einem seiner Endpunkte zu gebrauchen, so ist es klar, daß man ein Mittel habe, eine Tangente an jeden Punkt M einer gegebenen Ellypse zu ziehen.

Denn man muß durch den Punkt M den Diameter MK durch den Mittelpunkt G, den ich als gegeben oder gefunden voraussetze, ziehen. An diesem muß man eine Ordinate rn, so wie wir es im §. 105 zeigen werden, suchen. Darauf ziehe man durch den Endpunkt M die Linie MO mit dieser Ordinate parallel, dieses wird die gesuchte Tangente seyn (§ 95). Wir werden aber in der Auflösung der Aufgaben, die wir sogleich vortragen werden, ein Mittel anführen, wie man an einen Diameter ohne Hülfe der Tangente eine Ordinate ziehen könne.

* §. 98.

Vierzehnter Satz. Wenn man rT mit dem Diameter

meter MK parallel ziehet, so wird man finden, daß das Rechteck FT×TS aus den Theilen FT und TS des Diameters FS sich zum Quadrat der Ordinate rT dieses Diameters verhalte, wie das Quadrat dieses Diameters FS zum Quadrat seines conjugirten Diameters MK, oder wie das Quadrat von GF zum Quadrat von GM. Man muß also beweisen, daß $FT \times TS : \overline{rT}^2 = \overline{gF}^2 : \overline{gM}^2$.

Beweis. Es ist klar, daß $gH = rT$ oder $\overline{gH}^2 = \overline{rT}^2$ und daß $rH = Tg$ oder $\overline{rH}^2 = \overline{Tg}^2$ sey. Nun ward in dem 12ten Satz bewiesen (§. 88), daß $MH \times HK : \overline{rH}^2 = \overline{gM}^2 : \overline{gS}^2$ oder $\overline{Fg}^2$. Lasset uns ferner bemerken, daß $MH \times HK = (Mg - gH)(Mg + gH) = \overline{Mg}^2 - \overline{gH}^2$ sey, (weil $gK = gM$) $= \overline{Mg}^2 - \overline{rT}^2$. (weil $GH = rT$). Folglich $MH \times HK = \overline{MG}^2 - \overline{rT}^2$. Es wird also aus der vorigen Proportion nachfolgende werden: $\overline{Mg}^2 - \overline{rT}^2 : \overline{Tg}^2 = \overline{gM}^2 : \overline{Fg}^2$, oder durch Versetzung der Glieder, $\overline{gM}^2 : \overline{gM}^2 - \overline{rT}^2 = \overline{Fg}^2 : \overline{Tg}^2$; Wenn man folglich das 2te Glied vom 1sten und das 4te vom 3ten abzieht, so ist $\overline{rT}^2 : \overline{gM}^2 = \overline{Fg}^2 - \overline{Tg}^2 : \overline{Fg}^2$ (M). Es ist aber $\overline{Fg}^2 - \overline{Tg}^2 = (Fg - Tg)(Fg + Tg) = FT \times TS$. Wenn man folglich in der Gleichung M, FT×TS an der Stelle von $\overline{Fg}^2 - \overline{Tg}^2$ setzet, so bekommt man $\overline{rT}^2 : \overline{gM}^2 = FT \times TS : \overline{Fg}^2$ oder verwechselt $FT \times TS : \overline{rT}^2 = \overline{Fg}^2 : \overline{gM}^2$. W. z. E. W.

*§. 99.

Anmerkung. Man findet folglich die nämliche Eigenschaft der Ellypse, man mag die Ordinaten an dem Diameter

lich

MK oder am Diameter FS nehmen. Deswegen heissen diese beyden Diameter conjugirte Diameter, weil sie gleiche Bestimmungen verursachen.

Man siehet auch zugleich, daß die Haupteigenschaften der Ellypse in Betracht ihrer Axen (10. 12. 20) sich durch die Sätze 13. 14. auf einem jeden Diameter erstrecken. Folglich muß alles, was vermöge ihrer Eigenschaften in Betrachtung auf die Axe geschlossen ist, in Betracht eines jeden Diameters statt finden.

* §. 100.

Erster Zusatz. Man kann daraus folgern:

1) Daß wie im §. 10 sich die Quadrate der Ordinaten eines jeden Diameters einer Ellypse zu einander verhalten wie die Rechtecke der correspondirenden abgeschnittenen Theile

2) Daß wie im §. 52, wenn man an einem Punkt Z der Ellypse, der von den Endpunkten der Axe unterschieden ist, eine Tangente PZ ziehet, welche in P einen verlängerten Diameter FS berühret, und wenn man die Ordinate Zy an diesen Diameter ziehet, daß man alsdenn folgendes Verhältniß bekommen werde: $gy : yS = Fy : yP$ oder wie im §. 54 $gy : gS = gS : gP$.

Und wenn man umgekehrt von einem Punkt P ausserhalb der Ellypse die Linie Pg nach dem Mittelpunkt ziehet, und nun eine dritte Proportionallinie zu den Linien gP und gS suchet, und wenn man diese auf den halben Diameter gS von g nach y trägt, um aus dem Punkt y auf diesem Diameter die Ordinate yZ zu ziehen, so wird PZ die Tangente seyn. Dieses kann maneben so, wie im §. 53, beweisen.

* §. 101.

Zweyter Zusatz. In dem §. 91 war diese Gleichung

chung $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$. Setzet man nun voraus, daß die 2 Diameter SF und MK (Fig. 58) sich gleich sind, oder daß $g = d$ so ist $gg - zz = \frac{ggtt}{dd} = gg - zz = tt$. Dieses zeiget an, daß $MH \times HK = \overline{NH}^2$ sey. Dieses ist eine Gleichung, die von der Gleichung des Cirkels nur darinn unterschieden ist, daß die Ordinaten in der Ellypse gegen ihre Diameter nicht perpendiculair sind, wie im Cirkel. Man kann also bey dem blossen Anschauen einer solchen Gleichung $gg - zz = tt$ nicht wissen, ob diese Gleichung zur Ellypse oder zum Cirkel gehöre. Man muß folglich nothwendig die Beschaffenheit der Coordinaten in Erwägung ziehen (a). Sind diese rechtwinklicht gegen einander, so ist es eine Gleichung für den Cirkel. Sind sie aber schiefwinklicht, so gehört sie zur Ellypse, und zeigt an, daß ihre beyden Diameter sich gleich sind.

* §. 102.

Dritter Zusatz. Wenn man zu 2 conjugirten Diametern MK und FS eine dritte Proportionallinie p suchet, so ist diese Linie p der Parameter des Diameters MK. Es würde aber derselbe der Parameter des Diameters FS seyn, wenn dieser Diameter das erste Glied dieser Verhältniß und MK das 2te wäre. Es verhalte sich demnach $2g : 2d = 2d : p$. so verhält sich auch $4gg : 4dd = 2g : p$. (*). Folglich ist $\frac{gg}{dd} = \frac{2g}{p}$. Wenn man folglich in der Gleichung für die Diameter

(a) Die Abscissen und die Ordinaten zusammen genommen heissen Coordinaten, das heißt eigentlich die zusammen genommenen Ordinaten. Es kann auch in der That die Abscisse GH eines Diameters MK (Fig. 59) für die Ordinate rT an dem conjugirten Diameter desselben FS genommen werden, und umgekehrt.

(*) Man lese die Erläuterung zum §. 168 der Parabel.

meter $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$, die wir im §. 91 gefunden haben, den Ausdruck $\frac{2g}{p}$ an die Stelle von $\frac{gg}{dd}$ setzet, so ist $gg - zz = \frac{2gtt}{p}$. Dieses ist eine Gleichung für die Ellypse, wenn man sie gegen den Parameter eines ihrer Diameter MK hält.

§. 103.

Vierter Zusatz. Hieraus folgt, wie im §. 28. 29, daß das Rechteck MH×HK aus jeden 2 Stücken eines Diameters MK sich zum Quadrat $\overline{NH}^2$ der correspondirenden Ordinate verhalte, wie dieser Diameter zu seinem Parameter. Denn weil $gg - zz = \frac{2gtt}{p}$ (§. 102), so ist auch, wenn man durch p multiplicirt $(gg - zz)\,p = 2g \times tt$. Folglich ist $gg - zz : tt = 2g : p$, oder MH × HK : $\overline{NH}^2$ = MK : p.

*§. 104.

Aufgabe. Man finde für eine gegebne Ellypse 1) jeden Diameter 2) derselben Mittelpunkt 3) ihre Axen 4) die Brennpunkte 5) die gleichen conjugirten Diameter (Fig. (60.)

Auflösung. 1) Man ziehe in dieser Ellypse nach Belieben 2 Sehnen *nl* und *mh*, die unter sich parallel sind. Durch ihre Mitte I und S lasse man die Linie OP gehen. Diese wird ein Diameter der krummen Linie seyn (§. 93).

2) Man theile den Diameter OP in dem Punkt G in 2 gleiche Theile, so wird in dem Theilungspunkt G der Mittelpunkt der Ellypse seyn (§. 25.).

3) Aus

3) Aus dem Mittelpunkt G beschreibe man einen Cirkelbogen, welcher die Ellypse in 2 Punkten P und T durchschneide. Man ziehe die Sehne PT, theile diese in dem Punkt x in 2 gleiche Theile, durch diesen Punkt und durch den Mittelpunkt G ziehe man die Linie AB: So ist diese eine von den Axen.

Denn da die Sehne PT durch AB, die durch den Mittelpunkt ihres Bogens gehet, in 2 gleiche Theile getheilet wird, so ist diese Sehne, die Ordinate an dem Diameter AB (§. 92) und da diese Sehne, vermöge der Construction, gegen den nämlichen Diameter perpendiculair ist, so folgt, daß AB eine von den Axen sey. Denn nur die Ordinaten der Axe sind perpendiculair. Denn eine jede Ordinate eines Diameters ist mit der Tangente, die durch einen Endpunkt dieses Diameters gezogen ist, parallel (§. 79. I). Es sind aber die Tangenten an den Endpunkten der Axen gegen diesen Diameter perpendiculair. Eine jede Linie, die durch den Mittelpunkt der Ellypse an einen jeden andern Punkt des Umkreises gezogen ist, machet jederzeit mit der Tangente an diesem Punkt einen schiefen Winkel (§. 39).

4) Richtet itzt auf der Mitte vou AB die Perpendiculairlinie CGD auf, so wird diese die andere Axe der Ellypse seyn (§. 9). Wenn AB $>$ CD, so wird AB die grosse und CD die kleine Axe oder die conjugirte Axe von AB seyn; Es wird aber umgekehrt CD die grosse und AB die kleine Axe seyn, wenn CD $>$ AB.

5) Nachdem man die beyden Axen bestimmt hat, so kann man die Brennpunkte F und f dieser krummen Linie nach §. 66. finden.

6) Um die gleichen conjugirten Diameter derselben zu bekommen; muß man von dem einem Endpunkt A der grossen Axe an die Endpunkte C und D der kleinen Axe die Sehnen

AC und AD ziehen und durch die Mitte *t* und *r* dieser Sehnen muß man von dem Mittelpunkt G die beyden Linien GP und GT ziehen. Werden diese in O und K verlängert, so geben sie uns die beyden conjugirten Diameter OP und KT.

Denn da AC offenbar so groß als AD ist, und GP eben so auf AD gezogen ist, als GT auf AC, so kann man daraus leicht schliessen, daß GP=GT sey. Da ferner vermöge der Construction die Sehne AC durch den Diameter KT in 2 gleiche Theile getheilet worden ist, so folgt daraus, daß AC eine doppelte Ordinate an diesem Diameter sey (§. 92). Um also zu zeigen, daß der Diameter OP von dem Diameter KT ein conjugirter Diameter sey, darf man nur beweisen, daß OP mit AC parallel sey (§. 79. I). Weil nun aber GD=CG und D*t*=*t*A ist (Constr.) so verhält sich auch GD : CG=D*t* : *t*A. Folglich ist AC mit GT oder OP parallel (Geometrie). W. z. E. W.

*§. 105.

Aufgabe. Man finde an jedem gegebenen Diameter einer Ellypse die Lage seiner Ordinaten; Man ziehe eine Tangente an einem seiner Endpunkte, und man suche seinen conjugirten Diameter.

Auflösung. Nehmet in der Peripherie der Ellypse einen beliebigen Punkt *n*, der von den Punkten O und P verschieden ist. Von diesem Punkt *n* ziehet an einem von den Endpunkten O des Diameters OP die Sehne *n*O; verlängert sie so lange, bis O*h*=*n*O ist und ziehet durch den Punkt *h* die Linie *h*B mit OP parallel. Wenn ihr nun durch den Punkt *n* oder B, wo *h*B die Ellypse berühret, die Sehne *n*B ziehet, so wird diese eine Ordinate am Diameter OP seyn, und wenn ihr durch einen von den Endpunkten P dieses Diameters mit *n*B eine Parallellinie PQ ziehet, so wird diese die Tangente an

an dem Punkt P seyn. Ziehet endlich durch das Centrum G mit der Ordinate nB oder mit der Tangente PQ eine Parallellinie KT, so wird KT der conjugirte Diameter von OP seyn.

Beweis. Weil hB mit OP parallel ist (Constr.), so verhält sich $nO : Oh = nS : SB$. Nun ist aber $nO = Oh$ (Constr.); Folglich ist auch $nS = SB$. Folglich ist die Sehne nB durch den Diameter OP in 2 gleiche Theile getheilet und folglich ist sie die Ordinate an diesem Diameter, das heißt, sie ist eine Parallellinie von der Tangente, die man durch einen der Endpunkte dieses Diameters ziehen könnte (§. 92).

2) Da die Linie PQ mit der Sehne nB, die eine Ordinate an dem Diameter OP ist, das heißt, die durch diesen Diameter in 2 gleiche Theile getheilet wird, parallel ist (Constr), so ist sie nothwendig die Tangente an dem Punkt P (§. 95).

3) Eben so, da der Diameter KT mit der Tangente PQ, die durch den Endpunkt P dieses Diameters gezogen ist, parallel ist, so ist sie nothwendig der conjugirte Diameter von OP (§. 79. I). W. z. E. W.

* §. 106.

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkt P ausserhalb der Ellypse eine Tangente an diese krumme Linie zu ziehen (Fig. 59).

Auflösung. Suchet den Mittelpunkt der Ellypse G (§. 104) und ziehet PG. Nun suchet zu den 2 Linien GP und GS eine dritte Proportionallinie. Traget sie von G in y und ziehet von da aus die Ordinate yZ (§. 105). Ziehet darauf von dem Punkt P nach dem Punkt Z die Linie PZ, so werdet ihr die gesuchte Tangente bekommen. Dieses ist evi-

dent (§. 100) denn es verhält sich $Gy : GS = GS : GP$ (Constr.).

§. 107.

Anmerkung. Wenn ihr yZ auf der andern Seite des Diameters FS so lange verlängert, bis sie die Ellypse in einem andern Punkt berühret (Ich lasse diese Verlängerung, so wie auch die an ihren Endpunkt gezogene Tangente weg, um die Verwirrung unter den Linien zu vermeiden) und wenn man nun von dem Punkt P an den Endpunkt dieser verlängerten Linie eine grade Linie zöge, so würde diese gleichfalls aus den vorhin angeführten Gründen eine Tangente an der Ellypse seyn. (§. 106).

* §. 108.

Zusatz. Man kann also aus einem ausserhalb der Ellypse gegebenem Punkt P an diese krumme Linie jederzeit 2 Tangenten ziehen. Diese werden sich gleich seyn, wenn der gegebene Punkt in der verlängerten Axe ist. In jedem andern Punkt aber werden sie sich ungleich seyn. Und dieses geschiehet deswegen, weil die Ordinaten in dem ersten Fall rechte Winkel, im 2ten Fall aber schiefe Winkel machen.

§. 109.

Aufgabe. Das Verhältniß des Rechtecks $LPxT$ aus den beyden Axen der Ellypse gegen das Parallelagramm $KgON$ aus 2 conjugirten Diametern ef und zI zu finden, das heißt, wenn man durch die Endpunkte A, B, C, D der Axen, die Tangenten LP, Px, xT und TL ziehet, um das äussere Rechteck $LPxT$ zu bekommen, und wenn man die nämliche Construction aus den Endpunkten f. e. z, J jeder 2 conjugirten Diameter ef und zJ macht, um das schiefwinklichte Parallelagramm $KgQN$,

KgON, welches um die nämliche Ellypse beschrieben ist, zu bekommen, so fragt man, in welchem Verhältnisse diese 2 Parallelagromme sind? oder welches einerley ist, welches das Verhältniß des 4ten Theils BGDx des erstern zum 4ten Theil fGIO des zweyten sey?

Auflösung. Man verbinde den Endpunkt I eines von den conjugirten Diametern mit dem nächsten Endpunkt B der grösten Axe; Man ziehe durch I die Linie hQ mit der grossen Axe und durch B die Linie Mr mit dem Diameter zJ parallel.

Unter dieser Voraussetzung ist es klar

1) Daß der Triangel GJB die Helfte des Rechtecks BGhQ sey. Denn diese Figuren haben eine gleiche Grundlinie GB und liegen zwischen einerley Parallellinien GB und hQ. Aus dem nämlichen Grunde ist der Triangel GJB die Helfte des Parallelagramms GMrJ; Folglich ist BGhQ = GMrJ.

2) Es ist auch evident, daß 2 Grössen sich gleich sind, wenn sie die mittlere Proportionalgrösse zwischen den nämlichen Grössen sind (a). Wenn man folglich beweiset, daß die 2 Parallelogramme BGDx und fGJO alle beyde die mittlere Proportionalgrössen zwischen einerley Grössen sind, so muß man auch überzeugt seyn, daß sich diese 2 Parallelogramme gleich sind.

Bemerket also, daß sich das Parallelagramm BGhQ oder GMrJ (Art. I) zum Parallelagramm BGDx, welches die nämliche Grundlinie hat, verhalte, wie Gh : GD. Wenn man aber GD so lange verlängert, bis sie mit der

(a) Gesetzt es seyn x und z beyde mittlere Proportionallinien zwischen a und b, so ist $z = x$. denn, weil $a : x = x : b$ so ist $xx = ab$ und weil auch $a : z = z : b$, so ist auch $zz = ab$; Folglich ist $zz = xx$. Folglich $z = x$.

Tangente OV zusammen stößt, so wird sich der Ordinate wegen, die durch den Berührungspunkt I auf die kleine Axe gezogen ist, folgendes Verhältniß ergeben: $Gh : GD = GD : GV$ (§ 58.) $= GD \times Dx : GV \times Dx$, das heißt, $= BGDx : GVyS$ (weil, wenn man GV zur Grundlinie des Parallelagramms GVyS annimmt, die Perpendiculairlinie Dx die Höhe desselben seyn wird). Folglich verhält sich $BGhQ$ oder $GMrJ : BGDx = BGDx : GVyS$.

Eben so und vollkommen aus den nemlichen Gründen verhält sich $GMrJ : fGJO = GM : Gf = Gf : GS$ (§. 54. 100.) $= Gf \times Oa : GS \times Oa$; Folglich ist $GMrJ : fGJO = Gf \times Oa : GS \times Oa$. Nun ist $Gf \times Oa = fGJO$ und $GS \times Oa = GVyS$, weil die Perpendiculairlinie Oa die gemeinschaftliche Höhe dieser Parallelagramme ist. Folglich verhält sich $GMrJ : fGJO = fGJO : GVyS$. Folglich sind diese beyden Parallelagramme BGDx und fGJO die mittlern Proportionalgrössen zwischen einerley Grössen GMrJ und GVyS, und folglich sind sie sich gleich. (Art. 2.) Folglich ist das Vierfache LPxT der erstern so groß als das Vierfache KgON des 2ten; Folglich kan man schliessen, daß das Verhältniß des Rechtecks zwoer Axen, welches um die Ellypse beschrieben ist, zu dem Parallelagramm jeder zweer conjugirten Diameter, das um die nemliche Ellypse beschrieben ist, ein Verhältniß der Gleichheit sey.

§. †

Unser Herr Verfasser hat in der ganzen Abhandlung von der Ellypse immer die Abscissen von dem Mittelpunkt an gerechnet. Es hat mancherley Nutzen, wenn man auch die Gleichung für die Ellypse kennet, wenn die Abscissen von dem Scheitelpunkt an genommen werden. Ich will mit Erlaubniß des teutschen Lesers dieselbe aufsuchen und sie in einigen

Sätzen

Sätzen anwenden, die vom Herrn la Chapelle übergangen und dennoch von einer nicht geringen Erheblichkeit und Artigkeit sind. Man erinnere sich noch, daß wir im §. 12. den Satz bewiesen haben, daß sich das Quadrat der kleinen oder halben kleinen Axe zum Quadrat der grossen oder halben grossen Axe verhalte, wie das Quadrat der Ordinate zum Product aus den correspondirenden Segmenten der Axe. Folglich ist (Fig. 48.) $\overline{CG}^2 : \overline{GA}^2 = \overline{FN}^2 : BF \times FA$, oder $\overline{GA}^2 : \overline{CG}^2 = BF \times FA : \overline{FN}^2$. Es ist aber nach §. 28. der Parameter der grossen Axe die dritte Proportionalgrösse zur grossen und kleinen Axe. Folglich, wenn wir den Parameter $= p$ setzen, so ist $2GA : 2CG = 2CG : p$. Folglich auch $4\overline{GA}^2 : 4\overline{CG}^2 = 2GA : p$. (Anmerk. zum §. 168 der Parabel) Es verhält sich aber auch $4\overline{GA}^2 : 4\overline{CG}^2 = \overline{AG}^2 : \overline{CG}^2$. Folglich verhält sich auch $\overline{AG}^2 : \overline{CG}^2 = 2GA : p$; Folglich ist auch $BF \times FA : FN^2 = 2GA : p$. Folglich $\overline{FN}^2 = \frac{p \times (BF \times FA)}{2AG}$. Nun sey FN, als die Ordinate $= x$ und $2AG = AB = a$, und $AF = x =$ der Abscisse vom Scheitelpunkt A angerechnet, so ist $BF = a - x$. Folglich $y^2 = p\left(\frac{x(a-x)}{a}\right) = \frac{p(xa - x^2)}{a} = \frac{pxa - px^2}{a} = px - \frac{px^2}{a}$. Folglich ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Aus dieser Gleichung läßt sich nun leichtlich erkennen: 1) daß die Ellypse wirklich eine krumme und in sich selbst zurücklaufende Linie sey. Denn sie wird die Axe nothwendig 2 mal durchschneiden; wenn nemlich x oder die Abscisse so groß als die grosse Axe wird, und wenn die Abscise o ist. Denn in beyden Fällen werden die Ordinaten verschwinden oder $= o$ werden müssen. Es sey zuerst $x = a$ so ist $y^2 = pa - \frac{paa}{a} = pa - pa = o$. Es

sey zweytens $x=o$ so ist $y^2=po-\frac{po}{a}=o$. Folglich ist in beyden Fällen keine Ordinate; Folglich durchschneidet die krumme Linie die Axe. 2) Kann man dadurch ungemein leicht finden, daß es 2 Brennpunkte in der Ellypse geben müsse, und den Ort bestimmen, wo sie sind. Es ist im §. 44. bewiesen worden, daß die Ordinate am Brennpunkt so groß, als die Helfte des Parameters sey $=\frac{p}{2}$. Setzet man daher in der Gleichung statt y hier $\frac{p}{2}$, so ist $\frac{1}{4}p^2=px-\frac{px^2}{a}$; Folglich $\frac{1}{4}p=x-\frac{x^2}{a}$. Folglich $\frac{1}{4}ap=ax-x^2$ oder wenn man die Glieder der Gleichung insgesammt versetzt, so ist $x^2-ax=-\frac{1}{4}ap$, und wenn man in dieser unreinen quadratischen Gleichung das fehlende addirt, so ist $x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ap$; Folglich $x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ap)}$ und also $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ap)}=a\pm\sqrt{(\frac{a^2-ap}{2})}$. Hieraus erkennet man, daß ein doppelter Brennpunkt möglich sey: der eine, wo die Abscisse $=\frac{a+\sqrt{(a^2-ap)}}{2}$; der andere, wo die Abscisse $=\frac{a-\sqrt{(a^2-ap)}}{2}$ ist. Es läßt sich auch hieraus gar leicht der Unterschied zwischen dem Cirkel und der Ellypse herleiten. Denn es ist der Cirkel eine solche Ellypse, worinn beyde Axen einander gleich und also auch der Perameter einer jeden Axe gleich ist. (§. 28.) Folglich ist der Parameter beym Cirkel $=a$. Dieses substituire man in der Gleichung für den Brennpunkt, in welcher die Ordinate $=$ dem halben Parameter, folglich $=\frac{1}{2}a$ ist; so ist $\frac{1}{4}a^2=ax-\frac{ax^2}{a}=ax-x^2$ oder $x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=o$. Wenn man nun die Quadratwurzel ausziehet, so ist $x-\frac{1}{2}a=o$. Folglich $x=\frac{1}{2}a$; folglich fällt der Brennpunkt beym Cirkel in den Mittelpunkt. Endlich lasset uns auch daraus die Aehnlichkeit zwischen einer

Pa-

Parabel und Ellypse herleiten, die vielleicht bey dem ersten Anblick ganz als unmöglich scheinet, und die es auch im strengsten Verstande ist, aber die dennoch mit ungemeinem Nutzen in der Astronomie von den Mathematikern fingirt wird, und woraus auf die schönste Weise die Eigenschaften der Parabel hergeleitet werden. Man lese darüber des grossen Geometers, des Herrn Eulers, Introduct. in analys. infinit. Lib. II. Cap. VI. Es ist wahr, die Ellypse ist eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie; die Parabel nicht. Allein wenn man die Axe der Ellypse sich als unendlich groß vorstellet, so ist der Unterschied zwischen einen Arm der Parabel und der Ellypse so gering, daß man ihn unmöglich bestimmen kann. Folglich kan man hier mit den Mathematikern sagen, es sey ein parabolischer Arm derjenige, der mit einem ellyptischen alsdenn zusammen fällt, wenn die Axe der Ellypse unendlich groß wird. Daß aber der Unterschied zwischen der Parabel und der Ellypse endlich kleiner werde, als jede angebliche Grösse, ist folgendermassen zu beweisen. Es müssen in der Ellypse und Parabel einerley Scheitelpunkt, ein gleicher Parameter, gleiche Abscissen und darzu gehörige Ordinaten angenommen werden. Nun war in dem §. 20. der Parabel die Gleichung für diese krumme Linie diese: $y^2 = px$. Für die Ellypse aber ist die Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Wir wollen, die Verwirrung zu vermeiden statt, y^2 in der Gleichung der Parabel z^2 setzen, so ist diese Gleichung $z^2 = px$, und die Gleichung für die Ellypse, die unverändert bleibt, ist diese: $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Wenn man folglich diese letzte von der ersten abzieht, so ist der Unterschied $z^2 - y^2 = \frac{px^2}{a}$. Wird nun a als der Divisor von px^2 nach und nach grösser, so wird der Unterschied zwischen der Gleichung der Parabel und Ellypse immer kleiner. Es ist bekannt, daß $z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$. Folglich ist

$z^2 -$

$\frac{z^2-y^2}{(z+y)} = (z-y)$. Folglich ist auch $\frac{px^2}{a(z+y)} = (z-y)$. Da aber von z das y abgezogen werden kann, so ist $z > y$ und folglich $z+y < 2z$. Es ist aber vermöge der Gleichung der Parabel $z = \sqrt{px}$. Folglich ist $2z = 2\sqrt{px}$ und also $z+y < 2\sqrt{px}$. Folglich ist $z-y < \frac{px^2}{a(2\sqrt{px})}$. Nun ist aber $p = \sqrt{p}.\sqrt{p}$ und $x^2 = x\sqrt{x}.\sqrt{x}$ und $\sqrt{px} = \sqrt{p}.\sqrt{x}$. Wenn wir folglich diese Werthe substituiren, so ist $z-y < \frac{\sqrt{p}.\sqrt{p}.x\sqrt{x}.\sqrt{x}}{a(2\sqrt{p}.\sqrt{x})}$, und wenn wir die gleichen Factores des Dividendus und Divisors gegen einander aufheben, so ist $z-y < \frac{x\sqrt{px}}{2a}$. Auf diese Art wird also der Unterschied immer kleiner, doch verschwindet er noch nicht. Nimt man aber die grosse Axe a unendlich groß an, so ist $a = \infty$, und folglich, da $z^2-y^2 = \frac{px^2}{a}$ war, so ist $z^2-y = \frac{px}{\infty}$, und da hier der Nenner des Bruchs gegen den Zähler unendlich groß wird, so ist der Zähler als o zu betrachten, und folglich ist der ganze Bruch $= o$. Folglich ist $z^2-y^2 = o$. Das heißt, aller Unterschied zwischen der Parabel und Ellypse fällt weg; und folglich ist der Arm der Ellypse, wenn ihre Axe unendlich groß wird, für den Arm der Parabel zu nehmen. B.

Gebrauch der Ellypse in der Dioptrick, oder in Verfertigung der Brenngläser und anderer Gläser zur Verstärkung des Gesichts, oder zur Verbesserung der Fehler desselben.

§. 110.

Die Dioptrick ist eine Wissenschaft, worinn man die Gesetze der Strahlenbrechung lehrt. Schon lange hat es

es, die Erfahrung bewiesen, daß ein Lichtstrahl, der durch die Luft ins Wasser, oder in Glas, oder überhaupt in ein dünners oder dichters Mittel (*a*) gehet, in dem Augenblick des Übergangs aus einem dieser Mittel in ein anderes seinen Weg oder seine Richtung ändere. Ein Lichtstrahl AB, (Fig. 62.) welcher nach einer graden Linie schief aus der Luft ins Wasser fällt, gehet von dem Augenblick an, da er über den Punkt B kommt, nicht weiter in der verlängerten Linie AB von B nach L fort, sondern er bricht sich nach einer graden Linie BG, indem er sich der Linie CBD, die auf dem Einfallspunkt B ins Wasser perpendiculair aufgerichtet ist, nähert. Wenn er hingegen vom Wasser in die Luft gehet, so entfernt er sich durch seine Brechung von dieser Perpendiculairlinie. Diese Veränderung in der Richtung nennet man die Refraction, von dem lateinischen refringere, brechen, weil der Lichtstrahl ABG wirklich in B gebrochen oder gebogen zu seyn scheinet.

§. 111.

Nach dieser Beobachtung suchte man es auszumachen, ob sich diese Refraction nicht nach einem gewissen Gesetze richte; Es mögte die Neigung des Strahls AB oder SB gegen die Perpendiculairlinie oder Axe der Refraction auch seyn, welche sie wollte. Diese Untersuchung brachte den Cartes auf die vortrefliche Entdeckung, durch welche sein erhabenes Genie sich

(*a*) Man versteht durch ein Mittel in der Physik einen jeden Raum, durch welchen Körper in ihrer Bewegung laufen können. Z. E. Luft, Wasser, Glas sind die Mittel, wodurch das Licht geht. Man sagt ferner, daß ein Mittel dünner als ein anderes sey, wenn das erstere unter dem nemlichen Raum weniger Materie hat, oder weniger wiegt, als das zweyte. Da nun ein Cubiczoll Luft weniger als ein Cubiczoll Wasser wiegt, so sagt man, die Luft sey ein dünneres Mittel als das Wasser. So ist das Quecksilber ein dichteres Mittel als das Wasser, weil das erste unter dem nemlichen Raum mehr wiegt.

sich zu Erfindungen empor schwang, die die gegenwärtige Welt und die nachfolgenden Geschlechte nicht verkennen können, ohne ihre Vernunft zu beschimpfen. (*a*) Denn es sey ABC der **Neigungswinkel** des Strahls AB, und der Winkel SBC der Neigungswinkel des Strahls SB : DGB, der **gebrochene Winkel** des Strahls AB, und DBJ der **gebrochene** Winkel des Strahls SB, so wird man finden, wenn man einen Cirkel aus dem Punkt B mit einem beliebigen Radius AB oder SB beschreibt, daß der Sinus SR des Neigungswinkels SBC sich jederzeit zum Sinus MI seines gebrochenen Winkels DBJ verhalte, wie der Sinus AT eines jeden andern Neigungswinkels ABC zum Sinus GP seines gebrochenen Winkels DBG, oder daß SR : MJ = AT : GP.

Man kann den Beweis davon in dem 2ten Capitel seiner Dioptrick lesen, und man muß gewiß die scharfsinnige und schöne Theorie, die ihn zu dieser vortreflichen Erfindung führte, bewundern. Eine Erfindung der Theorie, die durch tausendfältige Versuche, die von den geschicktesten und geübtesten Händen angestellet worden sind, bestätigt worden ist. (*)

§. 112.

Erste Anmerkung. Wenn der Strahl AB aus der Luft ins Wasser geht, so ist es klar, daß der Neigungswinkel ABC oder DBL, der ihm gleich ist, grösser als der gebrochene Winkel DBG sey. Wenn hingegen der Strahl GB aus Wasser in Luft fährt, so ist der Neigungswinkel DBG klei-

(*a*) Man sehe die Abhandlung im §. 123.

(*) Wer des Cartesius Werke etwa nicht bey der Hand hat, der findet eine gründliche Ausführung hievon in Krafts Physick P. III. Cap. IV. Auch verdienet des Herrn Montucla seine Geschichte der Mathematick II. B. hierüber nachgelesen zu werden. B.

kleiner, als der gebrochene Winkel ABC. Wir werden das Verhältniß, welches zwischen dem Sinus des Neigungswinkels und dem Sinus des gebrochenen Winkels ist, **das Verhältniß der Refraction** nennen. Man hat durch Versuche gefunden, daß, wenn der Strahl aus der Luft in Glas fährt, dieses Verhältniß beynahe wie 3 : 2 sey; und wenn der Strahl aus Glas in die Luft fährt, nicht viel von dem Verhältniß wie 2 : 3 unterschieden sey.

Wenn man folglich durch Versuche das Verhältniß des Sinus eines einzigen **Neigungswinkels** gegen den Sinus des **gebrochenen Winkels** findet, so wird man ohne Mühe nach einer einfachen Regel de Tri die Grösse eines gebrochenen Winkels zu einem beliebigen Neigungswinkel wissen. Lasset uns z. E. annehmen, daß ein Lichtstrahl schief aus der Luft ins Glas falle und daß alsdenn der Sinus seines Neigungswinkels sich zum Sinus seines gebrochennen Winkels verhalte $= 3 : 2$, wie es die Erfahrung beynahe zeiget (*), und daß dieses Verhältniß nach der Erfindung und dem Beweise des Cartesius (§. 111) beständig sey; Wenn man nun annimmt, daß der Neigungswinkel 20° sey, so ist der Sinus, den ich a nenne, durch die Tabellen bekannt, und man muß, um den Sinus x seines gebrochenen Winkels zu bekommen, folgendes Verhältniß ansetzen $3 : 2 = a : x$. Folglich ist $x = \frac{2a}{3}$. Wenn man diesen Sinus in den Tabellen aufsucht, so wird er auch zugleich die Grösse des gebrochenen Winkels anzeigen und folglich den Weg bestimmen, den der Strahl nach seiner Brechung nehmen muß.

§. 113.

(*) Wer genauere Nachricht hievon zu haben wünschet, dem empfehle ich *Zahn ocul. artific. Kircher. Ars magna Luc. & Vmbr. Wolffii Elem. Diopt. Newton. Diop. Euleri Nova theor. Luc.* Smiths Lehrbegrif der Optick, welches schöne Werk wir nicht blos übersezt, sondern ganz umgearbeitet und vervollkommnet unserm berühmten Herrn Hofrath Kästner zu verdanken haben. B.

§. 113.

Zweyte Anmerkung. Nur Lichtstrahlen, die auf eine brechende Oberfläche schief fallen, sind den Gesetzen der Refraction unterworfen. Indem die Erfahrung es beständig zeigt, daß ein perpendiculairer Lichtstrahl sich nicht breche.

§. 114.

Da Cartesius durch Schlüsse und Versuche gefunden hatte, daß das **Verhältniß der Refraction** ein beständiges Verhältniß sey, so fehlte es diesem grossen Geometer, diesem Gesetzgeber in den höhern Wissenschaften nicht mehr, die Figur der vortheilhaftesten Krümmung zu bestimmen, die man Gläsern geben muß, die die Fehler der Augen verbessern oder die Stärke des Gesichts vermehren sollen. So schloß er:

Wenn die Augen in einer Weite von 30 Schuh einen Gegenstand nicht mehr deutlich unterscheiden können, welchen sie doch auf 10 Schuh leichtlich erkennen, so kommt es daher, weil sie die Strahlen, die von der weitern Entfernung kommen, nicht so gut empfinden können, als diejenigen die von der nähern kommen (*a*). Könnte ich also ein Instrument erfinden, welches die Lichtstrahlen die aus der grössern Entfernung kommen, so ins Auge brächte, als wenn sie aus der Distanz von 10 Schuh kämen, so würde der 30 Schuh entfernte Gegenstand so vollkommen deutlich gesehen werden, als wenn er nur 10 Schuh weit von uns abstünde.

§. 115.

Um dieses zu erhalten, lasset uns nach der 63ten Figur eine Ellypse AMB annehmen, worinn die grosse Axe AB und die

(*a*) Man setzet hierbey immer voraus, daß das Unvermögen der Augen nicht von der geringen und schwachen Erleuchtung des Objects komme.

die Entfernung der Brennpunkte Ff mit einander in dem Verhältniß der Refraction stehen, daß heißt, worinn AB:Ff = 3 : 2 (§.112.) (a) Nun behaupte ich, daß alle Strahlen DM, die mit der Axe AB parallel aus der Luft in einen Glaskörper fallen, der durch das Herumwälzen dieser Ellypse um ihre Axe erzeuget worden ist, daß diese Strahlen nach geschehener Refraction nothwendig nach dem Brennpunkt f, der von dem Object, von welchem die Strahlen herkommen, am weitesten entfernt ist, hinlaufen müssen.

Beweis. Nachdem man auf die krumme Linie oder deren Tangente an dem Punkt M die Perpendiculairlinie LMH gezogen und DM = Mf gemacht hat, um aus dem Punkt M mit dem Radius Mf oder DM den Cirkel fDT zu beschreiben, so ist es klar, daß die Perpendiculairlinie DL der Sinus des Neigungswinkels DML und die Perpendiculairlinie fH der Sinus des Winkels fMH seyn. Wenn wir folglich beweisen werden, daß der Sinus DL und fH in dem Verhältniß der Refraction sind, so muß fH nothwendig der Sinus des gebrochenen Winkels seyn, da DL der Sinus des Neigungswinkels DML ist. Folglich wird auch fMH der gebrochene Winkel zu dem Neigungswinkel DML seyn, das heißt, der Lichtstrahl DM wird vermöge der Refraction im Punkt M gegen den Brennpunkt f gerichtet seyn.

Nun wird aber 1) nach den Gesetzen der Refraction der Strahl DM, nachdem er aus der Luft in Glas gefallen, nicht in der verlängerten Linie DM von M nach R fortgehen, sondern er wird sich brechen, und sich der Perpendiculairlinie LH nähern (§.110.); Er wird folglich zwischen der verlängerten Linie MR und dieser Perpendiculairlinie durchgehen.

2) Wenn er sich gegen den Brennpunkt f richtet, so wird der Neigungswinkel und der Refractionswinkel vollkommen so seyn, als sie nach den Gesetzen der Refraction seyn

 sollen,

(a) Man findet die Construction einer solchen Ellypse im §. 117.

sollen, das heißt, es wird DL : fH = 3 : 2 seyn. Denn DL : fH = AB : Ff. (§.41.) Nun verhalten sich aber AB : Ff = 3 : 2. (Constr.) Folglich verhält sich auch DL : fH = 3 : 2.

3) Wenn sich der Strahl DM nach einer andern Linie, als Mf wendete, so würde er mit der Linie LH, die auf der krummen Linie perpendiculair stehet, einen Winkel machen, der kleiner oder grösser wäre, als der Winkel fMH; Folglich würde auch der Sinus dieses Winkels grösser oder kleiner seyn, als der Sinus fH des Winkels fMH; Folglich könnte sich DL nicht zu diesem andern Sinus verhalten = 3 : 2. Um folglich dem Gesetze der Refraction zu folgen, muß der Strahl DM, wenn er aus der Luft ins Glas fällt, bey seinem Brechen nothwendig seine Richtung gegen den Brennpunkt f nehmen.

§. 116.

Zusatz. Da der Punkt M nach Belieben angenommen worden ist, so ist es klar, daß alle Strahlen, die auf diese gläserne Ellypsoide mit der Axe derselben parallel einfallen, sich in dem Brennpunkt f innerhalb diesem Körper vereinigen werden. Wenn man folglich aus dem Punkt f mit einem beliebigen Radius einen Cirkelbogen MSP beschreibt, welcher zwischen A und G durchgeht, so wird man ein Stück PAMSP von der erzeugenden Ellypse bekommen, welches durch das Herumdrehen um seine Axe einen Körper erzeugen wird, der vermöge seiner Eigenschaft alle Strahlen, die mit seiner Axe parallel einfallen, und aus der Luft durch ihn durchgehen, in einem einzigen Punct f in der Luft vereinigen wird.

Denn der Strahl OC wird, wenn er bey C aus der Luft ins Glas fällt, seine Richtung Cx verlassen, um derjenigen zu folgen, die ihn nach dem Brennpunkt f führt. (§. 115.) Da also der Punkt f das Centrum des Bogens MSP ist, so wird

wird diese letztere Richtung in einem von den Halbmessern dieses Bogens seyn. Es ist aber ein jeder Radius eines Cirkels gegen die Peripherie desselben perpendiculair. Folglich wird der Strahl OC, nachdem er in C gebrochen worden ist, perpendiculair auf dem Cirkelbogen MSP fallen, folglich wird er, wenn er aus dem Glase in die Luft fällt, von seiner Richtung Cf nicht abgebrochen werden. (Denn ein Lichtstrahl, der nach der Perpendiculairlinie aus einem Mittel in ein anders Mittel übergeht, leidet keine Refraction. (§. 113.) Folglich wird der Strahl OC, oder ein jeder anderer ihm ähnlicher, der sich bey dem Einfallen in das gegebene Glas gegen dessen Brennpunkt f gebrochen hat, auch noch bey seinem Ausfahren aus demselben in die Luft dahin gerichtet seyn. Man bekommt folglich durch diese Construction ein sehr vollkommnes Brennglas.

§. 117.

Erste Anmerkung. Um zu machen, daß die Axe AB einer Ellypse und die Entfernung ihrer Brennpuncte Ff in dem Verhältniß der Refraction gegen einander seyn, oder daß sich AB zu Ff verhalte = 3 : 2, darf man AB nur in 3 gleiche Theile theilen und AF und Bf so groß als die Helfte eines solchen Theils machen, so wird sich AB offenbar zu Ff verhalten wie 3 : 2. Nun ist es aber leicht, aus der grossen Axe und dem Brennpunkt einer Ellypse diese krumme Linie zu construiren. (Art. 2. §. 66.) Folglich . . . . .

§. 118.

Die zweyte Anmerkung. Die Erfahrung beweiset es, daß ein Glas bey sonst gleichen Umständen desto undurchsichtiger sey, um je dicker es ist. Es werden demnach die Brenngläser die Eigenschaft zu brennen vermuthlich in einem desto höhern Grade besitzen, je dünner sie sind. Dieses ist

eine Beobachtung, worauf Künstler, die diese Art von Gläser verfertigen, sehr aufmerksam seyn sollten.

§. 119.

Es werden hingegen alle Lichtstrahlen, welche aus dem Brennpunkt f durch die Luft auf das Glas PAMSP fallen, nach ihrem Durchgange mit der Axe AB parallel laufen.

Beweis. Der Strahl fM fällt aus der Luft in das Glas perpendiculair gegen die Cirkelfläche MSP und wird sich also daselbst nicht brechen. (§. 113.) Er wird also nur bey seinem Ubergange aus dem Glase in die Luft den Gesetzen der Refraction unterworfen seyn; und er wird sich im Brechen von der Perpendiculairlinie nach der Seite D entfernen. (§. 110.) Diese Brechung muß so beschaffen seyn, daß $DL : fH = 3 : 2$. (§. 112.) Nun verhält sich aber $AB : Ff = 3 : 2$. (Constr.) Folglich verhält sich $DL : fH = AB : Ff$. Wenn aber dieses geschiehet, so ist DM nothwendig mit der Axe AB parallel. (Nach dem umgekehrten Satz des §. 41.) Folglich . . .

§. 120.

Zusatz. Folglich werden die Strahlen eines leuchtenden Körpers, der in dem Brennpunkt f stehet, vermittelst eines solchen Glases auf eine sehr grosse Weite stark genug fortgepflanzet, um Gegenstände dadurch erkennen zu können.

§. 121.

Wir haben augenblicklich erst die Strahlen DM und OC . . . . (Fig. 63), die mit der Axe AB der Ellypsoide parallel laufen, so betrachtet, daß sie auf die erhabene Seite dieses Körpes fallen. Itzt wollen wir nun setzen, daß sie auf die hohle Seite PAM (Fig. 64.) immer noch mit der Axe AB parallel einfallen. Ich behaupte alsdann, daß wenn man aus dem Brennpunkt f mit einem Ra-

Radius der entweder grösser ist, als fA einen Cirkelbogen OST beschreibt, und man die Linien OP und TM, die eine Richtung gegen den Brennpunkt haben, ziehet, so wird durch das Herumwälzen der Figur OPAMTS um ihre Axe AB ein Körper erzeugt werden, wodurch die Strahlen, die von der Seite gegen f mit seiner Axe parallell einfallen, nachdem sie durch dieses Glas gegangen sind, so auseinander fahren werden, als wenn sie alle aus dem Punkt f gekommen wären.

Beweis. Nach der 63ten Figur erkennet man, vermöge der Gesetze der Strahlenbrechung, daß der Lichtstrahl RM, der parallel mit BA aus der Luft in Glas fällt, seine Direction verlassen werde, um sich nach der Linie MV gegen das Perpendikel HML der Ellypse zu brechen. (§. 110.) (*a*) das heißt, daß er sich so weit von seiner ersten Richtung von R gegen D entfernen werde, als er sich entfernte, da er von der Seite D nach R gieng. (Man setzt voraus, daß er einerley Mittel sey) Folglich ist die Entfernung oder der Winkel DMV so groß, als die Entfernung oder der Winkel RMf; Es ist aber fMD + RMf = 2 rechten Winkeln; folglich ist auch fMD + DMV = 2 rechten Winkeln: Folglich ist die Linie MV in der nemlichen graden Linie mit fM (Geometr.) Folglich werden sich die Strahlen RM, die auf die hohle Seite dieses elyptischen Glases mit der Axe desselben parallel einfallen, bey ihrem Ubergang in dasselbe von ihrer Richtung entfernen, oder sie werden so auseinander fahren, als wenn sie aus dem Brennpunkt f kämen.

Folglich wird der Lichtstrahl HM (Fig. 64.) wenn er aus der Luft in das Glas OPAMTS fällt, indem er durch die Höhlung dieses Körpers gehet, die Richtung MT annehmen, die nach dem Brennpunkt f, als dem Mittelpunkt des Cirkelbogens OST gehet. Folglich wird der Strahl MT perpendiculair auf den Cirkelbogen OST fallen, und daselbst

 keine

(*a*) Man nimmt in Gedanken in der 63ten Figur den Bogen MSP weg und läßt den Strahl RM sogleich auf die Ellypse stossen.

keine Refraction leiden. (§. 113.) Folglich wird er aus dem Glase in die Luft nach der Richtung TK gehen, welche, wenn sie verlängert wird, grade nach dem Brennpunkt f gehet. W. z. E. W.

§. 122.

Zusatz. Wenn also ein Auge einen Punkt eines beliebigen Gegenstandes, welcher sich in f befindet, deutlich erkennen kan, ihn aber in einer grössern Entfernung zu unterscheiden nicht im Stande ist, so wird man, da die Strahlen, die von einem sehr entfernten Objecte kommen, sinnlich parallel sind, (Note zum §. 158. der Parabel) so wird man, wenn man zwischen dem Auge und dem Objecte ein Glas, wie OPAMTS, setzet, dessen ellyptische Hohlung PAM gegen die Seite des Objects gekehrt ist, und dessen erhabene Cirkelfläche OST nach dem Auge zu lieget, und welches über diß seinen Brennpunkt in f hat, so wird man, sage ich, dieses dadurch verursachen, daß die Strahlen, die von diesem sehr entfernten Punkt kommen, solchergestalt in die Augen fallen werden, als wenn sie aus dem Brennpunkt f kämen, und man hat folglich auf diese Art ein Mittel für den bestimmten Fehler der Augen, das heißt, man wird für solche Personen ein vortrefliches Augenglas bekommen, die ein gar zu kurzes Gesicht haben.

Anmerkung. Dieses ist die vortrefliche Dioptrick des Cartesius. Durch dieses so eben angeführte und durch Hülfe des 7ten Zusatzes zum 6ten Hauptsatz der Ellypse im §. 41, den ich ausführlich erklärt habe, werdet ihr im Stande seyn, die ganze geometrische Lehre, die zum Verstande so schöner Erfindungen und zur Verbesserung der Telesskope und Mikroskope nöthig ist, hinlänglich einzusehen. Zu diesem füget ja noch dasjenige hinzu, was ich davon in dem Artikel von der Hyperbel erkläre, und wo ich mich bemühe, den Gebrauch dieser

krum-

krummen Linie in Verfertigung der Augengläser zu zeigen, dann könnet ihr anfangen das Werk des Cartesius selbst zu lesen.

Ohngeachtet er zuerst das wahre Gesetz von der Refraction entdecket hat, und ohngeachtet seine Dioptrick das erste Product in dieser Art ist und auf unwiderleglichen Grundsätzen sich stützet und ohngeachtet man nicht vermuthen solle, daß eine Wissenschaft bey ihrer ersten Entstehung sich sehr weit ausbreiten würde, so scheinet mir dennoch dieses das tiefsinnigste und erhabenste Werk zu seyn, welches über diese Materie bekannt gemacht ist. Ich mögte beynahe sagen, daß er das besondere Verdienst hat sie auf einmal erfunden und zu ihrer größten Höhe gebracht zu haben (*).

Abhandlung über die Entdeckung des Gesetzes der Strahlenbrechung.

§. 123.

Die Meinung, die man von der Fähigkeit einer Nation hat, trägt ohne Zweifel das mehrste dazu bey, sie ehrwürdig zu machen. Sie kann aber ihre Fähigkeiten nicht besser beweisen, als durch sinnreiche Entdeckungen, die auf die Bedürfnisse des menschlichen Geschlechts angewendet werden. Folglich ist es von einiger Wichtigkeit den wahren Urheber einer Erfindung zu kennen.

Die Dioptrick des Cartesius ward um das Jahr 1637 (a) öffentlich bekannt. Niemals hatte man in dieser Art etwas so sicheres in seinen Grundsätzen noch etwas so sinnreiches in seinen Folgerungen gesehen. Diese Materie hatte sich ihm unter einem so hellen Gesichtspunkte gezeiget, daß er fast zu

 der

(a) Man sehe das Leben des Cartesius vom Herrn Baillet.

(*) Ich berufe mich hier auf meine Anmerkung zum §. 112. B.

der Zeit sie ganz übersahn, da er zu ihr den Grund legte. Der Gelehrte findet darinn ein Licht, das ihn erleuchtet, dem Künstler wird die Hand geführt und dem ganzen menschlichen Geschlechte werden würkliche Vortheile dargeboten.

Sein System wird auf dem von uns schon angeführten Grundsatz gebauet. **Unter was für einem Neigungs- oder Einfallswinkel ein Lichtstrahl aus einem Mittel in ein anderes dichteres oder dünneres übergehet, so ist das Verhältniß des Sinus seines Neigungswinkels zum Sinus seines gebrochenen Winkels beständig das nämliche, oder, der Sinus eines Neigungswinkels verhält sich zum Sinus seines gebrochenen Winkels, wie der Sinus eines jeden andern Neigungswinkels zum Sinus seines gebrochenen Winkels.**

Cartes kam auf diesen Lehrsatz durch eine sehr sinnreiche und einfache und von der Geometrie unterstützten Theorie. Versuche bestätigten denselben und auf einmal ward die Kunst, das Gesicht zu verbessern, auf eine unfehlbare Methode gebracht. Eine Methode, wovon der französische Weltweise unwidersprechlich der Vater wäre, wenn der Neid nicht allem widerspräche.

Ich habe gegründete Einwürfe gegen die Männer, welche behauptet haben, daß er vielleicht dem **Willebord Snell** einem Holländer und Zeitverwandten des **Cartesius** etwas hierin zu verdanken habe. Zweifel können für feindselige Gesinnungen vortheilhaft seyn, aber die Vernunft können sie nicht überzeugen. Lasset uns zuerst bey denjenigen stille stehen, die ohne alle Ausnahme behauptet haben, daß Cartesius zuerst das Gesetz der Strahlenbrechung bekannt gemacht habe, ohne des Snells zu gedenken, in dessen Handschriften er, ihrer Behauptung nach, diese Entdeckung angezeigt gefunden hat.

Herr

Herr von Wolf thut dieses in seiner Dioptrick (*) Herr Chambers hat das nämliche in seinem Dictionaire Encyclopedique in englischer Sprache unter dem Wort Strahlenbrechung genau wiederhohlet. Herr von Voltaire hat es als bekannt angenommen; vermuthlich um Hrn. Newton desto mehr erheben zu können. Hier sind die Worte des französischen Dichters, die man auf der 91ten und 92ten Seite der ersten Ausgabe seiner **Elemente der newtonianischen Weltweisheit** lieset.

„Snellius erfand zuerst das beständige Verhältniß,
„ nach welchem sich die Lichtstrahlen in verschiedenen Mitteln
„ brechen. Man eignet diese Ehre dem Cartesius zu Denn
„ man leget immer dem angesehnsten Philosophen diejenige
„ Erfindung bey, die er öfters nur bekannt macht. Dieser
„ zieht seine Vortheile von den unbekannten Bemühungen des
„ andern und er vermehrt seinen Ruhm durch ihre Entde-
„ ckungen. Die Entdeckung des Snellius war übrigens ein
„ Meisterstück des Witzes."

Eine Beschuldigung von der Art verdiente wenigstens, daß man sie mit einigem Ansehen unterstüzte Da man aber nichts anführt, so halte ich mich gegen das Publicum verbunden die Mühe der Untersuchung auf mich zu nehmen.

(*) Dieses sind seine Worte in seinen *Elem. Dioptr.* §. 35. Constantem rationem esse sinuum angulorum inclinationis & refracti multiplici experimento detexit *Willebrordus Snellius*, quamvis non adverterit lineas, per quas rationem constantem explicavit, esse illorum angulorum sinus. Ex ejus scripto non edito eandem rationem constantem *non nominato Snellio* proposuit Cartesius, cui vulgo hoc inventum tribui solet. *Snellio* idem vindicat *Hugenius* cui constabat, *Cartesium* tractatum *Snellii* vidisse. Vielleicht thut Herr von Wolf hier dem Cartesius zu nahe, wie die Folge der Abhandlung zeigen wird, da selbst Hugenius ein Bedenken trägt, so apodictisch den Cartesius zu beschuldigen. B.

Es ist davon nicht die Frage, ob Snellius das Gesetz der Refraction habe erfinden können; auch selbst davon nicht, ob er es zuerst erfunden habe. So etwas ist man nie im Stande zu beweisen. Wie viele Entdeckungen sind entweder niemals oder zu spät bekannt geworden. Nur darauf kommt es an, daß man beweise, Cartesius habe seine Entdeckungen dem Snellius geraubet oder nicht geraubet. Wir wollen das, was geschehen ist, erzählen.

Herr Hygens sagt in seiner Dioptrick, daß Cartesius auf seiner Reise durch Holland zum Snellius gekommen sey (*a*). Dieser hätte viele eigene Handschriften über die Natur des Lichts bey sich liegen gehabt. Unter denselben wäre ein Gesetz der Refraction gewesen, welches dem durch den Cartesius 1637 bekannt gemachten, sehr nahe käme. Herr Hygens habe dieses Gesetz in den vorhandenen Handschriften gesehen, und Cartesius habe das seinige vielleicht daraus genommen.

Allein wenn Cartesius den Snellius sprach, so hat auch Snellius wiederum den Cartesius gesprochen. Einer war ein Freund vom andern. Und noch ist es unmöglich zu entscheiden, welcher den gelehrten Diebstahl begangen habe. Man bestimmt die Zeit nicht genau, wann diese Philosophen sich besuchten (*b*), noch dieses, ob auch diese Entdeckung von einer oder der andern Seite damals schon gemacht worden sey. So viel ist gewis, daß man zum erstenmal im Jahr 1637 davon reden hörte; Daß Cartesius dieselbe als seine Entdeckung in seiner Dioptrick bekannt machte, daß niemand

---

(*a*) Dieses ist meiner Meinung nach zweifelhaft. Man weiß es, mit welcher Genauigkeit und Weitläuftigkeit Herr Baillet die kleinsten Lebensumstände des Cartes angeführt habe. Dennoch findet man bey ihm nichts von dieser Zusammenkunft.

(*b*) Snellius starb im Jahr 1626. Siehe Baillets Leben des Cartesius.

mand sich dieselbe zugeeignet; Daß wie Voß 24 oder 25 Jahr nachher seine Abhandlung vom Licht herausgab, er darinn gestand, daß er dem Snellius viele schöne Beobachtungen schuldig sey, worunter sich auch diejenige befände, die man für einerley mit dem Satze des Cartesius hielte, daß Voß diesen Diebstahl dem französischen Philosophen im geringsten nicht vorgeworfen habe, ohngeachtet er sich wider seine Dioptrick erklärt hatte, und ohngeachtet er würklich mit ihm darüber im Streite lag; daß Herr von Leibnitz und Bernoulli von diesem Lehrsatze des Snellius nur nach der Versicherung des Voßius reden; und daß man endlich nicht weiß, wo sich des Snellius gedrucktes Buch von der Dioptrick befindet, ja daß man selbst nicht weiß ob es jemals gedruckt worden sey.

Wenn nun die Entdeckung des Snellius im Jahr 1637 schon bekannt gemacht gewesen wäre und man hätte sie in dem Werke des Cartesius wieder gefunden; Ist es denn nicht gewiß, ich rufe alle Welt zu Zeugen, ist es nicht offenbar, daß nach aller rechtmäßigen Art zu urtheilen, die Ehre dieser Entdeckung dem Snellius nach Verdienst würde zugeeignet worden seyn. Ist nun aber Cartesius der Zeit nach der erste, so erfordert es die natürliche Billigkeit, daß man ihn in seinem Besitze nicht durch ein Vielleicht beunruhige, sonst würde man unmöglich jemals auf den Besitz eines Eigenthums sich verlassen können.

Allein noch mehr! Männer von feinem Verstande entdecken aus der Methode, wie man in Untersuchungen verfährt, ob man auf eine Erfindung habe kommen müssen: So wie Cartesius in seine Materie hineindrang und sein Süjet behandelte, muste er nothwendig ein Licht darin aufstecken. Snellius gründete hingegen selbst nach dem Zeugnisse der Gegner des Cartesius seine Entdeckungen nur auf Versuche (*a*), deren äusserste Delicatesse in Ansehung der Solidität einen

(*a*) Quod profecto experientia ipsi notum erat *Hugenius* in *Dioptr.*

nen Verdacht erwecken könnte. Ich will nur ein Beyspiel anführen, welches Männern, die nur die Anfangsgründe der Geometrie wissen, sehr bekannt ist.

Es behauptet jemand, daß er eine auf Versuche gegründete Methode besitze, in einem jeden Cirkel ein regulaires 15 Eck zu beschreiben, daß ihm diese Methode allemal glücke und daß man zur Ueberzeugung nur die Probe machen dürfe. Allein wenn einer in dieser Operation nicht sehr geübt ist, so weiß man, daß unter zehn Versuchen oft nicht einer genau und nach aller Strenge eintrift. Wenn man sich folglich nur an die Erfahrung hält, so hat man 9 Grade der Gewisheit gegen 1 daß die gegebene Methode nicht genau ist.

Ich sehe hier ein einziges Mittel, alle Zweifel zu heben, die Hand des Künstlers gewiß zu machen und ihn immer auf den nämlichen Weg zu führen. Man muß durch eine hinlängliche Erklärung und durch einen sehr vollständigen Beweis seinen Verstand überzeugen. Wenn es ihm dann nicht gelingt, so kann er der Methode weiter keine Schuld geben, sondern allein die Art, sich derselben zu bedienen, anklagen. Dieses hat aber **Cartesius** gethan. Sein Satz ist ohne auf Versuche zu sehen, bewiesen. Folglich hat er noch in diesem Betracht den Vorzug des Genies vor **Snellius**.

Vielleicht wünscht der Leser zu wissen, wie man es beweise, daß der Satz des **Snells** beynahe der nämliche sey, welchen **Cartesius** behauptete. Es sey demnach NQTZ (Fig. L. Pl. 5.) der Durchschnitt eines rechtwinklichten mit Wasser angefüllten Gefässes. Auf dem Boden dieses Gefässes sind die Objecte C und T, wovon man die Perpendiculairlinien CG und TZ auf QT aufgerichtet hat. Man stelle ein Auge bey K in der Luft, so wird das Object C zum Beyspiel bis D in der Perpendiculairlinie CG erhöhet. Man ziehe durch den Einfallspunkt B in der brechenden Oberfläche die Linie KD und BC. Nun nennet **Snellius** BC den **wahren Licht-**

strahl

strahl, weil das Object ohne Wasser in C würde gesehen werden; BD nennet er aber den scheinbaren Lichtstrahl, weil das Bild von C in D, wo das Object nicht ist, nicht anders, als vermöge der Refraction erscheinen kann. Nachdem man nun aufs genauste die Strahlen BC und BD gemessen hat, so betrachte das nämliche Auge das dem vorigen ähnliche Object nach einer schiefern Lage, so wird man finden, daß sich dasselbe in der Perpendiculairlinie TZ nach V erhebe. Man messe nun den wahren Lichtstrahl RT und den scheinbaren RV. Itzt ist der Hauptsatz des Snellius dieser: Ich habe beständig gefunden, sagt er, daß unter jedem Neigungswinkel des wahren Strahls gegen QT der wahre Strahl BC zum scheinbaren BD sich verhalte, wie der wahre Strahl RT zu seinem scheinbaren RV. Cartesius behauptete, daß der Sinus eines Neigungswinkels eines Lichtstrahls, welcher durch ein dichteres oder dünneres Mittel geht, sich zum Sinus seines gebrochenen Winkels verhalte, wie der Sinus eines jeden andern Neigungswinkels zum Sinus seines gebrochenen Winkels. Es ist folglich nach dem Snellius bey jeder Lage des Auges der wahre Strahl und der darzu gehörige scheinbare, immer in einem beständigen Verhältniß. Nach dem Cartesius aber haben die Sinus des Neigungswinkels und gebrochenen Winkels diese Eigenschaft gegen einander.

Beym ersten Anblicke scheint zwischen diesen also ausgedruckten Sätzen ein grosser Unterschied zu seyn. Selbst Leibnitz, so durchdringend auch sein Verstand war, konnte nur mit einiger Mühe sie für einerley gelten lassen. Dennoch kann man mit einer besondern Leichtigkeit einen aus dem andern herleiten. Man ziehe durch die Punkte B und R die Perpendiculairlinien MH und OF auf die brechende Fläche NZ. Weil nun die Strahlen CB und TR in den Punkten B und R, wo sie in die Luft gehen, ihre Richtungslinien CA und TI verlassen und sich von den Perpendickeln MH und OF nach den Linien BK und RK, wovon die Linien BD und RV die Verlänge.

längerungen sind, wenden, (Beding); so ist es klar, daß HBC und FRT die Neigungswinkel sind; daß KBM oder HBD der gebrochene Winkel von HBC und KRO oder FRV der gebrochene Winkel von FRT sey.

Unter dieser Voraussetzung behaupte ich, daß, wenn man nach dem Snellius dieses Verhältniß annimmt, daß der scheinbare Strahl BD sich zum wahren Lichtstrahl BC verhalte, wie der scheinbare Lichtstrahl RV zum wahren Lichtstrahl RT; ich behaupte, sage ich, daß man alsdenn nachdem Cartesius dieses Verhältniß bekommen werde. Der Sinus des Neigungswinkels HBC verhält sich zum gebrochenen Winkel HBD, wie der Sinus des Neigungswinkels FRT zum Sinus des gebrochenen Winkels FRV.

Beweis. Es sey S das Zeichen des Sinus eines Winkels. Man betrachte die wahren und scheinbaren Strahlen in den Triangeln BCD und RTV, und erinnern sich, daß die Seiten des Triangels sich zu einander verhalten, wie die Sinus der gegenüber stehenden Winkel; Folglich daß BD : BC = S. BCD oder S. HBC : S. BDC oder S. BDG = S. HBD und RV : RT = S. RTV oder S. FRT : S. RVT oder S. RVZ = S. FRV. Nun verhält sich aber nach der Bedingung BD : BC = RV : RT; Folglich verhält sich S. HBC : S. HBD = S. FRT : S. FRV. W. z. E. W. (*)

Man kann hingegen den Satz des Snellius mit der nämlichen Leichtigkeit aus dem Satze des Cartesius herleiten. Allein,

(*) Dieses alles wird ohne Mühe verstanden werden, wenn man sich nur daran erinnert, daß die Wechselwinkel sich gleich sind, und daß 2 Winkel, die zusammen 180° ausmachen, gleiche Sinus haben: daß folglich für den Sinus eines stumpfen Winkels, der Sinus eines spitzigen genommen werden müsse, welcher das Complement zu 180° Grade von dem stumpfen Winkel ist. B.

Allein, weil man aus der Gleichheit der Wechselwinkel, die bey Parallellinien, wenn sie von einer andern graden Linie durchschnitten werden, entstehen, beweiset, daß die Summe der 3 Winkel in einem Triangel zween rechten Winkels gleich sey, folgt denn daraus, daß der Erfinder des ersten Satzes auch den lezten erfunden habe? Man könnte dieses selbst dann nicht einmal schliessen, wenn auch die beyden Sätze vollkommen identisch wären. Nicht selten fällt man, ohne mit einem andern seine Gedanken verglichen zu haben, auf die nämliche Wahrheit, indem man über einerley Gegenstand nachdenket. Oft geschiehet es sogar auf einerley Wege. Eine Sache, die mir selbst in diesem Werke verschiedentlich begegnet ist.

Dieses hätte meiner Meinung nach die Feder derjenigen, die hier den **Snellius** dem **Cartesius** entgegen setzen, zurückhalten sollen, daß nämlich die wahre oder vorgegebene Entdeckung des **Snellius** unter seinen Händen beständig unfruchtbar geblieben ist, und daß er nicht sehr tief in die Theorie der Strahlenbrechung eingedrungen ist. Da hingegen die Erfindung des **Cartesius** uns eine der schönsten und nützlichsten Wissenschaften, die jemals der menschliche Verstand erfunden hat, geschenket hat.

Mein Gewährsmann soll Herr **Hygens** seyn, dessen Mäßigung der Herr **von Wolf** und **von Voltaire** nicht nachgeahmet haben. Man durchlaufe die 2 und 3te Seite seiner lateinischen Dioptrick, die zu Amsterdamm 1728 gedruckt ist, so wird man finden, daß, nachdem er das Gesetz der Refraction des **Cartesius** angeführt, und etwas ähnliches dem **Snellius** beygelegt hat, daß er diese merkwürdige Worte hingesetzt: *Verum ad hanc Sinuum proportionem nequaquam attendit* Snellius *& usque adeo ab apparente imagine rem omnem pendere existimavit, ut etiam in radio perpendiculari effectum refractionis, seu, ut falso opinatur, decurtationem radii visorii agnoscat; deceptus*

tus eo quod etiam recta de super in vas aqua plenum inspicienti, fundus omni parte attolli videtur. Cujus rei vera causa ex radiis ad utrumque oculum tendentibus petenda erat (*). *Haec omnia, quae de refractionis inquisitione volumine integro Snellius exposuerat, inedita mansere, quae & nos vidimus aliquando, & Cartesium quoque vidisse* accepimus; *ut hinc*, fortasse *mensuram illam, quae in finibus consistit, elicuerit, qua in explicanda iride & vitrorum figuris investigandis felicissime est usus.*

Hieraus erkennet man die Behutsamkeit des Herrn **Hygens** in seinen Muthmassungen Der Satz des Cartesius kommt nach seiner und meiner Meinung mit dem Satze des **Snellius** überein. Allein dieser leztere hat niemals seine Aufmerksamkeit darauf gerichtet. *Nequaquam attendit.* Er hat selbst fälschlich behauptet, daß die perpendiculairen Lichtstrahlen sich brachen, *falso opinatur.* Das Werk des **Snellius** war noch nicht gedruckt, wie Herr Hygens davon redet, *inedita mansere*; Er versichert eine Handschrift davon gesehen zu haben, *vidimus*; Man habe es ihm gesagt, daß **Cartesius** sie auch gesehen habe, *accepimus Cartesium vidisse*; daß vielleicht das Gesetz des Sinus ꝛc. welches durch **Cartesius** entdecket worden, durch das Gesetz des **Snellius** hätte können veranlasset worden seyn *Fortasse elicuerit.* Das endlich **Cartesius** seine Entdeckung glücklich auf die Erklärung des Regenbogens, wie auch auf die Untersuchung der Gestalt der Gläser angewendet habe, die man bey Verfertigung der Augengläser, Mikroscope und Telescope wissen muß, *felicissime est usus.* Wir wollen daraus den Schluß ziehen, daß die Vermuthnngen zum Vortheil des Snellius im Grunde selbst nichts taugen und daß alle Beweise für den Cartesius streiten.

Gebrauch

(*) Man lese hierüber Smiths Lehrbegrif der Optick, §. 362. B.

Gebrauch der Ellypse in der Construction der Sprachröhre.

§. 124.

Wir haben im §. 154 der Parabel gesehen, daß diese krumme Linie zur Verfertigung einfacher Sprachröhre sehr bequem sey. Aber zur größten Vollkommenheit dieses Instruments ist sie nicht hinreichend. Die Schallstrahlen müssen nicht nur so genau, als möglich, gegen einen bestimmten Ort gerichtet seyn, worzu die Parabel vortrefflich ist, sondern es würde auch sehr vortheilhaft seyn, wenn die Luft in dem Sprachrohre ohne das Parallellaufen der Stimmlinien zu verhindern eine grössere Geschwindigkeit bekäme. Wenn man in eine hohle Paraboloide redet, so wird die Luft nur durch die Wände des Instruments aufgehalten und behält also Freyheit sich auszudehnen und wird folglich sehr wenig zusammen gedrückt. Folglich dehnet sie sich nach ihrer Federkraft auch langsam wieder aus, und trägt nichts zur Fortpflanzung der Stimme bey, so sehr uns die Kunst diese Verstärkung als möglich zeiget.

Um uns also der gesuchten Vollkommenheit zu nähern, so sey die Ellypsoide Af (Fig. 65) an der Paraboloide fT so angebracht, daß diese beyden Afterkegel einen gemeinschaftlichen Brennpunkt f haben, und daß der andere Brennpunkt der Ellypsoide in dem Mundstück an demjenigen Orte sey, in welchem man reden muß. Nun werden die Schallstrahlen Ab und Ac, die von dem Brennpunkt A auslaufen, bey ihrem Auffallen auf die Ellypsoide nach ihrem andern Brennpunkt f reflectirt (§. 36). Folglich wird ihre gegenseitige Wirkung auf einander sie hier verdichten. Von hier können sie nicht gegen A zurück gehen, weil die Stimme sie daran verhindert. Sie müssen sich also in d und g in die Paraboloide stürzen. Daselbst werden sie vermöge der Gestalt dieses Instruments eine Laufbahn ds und gr nehmen, die mit ihrer Axe AT parallel ist (§. 82 der Parabel), und sie werden mit

vereinten Kräften ein Wort weiter und genauer fortpflanzen, als wenn das Sprachrohr nur einfach wäre (*).

§. 125.

Nur Versuche können die Länge und Dicke der Ellypsoide wie auch das Verhältniß dieser 2 Grössen bestimmen. Wenn man aber einmal diesen Afterkegel erst bestimmt hat, so wird dadurch nothwendig die Grösse des 2ten bestimmt, den man sonst so lang machen kann, als es die Bequemlichkeit erlaubt. Denn da die Ellypsoide und die mit ihr verbundene Paraboloide einen gemeinschaftlichen Brennpunkt *f.* haben müssen, so ist die Ordinate oder die doppelte Ordinate an diesem Brennpunkt die nämliche in beyden kegelförmigen Körpern. Es ist aber die doppelte Ordinate am Brennpunkt einer Parabel immer dem Parameter dieser krummen Linie gleich, (§. 93 der Parabel) und ihre Construction richtet sich nach der Länge des Parameters (§. 24 Parab.). Folglich ist das 2te Stück des zusammen gesezten Sprachrohrs durch das erste bestimmt.

§. 126.

Künstler müssen zuweilen sehr kleine Theile bey dem Scheine einer Lampe, eines Wachsstocks oder eines ordentlichen Lichts bearbeiten, wo das unverstärkte Licht keine hinlängliche Erleuchtung gibt. Hier kann man sich ohne Vermehrung der Anzahl der Wachsstöcke, welches unbequem und theuer seyn würde, einer hohlen Ellypsoide bedienen, deren Wände sehr eben geglättet sind. Wenn man nun annimmt, daß dieser Afterkegel, von der Seite *f* abgekürzt sey, damit man den Brennpunkt desselben nach eigenem Belieben in der freyen Luft irgend wohin fallen lassen kann, so begreift man, daß die Strah-

(*) Hier kann mit Nutzen gelesen werden *Hasius Dissert. de Tuba Stentor.* und des Cassegrains Abhandl. in dem *Journ. de Savans* vom Jahr 1672. *p.* 131. des *Sturm. Colleg. curios* B

Strahlen eines leuchtenden Körpers, der in dem Brennpunkt A gesetzet und nach f reflectirt wird (§. 36) das Licht in diesem Punkt merklich verstärken und folglich verursachen werde, daß gute Augen Körper von ausnehmender Kleinigkeit daselbst erkennen können.

§. 127.

Dieser Afterkegel ist noch mit Nutzen in der künstlichen Construction des Echos von einer schwachen Stimme zu gebrauchen. Wenn man ein Gewölbe oder Decke eines Zimmers nach einer halben Ellypse verfertigte, so wird man dadurch jederman, der sehr leise in dem Brennpunkt A redet, mit aufmerksamen Ohren in dem Brennpunkt f hören, ohne daß Personen, die zwischen diesen Puncten stehen, noch weniger aber solche, die in einiger Entfernung davon sind, das geringste Wort verstehen können. Hiervon habe ich öfters die Erfahrung gehabt, so wohl in dem *Observatorium* zu Paris als bey dem Herr Pagni in eben dieser Stadt. Dieser Mann hat ein besonders Talent für alles, was physische Versuche betrift und er zeiget seine Geschicklichkeit mit sehr glücklichem Erfolg.

Die Ursache von dieser Würkung ist diese, daß die Schallinien Ab und Ac, die von dem Brennpunkt A auslaufen, bey dem Auffallen auf das Gewölbe oder der obern Krümmung nach dem andern Brennpunkt f, woselbst sich ein Ohr befinden muß, reflectirt werden. Ihre Wiedervereinigung in f ist also die Ursache, weswegen die leise Stimme, die aus dem Brennpunkt A kommt, in f gehört wird; da inzwischen in den übrigen Orten zwischen A und f, wo keine Vereinigung der Schallstrahlen geschiehet, diese nicht von der Stärke sind, die Ohren der Zuhörer zu erschüttern.

§. 128.

Gebrauch der Ellypsoide in Verfertigung der Hörröhre. Nach meiner Meinung ist eine ellyptische Röh-

re, die ungefehr der 66ten Figur ähnlich ist, viel geschickter zur Construction der Hörröhre, als die Paraboloide, deren im §. 157 der Parabel Erwähnung geschehen ist. Wenn man derselben überdies noch ein Mundstück gäbe, welches so genau, als wie bey dem Sprachrohre, an dem Munde des im Brennpunkt Redenden anschlösse, so würden die Schalllinien insgesammt an das Hauptstück dieses Instruments hinunter gehen müssen, und nachdem sie über die innere Wände *cd* nach dem andern Brennpunkt *f* reflectirt wären und sich daselbst verdichtet hätten, so würden sie nach ihrer Elasticität sich nur gegen die Seite des Windrohrs M ausbreiten können. Sie würden sich folglich dahin mit einer Heftigkeit begeben und daher im Stande seyn auf dem Trommelfelle des Ohrs eine mehr als gewöhnliche Erschütterung zu verursachen. Dieses ist aber die einzige Absicht bey einem solchen Instrument.

§. 130.

Ein solches ellyptisches Hörrohr scheinet mir vor dem parabolischen 2 Vortheile zu besitzen. 1) Weil das Mundstück einer Paraboloide sich nicht genau genug an den Mund anschließt, so läßt es eine grosse Anzahl von Schallstrahlen entwischen, die also nicht in das Hauptstück des Instruments gebracht werden. 2) Weil nur Parallelstrahlen genau nach dem Brennpunkt einer Parabel reflectirt werden. Es muß aber die Anzahl solcher Strahlen sehr klein seyn, indem sie fast immer aus dem Munde in Gestalt eines Büschels kommen und folglich im geringsten nicht parallel sind.

§. 131.

Gebrauch der Ellypse in der Verfertigung und Ausrechnung gedruckter Gewölber. Ein Gewölbe ist ein nach innen zu hohles Dach, welches seine Länge nach geründet ist, oder die Gestalt einer Arkade hat, und welches

von aussen fast wie die Figur BCGH aussieht (Fig. 67). Die Mauren, die es tragen, als ABHL, sind die Nebenpfeiler desselben und diejenigen, die es schliessen, die Zinnen. Man kann so viele Arten von Gewölbern haben, als es Arten von krummen Linien giebt, die immer nach einer Seite hohl sind. Die gewöhnlichsten sind die Cirkelförmigen Gewölber, die Klostergewölbe und die gedruckten Gewölbe. Cirkelförmige Gewölbe sind diejenigen, deren vertikaler Durchschnitt BMC ein halber Cirkel ist. Denn das Gewölbe fängt sich nur von der Horizontallinie BC an, die man auch deswegen den Anlauf des Gewölbes zu nennen pflegt. In dem Klostergewölbe ist dieser Durchschnitt beynahe Triangelförmig, und in den gedruckten Gewölben, mit welchen man es hier zu thun hat, ist die Figur eine halbe Ellypse.

§. 132.

In Ansehung der Construction der Gewölber muß man wissen, daß sie aus Gewölbesteinen zusammen gesetzt werden. Dieses sind Steine oder eine andere Materie, die in Gestalt abgekürzter Kegel geschnitten sind, und den Gewölbebogen oder den Umfang eines Gewölbes zu machen im Stande sind. Folglich muß der äusserste Umfang eines jeden Gewölbesteines, der die innere Fläche eines gedruckten Gewölbes ausmacht, nach einem ellyptischen Bogen so gehauen seyn, daß die vereinigte äusserste Flächen aller Gewölbsteine eine halbe Ellypse vorstellen, deren grosse Axe der Anlauf des Gewölbes BC ist. Wir haben aber (§. 66) gesehen, wie man eine Ellypse beschreiben könne. Man kan also den Gewölbesteinen eine ellyptische Gestalt geben um dadurch ein Gewölbe zu construiren; welches um so viel gedruckt ist, um wie viel die kleine Axe kleiner ist als die grosse Axe (*a*).

(*a*) Wenn es die Umstände erlauben, so werde ich die Materie von den Gewölben in einem andern Werke gründlicher abhandeln.

§. 133.

Man berechnet den körperlichen Inhalt oder das Mauerwerk dieses Gewölbes, wenn man anfänglich die Oberfläche der halben Ellypse BOCB (Zusatz des §.68. oder §.74.) bestimmt. Darnach muß man sie durch die Linie BH, die die ganze Länge des Gewölbes zwischen den Zinnen anzeigt, und die eben deswegen von den Baumeistern die Länge des Werks genennet wird, multipliciren. Dieses Product gibt den körperlichen Innhalt des Gewölbes, wenn man es ganz als einen durchaus dichten Körper betrachtet. Allein man muß den Innhalt der Hohlung, deren Durchschnitt die innere halbe Ellypse BMCB ist, davon abziehen. Man muß diese halbe Ellypse durch die nämliche Länge des Gewölbes multipliciren, so bekommt man den Innhalt der Höhlung dieses Gewölbes. Der Rest, der nach dem Abzuge dieser Höhlung von dem ganzen Gewölbe übrig bleibt, ist der körperliche Innhalt des Gewölbes selbst, dessen Dicke zwischen den zwey Linien BOC und BMC enthalten ist. (*)

Ich übergehe hier die Ausrechnung der Nebenpfeiler und der Zinnen. Sie sind Parallelepipide, die sich leicht nach der gemeinen Geometrie berechnen lassen.

Von

deln. Ich werde in demselben die Anwendung der krummen Linien auf den Steinschnitt zeigen. Das, was ich hier sage, soll uns zum voraus zeigen, wie nothwendig es in der Baukunst sey eine Ellypse zu beschreiben, oder deren Oberfläche zu berechnen.

(*) Ich empfehle bey dieser Materie dem wißbegierigen Leser folgende Bücher aufs nachdrücklichste: Belidors Ingenieurwissenschaft und *Camus Cour de Math.* T. III. Pars I. Sie werden in diesen zwey Werken alles finden, was sie unterrichten und vergnügen kann. Eines Freziers, Durands und anderer, die eigentlich vom Steinschnitt vortreflich geschrieben haben, erwähne ich hier nicht. B.

Von der Hyperbel.

§. 1.

Erklärung. Es sollen die Cirkel RST und LMV (Fig. 68.) unter sich parallel seyn, und sie sollen den Axentriangel eines Kegels ERT perpendiculair durchschneiden. Wir wollen auch dieses voraus setzen, daß durch den nämlichen Kegel eine andere Fläche solchergestalt gegen den Triangel ERT perpendiculair gehe, daß dadurch die beyden Cirkelflächen RST und LMV, wie auch die Seite ET des Kegels durchschnitten werde, und daß sie verlängert auch den entgegengesetzten Kegel E*yx* durchschneide: alsdann wird dadurch ein 3ter Durchschnitt OBS entstehen, dem die Alten den Namen der Hyperbel gegeben haben. Wir werden die Ursache davon im §. 39 anzeigen.

§. 2.

Erster Zusatz. Es ist aus der Construction und aus allem dem, was wir zu Anfange der Parabel und der Ellypse gesagt haben, klar, daß OS gegen den Diameter RT und gegen den gemeinschaftlichen Durchschnitt BG der Hyperbel und des Axentriangels perpendiculair sey, und daß sie folglich bey G in 2 gleiche Theile getheilt werde. Aus den nämlichen Gründen ist MH gegen den Diameter VL und gegen BG perpendiculair, und wird auch in P in 2 gleiche Theile getheilt. Wenn man solchergestalt mehr Cirkelschnitte, wie LMV zwischen dem Scheitelpunkt B der Hyperbel und der Basis RST des Kegels macht, so werden alle gemeinschaftliche Durchschnitte dieses Cirkels und der Hyperbel in 2 gleiche Theile getheilt, und sind gegen BG, als dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Hyperbel und des Axentriangels perpendicnlair. Eben dieses gilt auch von OS und HM.

§. 3.

Zweyter Zusatz. Weil folglich OS, MH und alle andere gemeinschaftliche Durchschnitte durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt BG in 2 gleiche Theile getheilt werden, und auch gegen diesen gemeinschaftlichen Durchschnitt perpendiculair sind, so folgt daraus, daß BG die Axe der Hyperbel sey. (Nach der Erklärung, die wir davon bey der Parabel und der Ellypse gegeben haben.) Die Linien PM oder PH, GS oder OG sind die **Ordinaten**; BP und BG die **Abscissen**. Ferner heißt der Theil AB von der Axe, die bis A verlängert ist, wo sie den entgegengesetzten Kegel berührt, die **Zwerchaxe** oder die erste **Axe** gegen eine 2te Axe, die wir sogleich bestimmen wollen. Man nennet das **Centrum** der Hyperbel den Mittelpunkt C der Zwerchaxe. Endlich werden wir einen jeden Theil AP oder AG der verlängerten Axe, welche zwischen dem Punkt P oder G, wo eine Ordinate die Axe berührt, sich befindet, die **aufgefangene Axe** (axe intercepté) nennen.

§. 4.

Erster Hauptsatz. In einer Hyperbel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten unter einander, wie die Rechtecke aus den Abscissen und der correspondirenden aufgefangenen Axe, oder $\overline{GS}^2 : \overline{PM}^2 = BG \times AG : BP \times AP$.

Beweis. Wegen der ähnlichen Triangel AGR und APL ist $AG : GR = AP : PL$. (M) und der ähnlichen Triangel BGT und BPV wegen ist $BG : GT = PB : PV$ (N). Wenn man folglich die Verhältnisse M und N nach der Ordnung ihrer Glieder durch einander multiplicirt, so ist $BG \times AG : GT \times GR = BP \times AP : PV \times PL$, oder verwechselt $GT \times GR : PV \times PL = BG \times AG : BP \times AP$ (Q). Nach der Natur des Cirkels ist aber $GT \times GR = \overline{GS}^2$ und $PV \times$

PL

$PL = \overline{PM}^2$. Wenn man folglich diese Werthe in dem Verhältniß Q setzet, so ist $\overline{GS}^2 : \overline{PM}^2 = BG \times AG : BP \times AP$. W. z. E. W.

§. 5.

Erster Zusatz. Aus dieser Eigenschaft der Hyperbel folgt, daß sie eine krumme Linie sey. Dieses muß, wie im §. 9 der Parabel geschahe, auch für die Hyperbel bewiesen werden.

§. 6.

Zweyter Zusatz. Wenn man die Fläche, wodurch die Hyperbel LBM entstanden ist, von der Seite A verlängert, (Fig. 69) so wird sie in dem entgegen gesetzten Kegel einen andern Durchschnitt *l*A*m* erzeugen, welcher nicht nur eine Hyperbel vermöge ihrer Definition seyn wird, sondern sie wird auch ganz genau der Hyperbel LBM gleich und ähnlich seyn. Diese zwo Hyperbeln heissen zusammen genommen **entgegen gesetzte Hyperbeln.**

Beweis. Um die Gleichheit und Aehnlichkeit dieser Hyperbeln zu beweisen, dürfen wir nur zeigen, daß die Ordinaten, die in gleicher Weite von dem Scheitelpunkt dieser krummen Linie in einer jeden gezogen werden, sich vollkommen gleich sind. Und da man die Richtigkeit hievon sogleich erkennen wird, wenn der Schnitt T*t* mit der Axe OQ parallel ist, so wollen wir den schwersten Fall vor uns nehmen; nemlich, wenn bey einem ungleichseitigen Triangel die Axe OQ gegen die entgegen gesetzten Bases DH und *dh* schief stehen, und wenn der Durchschnitt P*p*, der die entgegen gesetzte Hyperbel hervor bringt, nicht mit der Axe OQ parallel ist. Ziehet man deswegen die Linie *sf* durch den Scheitelpunkt mit dem beschreibenden Durchschnitt P*p* parallel, und macht die Abscisse B*r* so groß, als die Abscisse A*p*, so hat man nur zu zeigen, daß die correspondirenden Ordinaten *ri* und *pm* sich gleich sind.

Weil Cf mit BP parallel ist (Constr.), so ist der ähnlichen Triangel BPH und CfH wegen $BP : PH = Cf : fH$ (M) und wegen der ähnlichen Triangel APD und CfD ist $AP : PD = Cf : fD$ (N). Wenn man folglich die Glieder dieser zwey Verhältnisse M und N der Ordnung nach durch einander multiplicirt, so ist $BP \times AB : PH \times PD$ oder $\overline{PM}^2 = \overline{Cf}^2 : fH \times fD$ (L).

Bemerket itzt, da die entgegengesetzten Kegel CDH und Cdh gleiche homogene Seiten haben, nemlich, da $CD = Cd$ und $CH = Ch$ und der Winkel $DCH = dCh$, daß auch die Basis $DH = Dh$. Hieraus erhellet, daß $fH = sh$, $Cf = Cs$ und $fD = sd$.

Da nun die Triangel ApD und CsD sich ähnlich sind, so verhält $Ap : pD = Cs : sd = Cf : fD$. Folglich ist $Ap : pd = Cf : fD$ (N) Es verhalten sich aber auch der ähnlichen Triangel Bph und Csh wegen $Bp : ph = Cs : sh = Cf : fH$; Folglich ist $Bp : ph = Cf : fH$ (K). Wenn man folglich die Glieder dieser 2 Verhältnisse H und K der Ordnung der Glieder nach durch einander multipliciret, so verhält sich $Ap \times Bp : pd \times ph$ oder $\overline{pm}^2 = \overline{Cf}^2 : fH \times fd$ (T). Wenn man folglich die beyden Verhältnisse L und T mit einander vergleichet, so ist $Ap \times Bp : \overline{pm}^2 = BP \times AP : \overline{PM}^2$: Nun verhält sich aber (§. 4) $BP \times AP : \overline{PM}^2 = Br \times Ar : \overline{ri}^2$; Folglich ist $Ap \times Bp : \overline{pm}^2 = Br \times Ar : \overline{ri}^2$ oder verwechselt $Ap \times Bp : Br \times Ar = \overline{pm}^2 : \overline{ri}^2$. Es ist aber $Ap = Br$ (Constr.); Folglich ist auch $Bp = Ar$, und also auch $Ap \times Bp = Br \times Ar$. Folglich ist $\overline{pm}^2 = \overline{ri}^2$ oder $pm = ri$. W. z. E. W.

§. 7.

Zweyter Hauptsatz. Nachdem man (Fig. 68) eine

eine 4te Proportionallinie tt zu den 3 Grössen $BP \times AP$, $\overline{PM}^2$ und $\overline{AB}^2$ (*a*) gefunden hat, so suche man eine andere 4te Proportionallinie pp zu 3 beliebigen ähnlichen Grössen in der Hyperbel $BG \times AG$, $\overline{GS}^2$, $\overline{AB}^2$: Nun behaupte ich, daß man jederzeit zur 4ten Proportionalgrösse die nämliche Grösse finden werde, oder daß $tt = pp$.

Beweis. Nach dem ersten Hauptsatz verhält sich $BP \times AP : BG \times AG = \overline{PM}^2 : \overline{GS}^2$ oder verwechselt, $BP \times AP : \overline{PM}^2 = BG \times AG : \overline{GS}^2$. Vermöge der Bedingung verhält sich aber $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : tt$. Folglich verhält sich $\overline{AB}^2 : tt = BG \times AG : \overline{GS}^2$. Nun verhält sich nach der Bedingung $BG \times AG : \overline{GS}^2 = \overline{AB}^2 : pp$. Folglich ist auch $\overline{AB}^2 : tt = \overline{AB}^2 : pp$ und also ist $tt = pp$. W. z. E. W.

§. 8.

Zusatz. Das Quadrat tt als eine 4te Proportionalgrösse zu einem Rechteck aus einer jeden Abscisse BP einer Hyperbel und der aufgefangenen Axe AP, zu dem Quadrat der darzu gehörigen Ordinate PM und zu dem Quadrat ihrer Zwerchaxe AB ist selbst und also dessen Wurzel t eine beständige Grösse.

* §. 9.

(*a*) Um das Quadrat tt als die 4te Proportionalgrösse zu finden, muß man Rechteck $BP \times AP$ in ein Quadrat DD verwandeln, indem man eine mittlere Proportionallinie D zwischen BP und AP suchet. Wenn man darauf die 4te Proportionallinie t zu den 3 Grössen D, PM, AB suchet, so wird diese die Seite des gesuchten Quadrats seyn. Denn weil $D : PM = AB : t$, so verhält sich auch DD, oder $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : tt$. W. z. Th. u. z. E. W.

§. 9.

Anmerkung. Um im Kegel die Grösse t zu finden (Fig. 69) darf man nur eine Fläche durch den Scheitelpunct C mit dem erzeugenden Durchschnitt Pp parallel und gegen den Axentriangel CDH perpendiculair gehen lassen, das heißt, man darf nur Cf mit Pp parallel und die Ordinate fe am Cirkel ziehen. Denn es wird die 4te Proportionalgrösse p zu den 3 Grössen Cf, fe und AB der Werth von t seyn. Es ist also zu beweisen, wenn man dieses Verhältniß hat $CF : fe = AB : p$, daß $p = t$ sey.

Beweis. Vermöge der Bedingung verhält sich $Cf : fe = AB : p$. Folglich ist $\overline{Cf}^2 : \overline{fe}^2 = \overline{AB}^2 : pp$. Nun verhält sich aber $\overline{Cf}^2 : fH \times fD$ oder $\overline{fe}^2 = BP \times AP : \overline{PM}^2$ (§. 6) Folglich ist $\overline{AB}^2 : pp = BP \times AP : \overline{PM}^2$. Nach der Bedingung verhält sich aber $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : tt$. Folglich auch $\overline{AB}^2 : pp = \overline{AP}^2 : tt$. Daraus erhellet, daß $pp = tt$.

§. 10.

Erklärung Weil folglich die Hyperbel vermöge ihrer Entstehung sich auf einer Fläche gezeichnet befindet, so lasset uns die Grösse t = GCD (Fig. 70) auf diese Fläche so ziehen, daß wenn sie auf die Mitte C der Zwerchaxe AB Perpendiculair zu liegen kommt, sie durch diese Axe in 2 gleiche Theile getheilet werde. Diese so bestimmte Linie nennet man in Ansehung der Zwerchaxe, die zweyte Axe. Jene erhält alsdenn den Namen der ersten Axe. Auch werden sie noch von den Geometern, gegen einander betrachtet, **conjugirte Axen** genennet. Und wenn diese 2te Axe von einer oder andern Seite unbestimmt verlängert wird, so heißt sie die **unbestimmte 2te Axe.**

* §. 11.

Erster Zusatz. Weil die entgegengesezte Hyperbeln gleich und ähnlich sind (§. 6) und man macht die Absciße, $Ax = BP$ und verbindet alsdenn die Endpunkte M und m, so wird diese Linie mit der ersten Axe AB parallel laufen und durch die, nach Umständen verlängerte 2te Axe GD in 2 Theile getheilet werden. Denn da die Abscißen BB und Ax sich gleich sind (Beding) so werden die Ordinaten PM und xm, die gegen die nämliche Linie Px perpendiculair sind (Constr) es gleichfalls seyn (§. 6). Folglich wird Mm mit Px oder mit der ersten Axe AB parallel seyn; Folglich $Mm = Px$. Nun wird aber Px durch die 2te Axe GD in 2 gleiche Theile getheilet; Folglich wird es Mm gleichfalls, wenn die 2te Axe nach Nothdurft verlängert wird.

§. 12.

Zweyter Zusatz. Eine jede Linie Mm, die durch einen beliebigen Punkt M einer Hyperbel nach der entgegengesezten Hyperbel gezogen wird, wird durch die nach Erforderniß verlängerte 2te Axe in 2 gleiche Theile getheilet.

Um sich davon zu überzeugen lasse man von den Punkten M und m die Ordinaten MP und mx fallen. Diese sind sich gleich, weil nach der Bedingung Px und Mm parallel sind. Sind sich aber die Ordinaten gleich, so sind die Abscißen BP und Ax es auch; Folglich ist $Cx = CP$. Es sind aber die Figuren $mNCx$ und MPCN Parallelogramme (Constr.); Folglich ist $mN = Cx = CP = NM$. Folglich ist $mN = NM$.

Wenn aber Mr nicht mit der ersten Axe parallel wäre, so könnte sie nicht wie Mm durch die 2te Axe in 2 gleiche Theile getheilet werden. Denn diese Linie würde auf der einen oder der andern Seite von Mm fallen. Nun kann sie aber in beyden Fällen durch GD nicht in 2 gleiche Theile getheilet werden. Es wäre nämlich, wenn man Mm mit der Axe AB parallel

parallel zöge $mN = NM$, (nach dem vorigen Beweise); Wäre also $Mt = tr$, so verhielte sich $MN : Nm = Mt : tr$, und wenn man folglich mr zöge, so würde sie mit Nt oder GD parallel seyn (Geometrie); Es ist aber mx auch mit GD parallel (Constr.); Folglich würde mr mit mx parallel seyn, welches unmöglich ist. Folglich u. s. w.

* §. 13.

Dritter Zusatz. Deswegen ist der umgekehrte Satz im 2ten Zusatze wahr, oder eine jede Linie, die von einem Punkte einer Hyperbel nach der entgegengesezten Hyperbel gezogen und durch die 2te Axe in 2 gleiche Theile getheilet wird, ist nothwendig mit der Axe parallel, weil, wenn sie nicht parallel wäre, sie auch durch die 2te Axe nicht in 2 Theile getheilet werden könnte (§. 12). Dieses ist aber wider die Bedingung.

§. 14.

Anmerkung. Da die Linien, die mit der ersten Axe parallel laufen, durch die zweyte Axe in 2 gleiche Theile getheilet werden, so werden auch die Linien, die mit der 2ten Axe parallel sind, durch die erste in 2 gleiche Theile getheilet. Deswegen nennen die Geometer diese Axen conjugirte Axen. Man erkennet auch, warum man die Linie AD von unbestimmter Länge, die auf der Mitte der ersten perpendiculair aufgerichtet ist, die unbestimmte 2te Axe nennet. Weil sie nämlich alle Linien, die gegen sie perpendiculair sind, und von dem entgegengesezten Hyperbelu bestimmt werden in 2 gleiche Theile theilet, deswegen sind auch solche Linien wie MN und Nm Ordinaten der 2ten Axe.

§. 15.

Dritter Hauptsatz. Es verhält sich das Rechteck aus einer jeden Abscisse BP und ihrer aufgefangenen Axe AP zu dem Quadrat der correspondirenden Ordinate PM, wie das Quadrat der ersten Axe AB zum Quadrat der 2ten Axe GD, oder wie das Quadrat der Helfte BC der ersten Axe zum Quadrat

drat der Helfte CD der 2ten Axe. Folglich ist dieses Verhältniß als richtig zu beweisen $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{GD}^2$ oder $\overline{BC}^2 : \overline{CD}^2$.

Beweis. Dieses ist vermöge des 2ten Hauptsatzes evident (§. 7), in welchem man gezeiget hat, daß, in welchem Punkte der Axe man auch die Ordinate nähme, man jederzeit zu den 3 Grössen $BP \times AP$, $\overline{PM}^2$ und $\overline{AB}^2$ einerley 4te Proportionalgrösse finde. Nun ist aber die 2te Axe GD die Quadratwurzel dieser 4ten Proportionalgrösse (§. 10) oder $GD = t$ oder $\overline{GD}^2 = tt$; Folglich verhält sich $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{GD}^2$. Es verhält sich aber auch $AB : GD = BC : CD$, oder $\overline{AB}^2 : \overline{GD}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{CD}^2$. Folglich auch $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{CD}^2$. W. z. E. W.

* §. 16.

Anmerkung. Wenn der Durchschnitt eines Kegels mit seiner Axe parallel geschieht, oder wenn Tt mit der Axe OQ parallel ist (Fig. 69), so werden

1) Ohngeachtet $Ch > CD$ und $Ca > Cb$ ist, dennoch die beyden entgegengesezten Hyperbeln Nbx und nay eine jede die Basis in gleicher Weite von dem Scheitelpunkt erreichen, oder es wird $at = bT$ seyn:

2) Die Entfernung des T von dem Centrum O ist der Helfte der Axe der Hyperbel gleich.

3) Die Linie bK, die mit dem Diameter DH parallel gezogen ist, ist so groß, als die 2te Axe der Hyperbel, oder $bK = 2\,TO$.

Beweis. Lasset uns CV mit DH parallel ziehen, so verhält sich der beyden ähnlichen Triangel COH und aVC wegen $CO : OH = aV : VC$. und wegen der ähnlichen Triangel CQD und CbV ist $CO : OD$ oder $OH = Vb : VC$; Folglich $aV : VC = Vb : VC$. Folglich ist ~~AV~~ (aV) $= Vb$. Allein

Allein wegen der Parallellinien CV und DH und OQ und T*t* und da CO = CQ ist, so ist auch V*t* = VT oder *a*V + *at* = V*b* + *b*T. Weil nun *a*V = V*b*, so ist auch *at* = *b*T. W. d. E. W.

2) Der ähnlichen Triangel *b*TD und *b*VC wegen verhält sich *b*T : TD = V*b* : VC und wegen der ähnlichen Triangel *a*TH und *a*VC ist *a*T : TH = *a*V oder V*b* : VC; Wenn man folglich diese 2 Verhältnisse der Ordnung der Glieder nach durch einander multiplicirt, so ist $bT \times aT : TD \times TH$ oder $\overline{TN}^2 = \overline{Vb}^2 : \overline{VC}^2 = 4\overline{Vb}^2 : 4\overline{VC}^2 = \overline{ab}^2 : 4\overline{VC}^2$ (denn *ab* ist = 2V*b*, und also $\overline{ab}^2 = 4\overline{Vb}^2$); Folglich verhält sich $bT \times aT : \overline{TN}^2 = \overline{ab}^2 : 4\overline{VC}^2$. Folglich da $4\overline{VC}^2$ das Quadrat der 2ten Axe ist (§. 7. 10), so ist 2VC die 2te Axe und VC ist die Helfte der 2ten Axe. Nun ist VC = TO. Folglich ist TO die Helfte der 2ten Axe. W. d. 2te W.

3) CO : OD = CG : *b*G und CO : OH oder OD = CG : GK : Folglich ist CG : *b*G = CG ; GK; Folglich ist *b*G = GK = VC. Folglich ist *b*G + GK = *b*K = 2VC = 2TO = der 2ten Axe. W. d. 3te W.

§. 17.

Erster Zusatz. Setzet man folglich (Fig. 70) AB $= 2a$; CA = CB $= a$; GD $= 2b$; CG = CD $= b$; PM $= y$; CP $= x$; BP = CP − CB $= x - a$; AP = CP + CA $= x + a$; Folglich BP × AP $= (x - a)(x + a) = xx - aa$: So wird das Verhältniß im §. 15, $BP \times AP : \overline{PM}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{CD}^2$ analytisch ausgedruckt folgendes werden $xx - aa : yy = aa : bb$. Hieraus folgt, daß $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$. Dieses ist die Gleichung für die Hyperbel, in Vergleichung gegen ihre Axen.

* §. 18.

* §. 18.

1. **Anmerkung.** Diejenige Hyperbel heißt eine gleichseitige, deren Axen sich gleich sind oder diejenige, in welcher $a = b$. Folglich wird aus der allgemeinen Gleichung $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, als welche für alle Hyperbeln gilt, diese, die nur für die gleichseitigen gilt: $xx - aa = yy$. Diese zeiget an, daß in der gleichseitigen Hyperbel das Quadrat der Ordinate y einem Rechteck aus der aufgefangenen Axe $x + a$ und der Abscisse $x - a$ gleich sey.

* §. 19.

Zwote Anmerkung. Wie kann man aber im Kegel die gleichseitige Hyperbel finden? Man darf nur annehmen, daß der Kegel CDH (Fig. 69) bey C rechtwinklicht sey, oder daß der Winkel DCH an der Spitze ein rechter Winkel sey, so wird die Hyperbel Nbx eine **gleichseitige** werden. Man setzt immer voraus, daß Tt mit der Axe OQ des Kegels parallel sey.

Beweis. Da der Winkel DCH ein rechter Winkel ist, so wird es der Winkel bCa auch seyn. Wenn man folglich aus der Mitte V der Zwerchaxe ab mit dem Radius Va oder Vb einen Cirkel beschreibet, so wird die Peripherie nothwendig durch den Punkt C gehen; Folglich wird CV in diesem Falle ein Radius dieses Cirkels seyn. Folglich ist Va = VC oder 2Va = 2VC = 2TO. Es ist aber 2Va = der ersten Axe ab und 2TO = der 2ten Axe bK (§. 16. n° 3). Folglich sind die beyden Axen sich gleich. Wenn also der Kegel rechtwinklicht ist und der Durchschnitt mit der Axe des Kegels parallel geschiehet, so entstehet daraus eine gleichseitige Hyperbel.

* §. 20.

Dritte Anmerkung. Wenn der Winkel DCH an

Aa der

Spitze des Kegels ein stumpfer Winkel ist und der Durchschnitt Tt mit der Axe dieses Körpers parallel ist, so ist die 2te Axe 2VC > als die erste Axe 2aV. Wenn aber der Winkel DCH ein spitziger ist, so ist die erste Axe 2aV > als die 2te Axe 2VC.

Beweis. 1) Wenn der Winkel DCH ein stumpfer Winkel ist, so wird der Winkel bCa ein spitziger seyn; wenn man folglich aus dem Punkt V über die erste Axe $ab = 2a$V einen Cirkel beschreibet, so wird die Peripherie dieses Cirkels die Linie VC diesseits C von V angerechnet durchschneiden. Folglich ist VC > aV oder 2VC > 2aV oder die 2te Axe ist > als die erste.

2) Wenn der Winkel DCH ein spitziger ist, so wird der Winkel bCa ein stumpfer seyn. Folglich wird die Peripherie eines dem vorigen ähnlichen Cirkels jenseits C durchgehen, und folglich wird aV > VC oder 2aV > 2VC seyn. Dieses zeiget an, daß in dem lezten Fall die erste Axe grösser als die 2te ist.

Man kann also bey dieser Art von Kegelschnitten allemal aus der Beschaffenheit des Winkels an der Spitze des Kegels schliessen, ob die Axen sich gleich sind oder nicht, und wenn sie ungleich sind, welche von beyden die größte sey.

§. 21.

Zweyter Zusatz. Weil (§. 17) $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ (Fig. 70), so ist $xx = \frac{aayy}{bb} + aa = \frac{aayy + aabb}{bb}$. Dieses ist der Ausdruck für das Quadrat von xx der undeterminirten Linie CP der ersten Axe oder der Ordinate MN der zweyten Axe.

Anmerkung. Ich erinnere es ein für allemal, daß man

man auf diesen Ausdruck für das Quadrat der undeterminirten Linie CP der ersten Axe, wie auch auf folgenden Ausdruck aufmerksam seyn müsse, weil wir durch sie in der Folge sehr bequem die andern Eigenschaften der Hyperbel entdecken können.

§. 22.

Dritter Zusatz. Ist also $xx = \frac{aayy + aabb}{bb}$, so ist $xx \times bb = (yy + bb) \times aa$. Hieraus fließt folgendes Verhältniß $xx : yy + bb = aa : bb$ oder $= 4aa : 4bb$, das heißt, wenn man auf der 2ten Axe die Ordinate MN = CP $= x$ ziehet, und erwägt, daß die Abscisse CN der 2ten Axe $= PM = y$, so wird man finden, daß das Quadrat xx $(\overline{MN}^2)$ einer jeden Ordinate MN von der 2ten Axe sich zur Summe der Quadrate $yy + bb$ $(\overline{CN}^2 + \overline{CD}^2)$ ihrer correspondirenden Abscisse CN und der Helfte CD der 2ten Axe verhalte, wie das Quadrat aa von der Helfte der ersten Axe zum Quadrat bb von der Helfte der 2ten oder wie das Quadrat $4aa$ von der ersten Axe zum Quadrat $4bb$ der 2ten (a).

(a) Die Punkte der Hyperbel gegen die kleine Axe gehalten, geben nicht, wie bey der Ellypse einerley Gleichung mit derjenigen, wenn sie gegen die erste Axe gehalten werden. Das heißt eigentlich GD ist keine Axe der entgegengesezten Hyperbeln MBK und mAL. (Fig. 70). Wenn GD alle Linien Mm, die mit AB parallel gezogen sind, in 2 gleiche Theile theilet, so geschiehet dieses nur deswegen, weil man zu gleicher Zeit 2 entgegengesezte Hyperbeln betrachtet. Dieses ist aber etwas blos zufälliges. Denn es kann die Eigenschaft einer Hyperbel absolut ohne die entgegengesezte entdecket werden. Auch kann diese krumme Linie in dem Kegel erzeugt werden und ihre charakteristische Eigenschaft entdecket sich daselbst unabhänglich von ihrer Gefährtinn, wie man es im §. 4 gesehen hat, da man den entgegengesezten Kegel nicht in Erwägung zog.

§. 23.

Vierter Zusatz. Es sey wieder $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, so ist, wenn wir alles mit bb multipliciren, $bbxx - aabb = aayy$; Folglich mit aa dividirt, so ist $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$. Dieses ist ein Ausdruck für das Quadrat der Ordinate an der ersten Axe oder für das Quadrat der Abscisse der 2ten Ax.

§. 24.

Fünfter Zusatz. Es sey beständig $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; bringt man nun aa auf die andere Seite und $\frac{aayy}{bb}$ auf die erste Seite, so ist $xx - \frac{aayy}{bb} = aa$. Dieses ist der Ausdruck für das Quadrat aa von der Helfte der ersten Axe.

§. 25.

Sechster Zusatz. Wenn man sich beständig an die Gleichung hält $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, so ist wenn man mit bb multiplicirt $bbxx - aabb = aayy$. Folglich ist $bbxx - aayy = aabb$, und durch die Division mit aa ist $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy$. Dieser Ausdruck gehört für die Helfte der 2ten Axe.

§. 26.

Siebender Zusatz. Daraus, daß $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ ist, folgt, daß wenn x oder CP oder, wenn man will, die Abscisse sich vergrössern (a), y oder die Ordinate sich auch ver-

(a) Denn die CP können nicht ohne die Vergrösserung der Abscissen BP wachsen.

vergrössern, denn wenn x grösser wird, so wird auch xx grösser; Folglich wird auch $xx - aa$ grösser seyn, als vorher. Folglich ist auch $\frac{aayy}{bb}$ grösser. Es wird aber diese Grösse nicht durch aa oder bb, als welche beständige Grössen sind, grösser; Folglich geschiehet es durch yy. Wenn nun yy grösser wird, so wird auch y selbst grösser. Folglich wachsen die Ordinaten mit den Abscissen. Dieses zeiget uns, daß sich die Hyperbel immer weiter von ihrer Axe entferne und daß sie dieselbe nur einmal durchschneide.

§. 27.

Achter Zusatz. Hieraus ziehet man folgende Schlüsse

1) Daß, wie im §. 11 — 13 der Parabel, eine Linie QG (Fig. 70) die mit der Axe AB einer Hyperbel parallel lauft, die krumme Linie nothwendig nur in einem einzigen Punkt B berühre.

2) Daß eine jede nach Erforderniß verlängerte Sehne QM nothwendig die erste Axe AB würklich durchschneiden oder wenigstens eine Neigung darzu haben werde.

3) Daß eine Tangente an jedem Punkt dieser krummen Linie, den Scheitelpunkt ausgenommen, auch die Neigung habe, die erste Axe zu durchschneiden, und daß folglich eine Tangente, eine Ordinate die an dem Berührungspunkt gezogen ist, und der Theil der Axe, der zwischen dem Punkt, wo die Tangente und die Ordinate die Axe berühren, liegt, jederzeit einen rechtwinklichten Triangel machen werden, woraus man nach Gefallen den Ausdruck für die Subtangente der Hyperbel und folglich die Tangente derselben finden kann, wenn man sich der allgemeinen Methode, die Tangenten der krummen Linien zu ziehen, bedienet, die ich im §. 18. 19 der Parabel gegeben habe. Ich werde dieses in der Folge zeigen.

* §. 28.

Neunter Zusatz. Man kann durch Hülfe der Glei-

chung $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ sehr leicht die 2te Axe einer gegebenen Hyperbel determiniren, wenn man davon die erste Axe kennet. Man darf nur dieses wissen, daß sie so groß seyn muß, als die undeterminirte Linie der ersten Axe die mit einer gleichen Ordinate der 2ten Axe übereintrift, deswegen ist, wenn man von dem Endpunkt G der 2ten Axe die Perpendiculairlinien GR fallen läßt, die die Hyperbel nothwendig in einem Punkt Q (§. 27) durchschneiden muß, und auf der ersten Axe die Ordinate QS ziehet; es ist deswegen diese Ordinate $CG = b$ als der Helfte der zwoten Axe, und $\overline{QS}^2 = yy = bb$. Wenn man folglich in der Gleichung $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ die Grösse bb in die Stelle von yy setzet, so ist $xx - aa = \frac{aabb}{bb} = aa$ oder $xx = 2aa$. Hieraus siehet man, wenn die Ordinate der 2ten Axe gleich ist, daß die Abscisse x, die zu dieser Ordinate gehört, die Hypothenuse eines gleichschenklichten rechtwinklichten Triangels ist, wovon eine jede Seite der Helfte der ersten Axe gleich ist.

Wenn man dieses wohl verstanden hat, so muß man, wenn die erste Axe und die krumme Linie selbst gegeben sind, um die 2te determinirte Axe zu bekommen, auf die Mitte C der ersten Axe eine Perpendiculairlinie von unbestimmter Länge GV aufrichten. Auf dieser muß man einen Theil CT = CB als der Helfte der ersten Axe abschneiden; darauf muß man die Hypothenuse dieses rechtwinklichten Triangels BT nehmen und sie von C nach S auf die erste Axe tragen; von da die Ordinate SQ ziehen, so wird diese Ordinate der Helfte der 2ten Axe gleich seyn.

Beweis. Weil $\overline{BT}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CT}^2 = aa + aa = 2aa$ und weil CS = BT (Constr.), so ist $\overline{CS}^2$ oder $xx = 2aa$. Itzt sey die Helfte der 2ten Axe der Hyperbel z, welche sie

sie will, so verhält sich (§. 17) $xx - aa : yy$ oder $\overline{SQ}^2 = aa : zz$, als dem Quadrat der halben 2ten Axe. Wenn man folglich in diesem Verhältniß $2aa$ in die Stelle von xx setzet, so ist $2aa - aa$ oder $aa : \overline{SQ}^2 = aa : zz$. Folglich ist $\overline{SQ}^2 = zz$ oder $SQ = z$. Das heißt, durch die Construction ist die gegebene Ordinate SQ die Helfte der 2ten Axe. W. z. E. W.

§. 29.

Zehnter Zusatz. Lasset uns die Hypothenuse BD aus dem Centrum C nach den Punkten F, f der unbestimmten ersten Axe der entgegengesezten Hyperbeln tragen, und aus einem beliebigen Punkt M dieser Hyperbel lasset uns die Linie Mf und MF nach den Punkte F und f ziehen. Endlich lasset uns die Ordinate MP an die Axe ziehen, so wird Mf beständig so groß seyn, als die Summ aus der 4ten Proportionalgrösse zu 3 gegebenen Grössen CB, Cf und CP, und der halben Axe CB, und MF wird jederzeit so groß seyn, als die Differenz zwischen der nemlichen 4ten Proportionalgrösse und der halben Axe CB, oder $Mf = \frac{Cf \times CP}{CB} + CB$ und $MF = \frac{Cf \times CP}{CB} - CB$.

Beweis. Wir wollen die vorige Benennung beybehalten, und ausserdem mag $BD = Cf = CF = c$ seyn; So ist $cc = aa + bb$. $FP = CP - CF = x - c$. Folglich ist $\overline{FP}^2 = xx - 2cx + cc$ und $fP = CP + Cf = x + c$. Folglich ist $\overline{fP}^2 = xx + 2cx + cc$. Unter dieser Voraussetzung hat man zu beweisen, daß $Mf = \frac{cx}{a} + a = \frac{cx + aa}{a}$ und daß $MF = \frac{cx}{a} - a = \frac{cx - aa}{aa}$ sey.

1) Wegen des rechtwinklichten Triangels fPM ist $\overline{fP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{Mf}^2 = xx + 2cx + cc + yy$ (D). Setzt man also in der Gleichung D, $aa + bb$ für cc und an der Stelle von yy den Ausdruck $\frac{bbxx - aabb}{aa}$ (§. 23), so ist $\overline{Mf}^2 = xx + 2cx + aa + bb + \frac{bbxx - aabb}{aa}$; Folglich, wenn man alles unter einerley Benennung bringt, so ist $\overline{Mf}^2 = \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + a^2b^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{aa}$ $= \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + b^2x^2}{aa}$ (M). Nun ist aber $a^2x^2 + b^2x^2 = (a^2 + b^2)\, x^2 = c^2x^2$. Setzet man folglich in der Gleichung M die Grösse c^2x^2 an der Stelle von $a^2x^2 + b^2x^2$, so ist $\overline{Mf}^2 = \frac{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4}{aa}$, u. nach ausgezogener Quadratwurzel ist $Mf = \frac{cx + aa}{a} = \frac{cx}{a} + a$. W. z. E. W.

2) Vermöge des rechtwinklichten Triangels FPM ist $\overline{MF}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{PM}^2 = cc - 2cx + xx + yy$, und wenn man eben so, wie vorhin, substituirt, so ist $\overline{MF}^2 = \frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{aa}$ und folglich nach ausgezogener Quadratwurzel ist $MF = \frac{cx - aa}{a} = \frac{cx}{a} - a$. Welche d. 2te zu E. W.

§. 30.

Zweyter Zusatz. Weil $Mf = \frac{cx + aa}{a}$ und $MF = \frac{cx - aa}{a}$, so ist $Mf + MF = \frac{2cx}{a}$. Folglich ist $(Mf + MF)a$ =

$= 2c \times x$. Folglich verhält sich $(Mf + MF) : x = 2c : a$ das heißt, die Summe der Linien, die von jedem Punkt M der Hyperbel an die Punkte F und f gezogen sind, hat immer ein beständiges Verhältniß gegen die undeterminirte Linie CP, die zu dem Punkt M gehört. Denn diese Summe verhält sich jederzeit zu $CP = x$ wie $2c : a$. Diese leztere sind aber beständige Grössen.

§. 31.

Zwölfter Zusatz. Wenn man hingegen statt der Summe der Werthe dieser Linien Mf und MF, die man §. 29 gefunden hat, ihre Differenz nimmt, so ist $Mf - MF = \frac{2aa}{a} = 2a = AB$, das heißt der Unterschied dieser Grössen ist jederzeit der ersten Axe gleich. Dieses ist wohl zu bemerken.

§. 32.

Dreyzehnter Zusatz. $AF \times BF = \overline{CD}^2$ als dem Quadrat der halben 2ten Axe. Denn AF ist $= CF + CA = c + a$. und $BF = CF - CB = c - a$; Folglich ist $AF \times BF = (c + a)(c - a) = cc - aa$ (S). Nun hat man aber des rechtwinklichten Triangels BCD wegen und weil $BD = CF = c$ ist, diese Gleichung $cc = aa + bb$. Wenn man demnach den Werth von cc in die Gleichung S setzet, so ist $AF \times BF = aa + bb - aa = bb = \overline{CD}^2$. Folglich ist $AF \times BF = \overline{CD}^2$.

§. 33.

Erklärung. Wenn man zur ersten und 2ten Axe eine dritte Proportionallinie sucht, so erhält man eine Linie, die man den **Parameter** der ersten Axe nennet. Sie heißt aber der **Parameter** der 2ten Axe, wenn die 2te Axe das

erste Glied dieser Proportion ist. Setzet man daher das Verhältniß $2a$ (AB) : $2b$ (GD) $= 2b$ (GD) : $p = \frac{4bb}{2a}$ oder $\frac{2bb}{a}$, so wird diese Grösse p oder $\frac{2bb}{a}$ in der Folge den Parameter der ersten Axe anzeigen. Hieraus erkennet man, daß die eine der Axen immer eine mittlere Proportionallinie zwischen der andern Axe und deren Parameter sey.

§. 34.

Vierzehnter Zusatz. Die Ordinate FK an einem der Punkte F oder f, ist die Helfte des Parameters der ersten Axe das heißt, $FK = \frac{p}{2} = \frac{bb}{a}$.

Beweis. Wir wissen (§. 15), daß $\overline{FK}^2 : AF \times BF = \overline{CD}^2 : \overline{CB}^2 = bb : aa$. Allein $AF \times BF = \overline{CD}^2 = bb$. (§. 32); Folglich verhält sich $\overline{FK}^2 : bb = bb : aa$ oder $FK : b = b : a$; Folglich ist $FK = \frac{bb}{a} = \frac{p}{2}$. W. z. E. W.

* §. 35.

Funfzehnter Zusatz. Die Entfernung BF einer der Punkte F oder f von dem nächsten Scheitelpunkt B ist kleiner, als der 4te Theil des Parameters p, das heißt, $BF < \frac{p}{4}$.

Beweis. $BF = CF - CB = c - a$, und weil $p = \frac{2bb}{a}$ (§. 33), so ist $\frac{p}{4} = \frac{bb}{2a}$. Es ist aber auch $cc = bb + aa$. Folglich $bb = cc - aa$; Folglich verhält sich $BF : \frac{p}{4} = c - a : \frac{bb}{2a} = c - a : \frac{cc - aa}{2a}$ (weil $bb = cc - aa$) $= (c - a)\, 2a : cc - aa$, und wenn man die 2 lezten Glieder durch $c - a$ dividirt $= 2a : c + a = AB : AF$: Folglich

lich verhält sich BF : $\frac{p}{4}$ = AB : AF. Allein AB < AF. Folglich ist auch BF < $\frac{p}{4}$. W. z. E. W.

§. 36.

Anmerkung. Wir werden §. 95 beweisen, daß die Punkte F und f, die so wie §. 29 bestimmt sind, die wahren Brennpunkte sind, und daß folglich 1) die doppelte Ordinate au dem Brennpunkt F einer Hyperbel so groß sey, als der Parameter ihrer kleinen Axe (§. 34).

2) Daß die Entfernung des Brennpunkts F in einer Hyperbel vom Scheitelpunkt kleiner sey, als der 4te Theil des Parameters ihrer ersten Axe (§. 35).

§. 37.

Funfzehnter Zusatz. Es verhält sich $2a : 2b = 2b : p$. (§. 33); Folglich ist $4aa : 4bb = 2a : p$. (*) $= \frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$. Wenn man folglich in der Gleichung $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ der Hyperbel (17) den Ausdruck $\frac{2a}{p}$ an der Stelle von $\frac{aa}{bb}$ setzet, so ist $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$. Dieses ist eine andere Gleichung der Hyperbel in Absicht auf ihren Parameter.

* §. 38.

Sechzehnter Zusatz. Das Quadrat $\overline{PM}^2$ einer jeden Ordinate PM an der ersten verlängertrn Axe der Hyperbel ist grösser als das Rechteck aus der Abscisse BP und dem Parameter p der nämlichen Axe.

Beweis.

(*) Man sehe meine Anmerkung zum §. 168 der Parabel. B.

Beweis. Man weiß, daß $p = \frac{2bb}{a}$ (§. 33) BB = CP—CB $= x - a$; Folglich ist BP $\times p = (x-a)\left(\frac{2bb}{a}\right)$, PM $= y$. Folglich $\overline{PM}^2 = yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$ (§. 23) $= \frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{aa}$. Man muß also beweisen, daß $\overline{PM}^2 >$ BP $\times p$ oder daß $\left(\frac{xx-aa}{a}\right) \times \left(\frac{bb}{a}\right) > (x-a)\left(\frac{2bb}{a}\right)$. Nun verhält sich aber $\left(\frac{xx-aa}{a}\right) \times \left(\frac{bb}{a}\right) : (x-a)\left(\frac{2bb}{a}\right)$, wenn man mit $\frac{bb}{a}$ dividirt, $= \frac{xx-aa}{a} : (x-a)\,2$, und wenn man durch $x-a$ dividirt, $= \frac{x+a}{a} : 2$, und wenn man mit a multiplicirt $= x + a : 2a =$ AP : AB Folglich verhält sich $\left(\frac{xx-aa}{a}\right) \times \frac{bb}{a} : (x-a) \times \frac{2bb}{a}$ oder $\overline{PM}^2$: BP $\times p =$ AP : AB. Es ist aber AP $>$ AB. Folglich ist $\overline{PM}^2 >$ BB $\times p$. W. z. E. W.

§. 39.

Anmerkung. Dieser Ueberschuß, um welchen das Quadrat der Ordinate grösser ist, als das Rechteck aus der Absciße und dem Parameter, dieser Ueberschuß hat dieser Art von Kegelschnitten den Namen Hyperbel gegeben. Die Benennung kommt von dem griechischen Worte υπερβολη, welches so viel, als ein Ueberschuß, heißt.

* §. 40.

Siebenzehnter Zusatz. Lasset uns itzt den Parameter der 2ten Axe aufsuchen, indem wir folgendes Verhältniß an-

ansetzen $2b : 2a = 2a$: zu einem 4ten Gliede $= \frac{2aa}{b}$. Dieses nenne ich m. Nun behaupte ich, daß das Quadrat einer jeden Ordinate MN an der 2ten Axe, die nach Erforderniß verlängert wird, grösser sey, als das Rechteck aus ihrer correspondirenden Abscisse CN und dem Parameter m der 2ten Axe. Nur muß CN grösser oder kleiner als die Helfte der kleinen Axe seyn.

Beweis. Es sey $MN = CP = x$; $CN = MP = y$. Nun haben wir so eben gesehen, daß $m = \frac{2aa}{b}$ und (§. 21) $xx = \frac{aayy + aabb}{bb} = (bb + yy) \times \frac{aa}{bb} = \overline{MN}^2$. Es ist also zu beweisen, daß $\overline{MN}^2 > m \times CN$ oder daß $bb + yy \times \frac{aa}{bb} > \frac{2aay}{b}$ sey.

Nun verhält sich aber $(bb + yy) \times \left(\frac{aa}{bb}\right) : \frac{2aay}{b} =$ (wenn man mit $\frac{aa}{b}$ dividirt) $\frac{bb + yy}{b} : 2yy$, (und wenn man mit b multiplicirt) $= bb + yy : 2by$. Nun ist aber $bb + yy > 2by$ (a). Folglich ist $(bb + yy) \times \left(\frac{aa}{bb}\right) > \frac{2aay}{b}$. Das heißt $\overline{MN}^2 > m \times CN$. W. z. E. W.

* §. 41.

Anmerkung. Damit der vorige Zusatz ohne Ausnahme

(a) Das heißt, die Summe der Quadrate bb und yy zwoer ungleichen Grössen b und y ist jederzeit grösser, als das doppelte Product by dieser Grössen. Es sey $y > b$ und d die Differenz zwischen ihnen, so ist $y - b = d$. Folglich $yy - 2by + bb = dd$. Folglich $yy + bb = 2by + dd$. und also $yy + bb > 2by$.

me wahr sey, so habe ich diese Einschränkung noch hinzugesezt, daß die Abscisse CN $= y$ grösser oder kleiner als die halbe kleine Axe b seyn müsse. Denn wenn y und b sich $=$ wären, so wäre $bb + y = 2bb$ und $2by = 2bb$. Folglich wäre $bb + yy = 2by$ und folglich $\overline{MN}^2 = m \times CN$; Hieraus siehet man, daß der vorige Zusaz dieser Ausnahme unterworfen ist.

*§. 42.

Vierter Hauptsatz. Wenn man durch den Scheitelpunkt B der Hyperbel (Fig. 71) die Linie HBT so ziehet, daß sie mit der kleinen Axe GD parallel und ihr gleich sey, daß also BH $=$ BT $=$ CG $=$ CD $= b$. und wenn man aus dem Centrum C, durch die Endpunkte H und T die unbestimmte grade Linien CN und CR ziehet, wenn man darauf durch einen beliebigen Punkt der verlängerten Axe die grade Linie LK mit HT oder mit der 2ten Axe GD parallel ziehet, so ist,

1) $LM \times MK = \overline{BH}^2 = bb$.

2) Wenn man die Linien CN und CR willkührlich von der andern Seite C verlängert und von dem Punkt M oder F, wo LK mit der Hyperbel zusammen stößt die Linie Mk mit der ersten Axe parallel ziehet, so ist, sage $Mk \times Ml = \overline{CB}^2 = aa$.

Beweis des ersten Theils. Wenn wir für die nämlichen Linien die vorigen Benennungen behalten, so ist wegen der ähnlichen Triangel CBH und CPL a (CB) : b (BH) $= x$ (CP) : $\frac{bx}{a} =$ PL $=$ PK; Folglich ist LM $=$ PL $-$ PM $= \frac{bx}{a} - y$, und MK $=$ PK $+$ PM $= \frac{bx}{a} + y$; Folglich

lich ist $LM \times MK = \left(\frac{bx}{a} - y\right) \times \left(\frac{bx}{a} + y\right) = \frac{b^2x^2}{aa} - yy$ $= bb$ (§. 25); Folglich ist $LM \times MK = bb$ oder $\overline{BH}^2$ oder $\overline{GC}^2$. W d. 1ste W.

Beweis des zweyten Theils. Der ähnlichen Triangel CPK und kMK wegen verhält sich $\frac{bx}{a}$ (PK) : x (CP) $= \frac{bx}{a} + y$ (MK) : $x + \frac{ay}{b}$ (Mk). Dieses findet man, wenn man das Product aus den 2 mittelsten Gliedern x und $\frac{bx}{a} + y$ durch das erste Glied $\frac{bx}{a}$ dividirt.

Eben so fließt aus den ähnlichen Triangeln lML und LPC folgendes Verhältniß $\frac{bx}{a}$ (PL) : x (CP) $= \frac{bx}{a} - y$ (LM) : $x - \frac{ay}{b} = Ml$. Dieses findet man, wenn man die beyden mittelsten Glieder x und $\frac{bx}{a} - y$ durch einander multiplicirt und das heraus kommende Product durch das 1ste Glied $\frac{bx}{a}$ dividirt. Folglich ist $Mk \times Ml = \left(x + \frac{ay}{b}\right)$ $\left(x - \frac{ay}{b}\right) = xx - \frac{aayy}{bb} = aa$ (§. 24). Folglich ist $Mk \times Ml = aa$ oder $\overline{CB}^2$. W. d. 2te W.

§. 43.

Wenn hingegen eine Linie LMK, die durch die Seite eines gleichschenklichten Triangels LCK, bestimmt wird, in dem Punkt M so in 2 gleiche Theile getheilet wird, daß das Product $LM \times MK$ aus seinen 2 Theilen dem Quadrat $\overline{BH}^2$ von

von der Helfte einer andern Linie HT, die durch die Seite des nämlichen Triangels bestimmt wird und mit LMK parallel lauft, gleich ist, so behaupte ich, daß der Punkt M in einer Hyperbel sey, oder daß die krumme Linie, welche auf diese Art alle unbestimmte Linien LMK theilet, eine Hyperbel sey.

Beweis. Lasset uns von der Spitze des Winkels C durch die Mitte HT der Parallellinie von LK die unbestimmte Linie CQ ziehen, so wird diese auch LK in der Mitte theilen. Man mache CA = CB und die Perpendiculairlinie CG = CD = HB = BT und behalte die vorige Benennungen, so verhält sich, a (CB) : b (BH) = x (CP) : $\frac{bx}{a}$ = PL oder PK; Folglich ist LM = PL — PM = $\frac{bx}{a}$ — y, und MK = PK + PM = $\frac{bx}{a} + y$. Folglich ist LM × MK = $\frac{b^2x^2}{aa} - yy$. Nun ist aber vermöge der Bedingung LM × MK = $\overline{BH}^2 = bb$. Folglich ist $bb = \frac{b^2x^2}{aa} - yy$; Folglich, wenn man durch aa multiplicirt, so ist $a^2b^2 = b^2x^2 - aayy$. Wenn man folglich die Glieder verwechselt, so ist $aayy = bbxx - aabb = (xx - aa)\,bb$; Folglich verhält sich yy $(\overline{PM}^2)$: $xx - aa$ oder $(x-a)(x+a)$ (BP × AP) = bb $(\overline{BH}^2)$: aa $(\overline{CB}^2)$. Dieses ist die characteristische Eigenschaft der Hyperbel, die wir §. 15. gefunden haben. Folglich ist der Punkt M in einer Hyperbel.

§. 44.

Erster Zusatz. Da der Punkt P nach Belieben in der verlängerten ersten Axe angenommen worden, so folgt, daß alle Rechtecke wie LM × MK sich einander gleich sind, weil sie immer einerley Quadrat $\overline{BH}^2$ oder bb gleich sind, das heißt,

wenn

wenn man durch einen andern Punkt Q der verlängerten ersten Axe mit LK eine Parallellinie IV ziehet, so ist VE×EI = LM×MK oder MK : EI = VE : LM.

§. 45.

Zweyter Zusatz. Man siehet folglich, daß VE kleiner als LM sey; weil, wenn man MS mit der ersten Axe BQ parallel ziehet, es evident ist, daß MK < *a*J. Nun ist aber *a*J < EJ; Folglich ist auch MK < EJ. Es verhält sich aber (§. 44) MK : EI = VE ; LM. Da folglich MK < EJ so muß auch VE < LM seyn.

§. 46.

Dritter Zusatz. Wenn man folglich von den Punkten E und M die Perpendiculairlinien E*t* und M*r* auf die Seite *CN* fallen läßt, so wird die Perpendiculairlinie E*t* kleiner seyn als M*r*. Denn wegen der ähnlichen Triangel VE*t* und LM*r* verhält sich VE : LM = E*t* : M*r*. Nun ist aber VE < LM (§. 45); Folglich ist auch E*t* < M*r*.

§. 47.

Vierter Zusatz. Wie sich also der Arm der Hyperbel BME von dem Scheitelpunkt B entfernet, so nähert er sich beständig der Seite CN. Inzwischen werden doch diese Seite der Hyperbel und die Linie CN ins unendliche verlängert, sich niemals berühren. Denn, wenn sich diese Linien berührten, so würde PM = PL oder $\overline{PM}^2 = \overline{PL}^2$ seyn. Das heißt es wäre $yy = \frac{bbxx}{aa}$; weil PL $= \frac{bx}{a}$ (Demonstr. §. 42). Dieses kann aber nicht seyn, weil (§. 23) $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$. Diese Grösse ist aber kleiner als $\frac{bbxx}{aa}$.

Deswegen haben die Alten diese unbestimmte Linien CN und CR Asymptoten genennt. Ein Wort, welches aus 3 griechischen zusammen gesetzet ist. Nämlich aus dem verneinenden α, aus συν, mit oder zusammen und πτοω, ich falle. Es sind also Asymptoten der Hyperbel grade Linien, die sich dieser krummen Linie beständig nähern ohne sie jemals berühren zu können (*a*). Folglich ist diese krumme Linie gänzlich in dem Winkel NCR, den die Asymptoten machen, eingeschlossen.

* §. 48.

Anmerkung. Da die Linien CN und CR (Fig. 71), die von dem Centrum der Hyperbel MBF durch die Endpunkte der Perpendiculairlinie HBT, die so groß ist, als die 2te Axe GCD und wo BH=BT ist, gezogen werden, Asymptoten sind, (§. 47), so muß man um die so Linien im Kegel zu finden, sich eines rechtwinklichten Kegels DCH bedienen (Fig. 72) oder welches einerley ist, eines solchen Kegels, dessen Axe OC perpendiculair auf die Basis DH stehet, und man muß den Durchschnitt AT dieses Kegels mit der Axe OC perpendiculair machen. So wird dadurch die Hyperbel NB*x* entstehen. Wenn man darauf von dem Scheitelpunkt B dieser Hyperbel eine Linie BK in die Fläche des Axentriangels ziehet, die mit der Basis DH parallel ist, und wenn man aus dem Punkt G, wo diese Linie die Axe OC schneidet, auf die Axe OC in der Fläche des Axentriangels eine Hyperbel *n*G*y* beschreibt, die der Hyperbel N*bx* gleich und ähnlich ist (*b*), so, daß der Punkt G der Scheitelpunkt der neuen krummen Linie

(*a*) Die Griechen gaben immer gewissen Hauptlinien solche Namen, wodurch sogleich die Eigenschaft derselben ausgedrückt ward. So konnte z. E. nun der gemeine Mann und der Gelehrte verstehen, was man mit Asymptoten haben wolle?

(*b*) Die Hyperbel *n*G*y* ist der Hyperbel NB*x* gleich und ähnlich, wenn man die Ordinaten an GO in einer bestimmten Entfernung

Liniesey, so wird man finden, daß die Seiten CD und CH des vorgegebenen Kegels die Asymptoten der Hyperbel nGy oder NBx sind, wenn man diese leztere so auf die Fläche des Axentriangels trüge, daß der Scheitelpunkt B auf G fiele.

Beweis. 1) BK ist die 2te Axe beyder Hyperbel (§. 16. N° 3). 2) Vermöge der Construction ist BK gegen die Axe OC am Scheitelpunkt G der Hyperbel nGy perpendiculair. Auch ist die Linie offenbar in 2 gleiche Theile getheilet. Es ist überdies der Punkt C das Centrum der Hyperbel nGy. Dieses siehet man wenn man CV gegen die erste Axe AB der Hyperbel NBx perpendiculair ziehet. Folglich sind die Seiten CD und und CH der 72ten Figur im Betracht gegen die Hyperbel nGy genau einerley mit den Linien CN und CR der 71ten Figur im Betracht gegen die Hyperbel MBF. Nun sind aber die Linien CN und CR die Asymptoten der Hyperbel MBF (Beding) Folglich sind auch CD und CH die Asymptoten der Hyperbel nGy oder der ihr gleichen Hyperbel NBx. W. z. Th. u. z. E. W.

*§. 49.

Fünfter Zusatz. Wenn man in der 71ten Figur durch das Centrum C und innerhalb dem Asymptotenwinkel NCR oder seinem Verticalwinkel eine beliebige Linie de ziehet, so wird diese nothwendig die Hyperbel MBF oder ihre entgegengesezte in den Punkten F oder f durchschneiden, und in diese krumme Linie hinein gehen ohne sie zum 2tenmal zu durchschneiden. Denn da sich die Hyperbel ohne Aufhören der Asymptote CR nähert und da die Linie cd sich beständig davon hinter dem Punkt C entfernet, so müssen diese beyden Linien nothwendig sich in einem Punkt F durchschneiden, aber

 auch

fernung von dem Scheitelpunkt G den Ordinaten auf BT in einer gleichen Entfernung vom Scheitelpunkt B gleich macht. Dieses ist ausserordentlich deutlich und evident.

auch nicht mehrmal, weil nach ihrem Zusammenstossen, die eine auf diese, die andere auf der andern Seite fortgehet.

§. 50.

Erklärung. Man nennet eine jede Linie FC*f*, die durch das Centrum gehet, und auf die entgegengesetzte Hyperbel stößt, den ersten Diameter, weil dieser alle Linien, die Ordinaten an ihm sind, und mit der Tangente an dem Punkt F oder *f*, wo diese Linie die Hyperbel durchschneidet, parallel laufen, in 2 gleiche Theile theilet. Wir werden dieses weiter unten sehen.

*§. 51.

Sechster Zusatz. Wenn man folglich nach Belieben und in gleich weiten Entfernungen vom Centrum 2 Punkte P und *p* in der verlängerten Axe der entgegen gesezten Hyperbeln annimmt, und wenn man die Ordinate PF durch das Centrum C die unbestimmte Linie FC*e* ziehet, so wird diese Linie mit der entgegengesezten Hyperbel in dem Punkt *f* zusammenstossen, welcher Punkt der Endpunkt der Ordinate *pf* an dem Punkt *p* ist.

Beweis. 1) Sie wird mit der entgegengesetzten Hyperbel zusammen stossen (§. 49).

2) Da die Abscissen CP und C*p* sich gleich sind (Constr.), so ist auch die Ordinate an dem Punkt *p* der Ordinate PF gleich, weil die entgegengesezten Hyperbeln sich gleich und ähnlich sind. Da aber wegen der ähnlichen Triangel CPF und C*pf*, CP : C*p* = PF : *pf* und da CP = C*p*: so folgt, daß auch PF = *pf*. Nun ist aber PF = der Ordinate *p*; Folglich ist *pf* auch dieser nämlichen Ordinate gleich, das heißt, sie ist diese Ordinate selbst. Folglich ist der Punkt *f*, wo die Linie FC*e* die Ordinate an dem Punkt *p* berühret, der Endpunkt der Ordinate.

* §. 52.

Siebender Zusatz. Folglich wird ein jeder erster Diameter FCf durch das Centrum in 2 gleiche Theile getheilet, weil in dem rechtwinklichten Triangel CPF und Cpf, da $CP = Cp$ und $PF = pf$ (§. 57), auch nothwendig die Hypothenusen CF und Cf sich gleich seyn müssen.

* §. 53.

Achter Zusatz. Wenn man ferner durch einen beliebigen Punkt m einer der Asymptoten CN mit der andern Asymptote CR eine Parallellinie mg ziehet, so wird diese Parallellinie die Hyperbel in einem einzigen Punkt F schneiden, weil diese Parallellinie beständig in einer bestimmten Entfernung von der Asymptote bleibt, und weil hingegen die Hyperbel derselben näher kommt, als daß man den Unterschied durch irgend eine Grösse bestimmen könnte.

§. 54.

Fünfter Hauptsatz. Lasset uns durch einen Punkt M der Hyperbel MBF (Fig. 73) eine Linie MI, die in einem Punkt I von der andern Asymptote CL bestimmt wird, mit der Asymptote CR, und durch den nämlichen Punkt M eine andere Mf mit der Asymptote CL parallel ziehen; Wenn wir ausserdem durch den Scheitelpunkt B die gleichen Hypothenusen BG und BD ziehen, die die Asymptoten in O und n durchschneiden, so behaupte ich, daß das Rechteck $IM \times MF = BO \times OC$. sey.

Beweis. Merket gleich anfangs, daß BG mit der Asymptote CR parallel sey, weil $BT = CG$ und mit GC auch parallel ist (Constr.); daß folglich auch die Linien BG, CT, die sie bestimmen, mit ihr von einerley Grösse und parallel sind; daß folglich auch $GC : CD = GO : OB$. Nun ist aber $GC = CD$ (Beding): Folglich $GO = OB$. Es

 verhält

verhält sich ferner GB : BD = GO : O*C*. Es ist aber GB = BD (Constr.); Folglich ist auch GO = O*C*. Man kann auch beweisen, daß D*n* = B*n* = *nC* und folglich sind alle Linien GO, OB, O*C*, D*n*, B*n*, *nC* sich gleich.

Lasset uns itzt durch den Punkt M die Linien MK auf die verlängerte perpendiculaire Axe ziehen, so ist, wegen der ähnlichen Triangel LMI und HBO, BH : BO = LM : IM. Eben so ziehet man aus der Aehnlichkeit der Triangel BT*n* und MK*f* dieses Verhältniß: BT oder BH : B*n* oder O*C* = MK : M*f*. Wenn man folglich diese 2 Verhältnisse der Ordnung der Glieder nach durch einander multiplicirt, so verhält sich $\overline{BH}^2$: BO×O*C* = LM×MK : IM×M*f*. Nun ist aber nach §. 42 LM×MK = $\overline{BH}^2$: Folglich ist IM×M*f* = BO×O*C*. W. z. E. W.

§. 55.

Wenn man umgekehrt die Linie IM mit *C*R parallel und so ziehet, daß IM×I*C* oder M*f* immer so groß sey, als BO×OC, so ist der Punkt M in der Hyperbel. Man nimmt an, daß BO = O*C*. Dieses findet immer statt, wenn man den Winkel L*C*R durch die undeterminirte Linie *C*P in 2 gleiche Theile theilet und die Linie OB in einem beliebigen Punkt O mit *C*R parallel ziehet. Man setzt ausserdem noch voraus, daß HBT und LMK perpendiculair auf die Linie *C*P stehen.

Beweis. Es verhält sich BH : BO = LM : IM und BT oder BH : B*n* oder O*C* = MK : M*f* oder I*C*. Wenn man folglich diese 2 Verhältnisse der Ordnung der Glieder nach durch einander multiplicirt, so verhält sich $\overline{BH}^2$: BO×O*C* = LM×MK : IM×I*C*. Nun ist aber vermöge der Bedingung IM×I*C* = BO×O*C*. Folglich ist LM = MK = $\overline{BH}^2$. Folglich ist der Punkt M in der Hyperbel (§. 43).

§. 56.

§. 56.

Zusatz. Und da der Punkt M nach Belieben angenommen worden ist, so folgt daraus, daß alle Rechtecke wie $IM \times Mf$ oder $IM \times IC$ unter sich gleich sind, weil sie beständig dem bestimmten Rechteck $BO \times OC$ gleich sind.

§. 57.

Anmerkung. 1) Das Rechteck $BO \times OC$ oder vielmehr das Quadrat $\overline{OC}^2$ nennen die Geometer die **Potenz der Hyperbel.** Diese ist jederzeit so groß, als der 4te Theil der Summe der Quadrate der beyden halben Axen CB und CD. Denn da OC nur die Helfte der Hypothenuse BD ist, so ist $\overline{OC}^2 = \frac{\overline{BD}^2}{4}$. Nun ist aber $\overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$. Folglich ist $\overline{OC}^2 = \frac{\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2}{4}$.

2) Folglich sind alle Rechtecke $IM \times IC$ der Potenz der Hyperbel gleich. Wenn man folglich eines von diesen Rechtecken kennet, so kann man auf eine leichte Art die Quadratwurzel von dieser Potenz finden. Denn sie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den 2 Seiten des gegebenen Rechtecks.

3) Wenn ferner der Asymptoten Winkel HCT ein rechter Winkel wäre, so wäre auch der Winkel BOC ein rechter Winkel und folglich wäre $\overline{BC}^2 = 2(\overline{OC}^2) = 2\,JM \times IC$. Folglich ist $BC = \sqrt{(2\,JM \times JC)}$. Das heißt, es ist in diesem Fall die halbe erste Axe BC, welche den Asymptotenwinkel jederzeit in 2 gleiche Theile theilet (Constr. §. 42) so groß, als die Quadratwurzel der doppelten Potenz der Hyperbel.

§. 58.

Sechster Hauptsatz. Ziehet durch irgend einen Punkt

S (Fig. 74) nach Belieben eine Linie SHQR, die die Seite der Hyperbel in den Punkten H und Q und die Asymptoten in R und S durchschneidet; so ist jederzeit RQ = SH.

Beweis. Ziehet gleich anfangs die Linien H*d* und H*n* und Q*o* und Q*b* mit den Asymptoten CS und CR parallel, und erinnert euch, daß alle Rechtecke wie Q*b*×Q*o* und H*n* × H*d* sich einander gleich sind (§. 56), so ist Q*b*×Q*o* = H*n* H*d*. Folglich verhält sich Q*b* : H*d* = H*n* : Q*o*. Allein wegen der ähnlichen Triangel RQ*b* und RH*d* verhält sich Q*b* : H*d* = RQ : RH. Folglich RQ : RH = H*n* : Q*o*. Nun verhält sich aber aus gleichen Gründen H*n* : Q*o* = SH : SQ: Folglich RQ : RH = SH : SQ. Folglich RH — RQ : RQ = SQ — SH : SH. oder HQ : RQ = HQ : SH. Daraus folgt, daß RQ = SH. W. z. E. W.

§. 59.

Wenn man umgekehrt auf einer Linie SR, die durch die Seiten eines Winkels SCR bestimmt wird, das Stück SH gleich RQ macht, so sind die Punkte R und H in der Hyperbel.

Beweis. Wenn wir die nämliche Construction behalten, so verhält sich Q*b* : H*d* = RQ : RH = SH : SQ: (Denn, weil RQ nach der Bedingung = SH, so muß RH = SQ seyn) = H*n* : Q*o*. Folglich verhält sich Q*b* : H*d* = H*n* : Q*o*. Folglich ist Q*b*×Q*o* = H*d*×H*n*. Wenn man aber den Winkel SCR in 2 gleiche Theile theilet und man zwischen Q*b* und Q*o* eine mittlere Proportionallinie suchte, und diese von C in G trüge, und GB mit CR parallel zöge, so würde GC = GB seyn und es wäre Q*b*×Q*o* = GB×GC = HD×H*n*. Folglich werden die Punkte Q und G in der Hyperbel seyn (§. 55).

§. 60.

Zusatz. Man mag folglich nach Belieben in den

Asymp-

Asymptotenwinkel eine Linie SR ziehen, die durch diese Asymptoten bestimmt wird und mit der Hyperbel zusammen stößt, oder sie durchschneidet; so wird der Theil SH dieser Linie, welcher zwischen der Seite der Hyperbel und ihrer nächsten Asymptote lieget, jederzeit einem andern Theile RQ dieser nämlichen Linie gleich seyn, der zwischen den Arm dieser krummen Linie und ihrer nächsten Asymptote enthalten ist. Dieses muß man wohl merken. Denn wegen dieser Eigenschaft der Hyperbel werden wir auf eine bestimmte Art durch einen beliebigen Punkt eine Tangente an diese krumme Linie ziehen können.

§. 61.

Siebender Hauptsatz. Lasset uns in der Hyperbel einen Punkt H annehmen (§. 75). Durch diesen lasset uns Hn mit der Asymptote CR parallel ziehen. Darauf lasset uns nS$=nC$ machen. Wenn wir nun von dem Punkt S durch den gegebenen Punkt H eine unbestimmte Linie SHR ziehen, so wird diese Linie die Tangente in H seyn, oder diese Linie wird die krumme Linie nur in einem Punkte berühren.

Beweis. Wenn SR mit der Hyperbel in einem andern Punkt d zusammen stiesse, so wäre Sd=HR (§. 58. 60) Allein der ähnlichen Triangel SnH und SCR wegen (Constr.) verhält sich Sn : nC=SH : HR. Nun ist aber Sn=nC (Constr.). Folglich ist auch SH=HR. Folglich, weil Sd auch so groß seyn würde, als HR, so würde auch Sd =SH seyn, welches unmöglich. Es ist also unmöglich, daß SR bey der angenommenen Construction in einem andern Punkt als in dem Punkt H die Hyperbel berühre. Folglich ist SR eine Tangente. W. z. E. W.

Man siehet hieraus, daß eine Linie SR, die durch die Asymptote determinirt wird, und in dem Punkt, wo sie mit der Hyperbel zusammen stößt, in 2 Theile getheilet wird, nothwendig ein Triangel sey.

§. 62.

Wenn umgekehrt eine Linie SR, die durch die Asymptoten bestimmt wird und an einem Punkt H die Tangente der Hyperbel ist, so wird sie nothwendig in dem Berührungspunkt in 2 gleiche Theile getheilet werden.

Beweis. Denn man muß, wie wir so eben gesehen haben, um eine Tangente an den Punkt H zu bekommen mit *C*R eine Parallellinie ziehen; $nS = nC$ machen, und durch die Punkte S und H eine Linie SHR ziehen, welche die Tangente an dem Punkt H ist (§. 61) und folglich wird diese Linie von der in der Bedingung angenommen, nicht unterschieden seyn. Denn es ist klar, daß man an den nämlichen Punkt der krummen Linie unmöglich zwey verschiedene Tangenten ziehen könne. Nun ist aber SHR in dem Berührungspunkt H in zwey gleiche Theile getheilet (Constr.). Folglich muß die angenommene es auch seyn. W. z. E. W.

§. 63.

Erster Zusatz. Hieraus folgt, daß die Linie HBT (Fig. 71) die aus dem Scheitelpunkt B der Hyperbel mit der 2ten Axe GD parallel gezogen ist, eine Tangente in diesem Punkt sey, weil sie in 2 gleiche Theile getheilet wird (Constr.).

§. 64.

Zweyter Zusatz. Wenn man durch einen Punkt H (Fig. 75) einer Hyperbel einen ersten Diameter H*Ch* (§. 50), eine Tangente SHR (§. 61), und die Linien HG und H*g* mit den Asymptoten *C*S und *C*R parallel ziehet, biß sie mit der Linie G*Cg*, die durch das Centrum *C* mit der Tangente SHR parallel gezogen ist, zusammen stossen, so wird diese Linie G*Cg*, die auf diese Art determinirt ist, und die man

den

zweyten conjugirten Diameter zu dem ersten Diameter HCh nennet, im Centrum C in 2 gleiche Theile getheilet werden, und überdies der Tangente SR gleich seyn.

Beweis. Denn da die Linien SC und Hg und die Linien SH und Cg unter einander parallel sind (Constr.), so ist es klar, daß $Cg = SH$. Nun ist aber $SH = HR$ (§. 62) Folglich $Cg = HR$. Allein $HR = GC$, weil die Figur $CGHR$ ein Parallelogramm ist (Constr.); Folglich ist $Cg = GC$, folglich ist der conjugirte Diameter GCg im Centrum C der Hyperbel in 2 gleiche Theile getheilet und der Tangente SHR gleich. Denn da die Helften HR und GC sich gleich sind, so müssen auch die Ganzen Gg und SR sich gleich seyn. W. z. E. W.

* §. 65.

Dritter Zusatz. Wenn man durch einen andern Endpunkt h des Diameters Hh eine Linie thu mit der Tangente SHR parallel ziehet, so wird diese Linie thu auch die Tangente an den Punkt h der entgegengesezten Hyperbel seyn.

Beweis. Da die Triangel hCu und HCS sich ähnlich sind und $HC = Ch$ ist (§. 52), so ist es klar, daß $HS = hu$. Eben so erkennet man aus der Gleichheit der Triangel hCt und HCR, daß $HR = ht$. Nun ist aber $HS = HR$ (§. 62); Folglich $hu = ht$, das heißt, die Linie tu wird durch den Durchschnitt der Hyperbel in dem Punkt h in zwey gleiche Theile getheilet, und folglich ist diese Linie eine Tangente der entgegengesetzten Hyperbel (§. 61).

* §. 66.

Vierter Zusatz. Auch die Linien HnG und Hpg, die von dem Berührungspunkt H nach den Endpunkten G und g des conjugirten Diameters Gg gezogen ist, werden in den

Punkte

Punkten n und p, in welchen sie mit den Asymptoten CS und CR zusammen stossen, in zwey gleiche Theile getheilet, das ist, $gp = p$H und G$n = n$H. Dieses ist klar genug, weil, da Hg mit CS parallel ist (Constr.), man folgendes Verhältniß hat. 1) GC : Cg = Gn : nH. Nun ist aber GC = Cg (§. 64). Folglich ist Gn = nH.

2) Da auch HG mit CR parallel ist, so verhält sich auch gC : CG = gp : pH. Nun ist aber gC = CG; Folglich ist gp = pH. W. z. E. W.

* §. 67.

Fünfter Zusatz. Wenn folglich die Asymptoten CS und CR der Hyperbel nebst einem Punkt H dieser krummen Linie gegeben sind, und man sucht zwey conjugirte Diameter, wovon der eine durch den Punkt H gehet, so darf man nur durch das Centrum C die Linie HCh ziehen, HC = Ch machen; durch den Punkt H, die Linie Hn mit der Asymptote CR parallel ziehen; Hn so verlängern, daß nG = Hn; und GCg, die im Centrum C in 2 gleiche Theile getheilet wird, so werden die beyden Linien HCh und GCg die 2 conjugirten Diameter der Hyperbel seyn.

Beweis. Wenn man durch den Punkt H die Linie SHR ziehet, die durch die Asymptote determinirt und mit der Linie GCg parallel ist, so werden die Triangel HnS und GnC sich ähnlich seyn, und da ihre Seiten Hn und nG sich gleich sind (Constr.), so wird auch CG = SH seyn. Weil aber die Linien GC und HR und HG und CR parallel sind (Constr.), so ist offenbar GC = HR; Folglich ist SH = HR. Folglich ist die Linie SHR eine Tangente an dem Punkt H (§. 61). Folglich ist die Linie GCg, die eben so groß und mit ihr parallel ist, der conjugirte Diameter von dem Diameter HCh (§. 64). W. z. E. W.

§. 68.

§. 68.

Sechster Zusatz. Wenn man durch zwey conjugirte Diameter Hh und Gg (Fig. 75) wovon Hh der erste Diameter ist, oder die Hyperbel durchschneidet, die Asymptoten dieser krummen Linie bestimmen wolte, so müste man die Endpunkte G und g des 2ten Diameters durch die Linien HG und Hg verbinden und durch das Centrum C und durch die Mitte n und p dieser Linien die Linien von unbestimmter Länge CS und CR ausziehen. Diese werden die gesuchten Asymptoten seyn. Denn hätte man die Asymptoten als bekannt angenommen, so würden sie die Linien HG und Hg in 2 gleiche Theile getheilet haben (§. 66) und würden alsdenn, wie itzt von den Linien CS und CR nicht unterschieden gewesen seyn. Es müssen also diese Linien die gesuchten Asymptoten seyn.

§. 69.

Siebender Zusatz. Lasset uns durch irgend einen Punkt L der Hyperbel, der von H verschieden ist, die Linie Mm, deren Endpunkte die Punkte M und m in den Asymptoten sind, mit der Tangente SHR parallel ziehen, so wird der Diameter HCh, der gegen K verlängert wird, die Linien Ll, die durch die krumme Linie determinirt wird in P in zwey gleiche Theile theilen.

Beweis. Da die Tangente in dem Berührungspunkt H (§. 62) durch die Linie hP in 2 gleiche Theile getheilet wird, so wird deren Parallellinie Mm auch in P in 2 gleiche Theile getheilet. Folglich ist $ML + LP = ml + Pl$; Nun ist $ML = ml$ (§. 60); Folglich $LP = Pl$. Folglich u. s. w.

* §. 70.

Wenn hingegen eine Sehne Ll der Hyperbel in dem Punkt P durch den Diameter hK in 2 gleiche Theile getheilet wird, so wird diese Linie nothwendig mit der Tangente SHR parallel

lel seyn, die durch den Punkt H, wo der Diameter die krumme Linie schneidet, gezogen ist.

Denn wenn Ll unter diesen Umständen nicht mit der Tangente SHR parallel wäre, so könnte man durch den Punkt l mit der Tangente eine Parallellinie lx ziehen, die oberwärts oder unterwärts Ll fallen, und in dem Punkt y durch den Diameter hK in 2 gleiche Theile getheilet werden würde (§. 69). Und es verhielte sich folglich lP: PL$=ly : yx$. Folglich würde Lx mit Py oder mit dem Diameter bK parallel seyn. Folglich würde eine Linie, die mit dem Diameter der Hyperbel parallel wäre, diese krumme Linie in 2 Punkten durchschneiden können. Dieses ist aber unmöglich, weil sich die Hyperbel immer mehr und mehr von einem ihrer Diameter entfernet.

2) Wenn 2 parallellaufende Sehnen Ll und xT einer Hyperbel durch die Linie KP in 2 gleiche Theile getheilet werden, so gehet diese verlängerte Linie nothwendig durchs Centrum dieser krummen Linie.

Denn gienge sie nicht dadurch, so könnte vom Centrum eine andere Linie nach der Mitte P der Linie Ll ziehen. Dadurch würde Ll mit der Tangente an diesem Punkt, in welchem diese andere Linie die krumme Linie berührt, parallel seyn (N° 1); Folglich würde xT auch mit dieser Tangente parallel seyn, und folglich durch die aus dem Centrum gezogene Linie in 2 gleiche Theile getheilet werden (§. 69). Vermöge der Bedingung wird aber xT auch durch KP in 2 gleiche Theile getheilet, und zwar in einem andern Punkt, als in dem angenommenen Punkte der Berührung. Sonst würden diese 2 Punkte P und K in einander fallen. Folglich würde die Linie xT 2 Mittelpunkte haben. Dieses ist unmöglich. Folglich gehet eine jede Linie KP, die die Mitte zwoer parallel gezogenen Sehnen in einer Hyperbel mit einander vereiniget, nothwendig durch das Centrum dieser krummen Linie.

§. 71.

§. 71.

Erklärung. Man nennet eine jede Linie, wie LP oder Pl, die durch einen beliebigen Punkt P dieses verlängerten Diameters mit der Tangente S*H*R an dem Punkt *H*, durch welchen dieses Diameter gehet, parallel gezogen ist, eine Ordinate dieses Diameters.

§. 72.

Achter Zusatz. Ein jeder erster Diameter *HCh*, der von der Axe unterschieden ist, macht mit seinen Ordinaten schiefe Winkel, oder welches auf eines hinaus lauft, macht mit den Tangenten S*H*R und *thu*, die an den Punkten *H* und *h*, wo dieser Diameter die entgegengesezte Hyperbel durchschneidet, gezogen sind, schiefe Winkel.

Beweis. Man ziehe die halbe Axe CA und verlängere sie willkührlich nach *r* zu, so kann man an dieselbe aus dem Punkt *h* eine Ordinate oder Perpendiculairlinie *hr* ziehen, und da eine jede Tangente der Hyperbel die Axe dieser krummen Linie nothwendig in einem Punkt *e* berühren muß (§. 27), so folgt daraus, daß *her* ein bey *r* rechtwinklichter Triangel ist, und folglich ist der Winkel *her* ein spitziger und *heC* ein stumpfer. Folglich ist auch der Winkel *Che* spitzig. Hieraus erhellet die Wahrheit dieses Zusatzes.

§. 73.

Neunter Zusatz. Hieraus folgt, daß die Axe der einzige erste Diameter sey, welcher mit seinen Ordinaten rechte Winkel macht.

*§. 74.

Zehnter Zusatz. Das Quadrat $\overline{LP}^2$ oder $\overline{Pl}^2$ einer jeden Ordinate an einem verlängerten ersten Diameter *Hh* verhält

hält sich zu dem Rechteck $hP \times HP$ aus dem aufgefangenen Diameter hP und der Abscisse HP, wie das Quadrat $\overline{Gg}^2$ des conjugirten Diameters Gg zum Quadrat $\overline{Hh}^2$ des Diameters Hh.

Beweis. Man ziehe durch den Punkt l der Hyperbel lQ und lN mit den Asymptoten CS und CR parallel, und lasse das übrige alles, wie vorhin. Man mache $CH = Ch = a$. Folglich ist $Hh = 2a$ und $\overline{Hh}^2 = 4aa$; $CG = cg = SH = HR = b$; Folglich ist $Gg = 2b$ und $\overline{Gg}^2 = 4bb$; Cp oder $nH = c$; $Hp = d$; $LP = Pl = z$; $CQ = Nl = r$; $QL = t$; $CP = s$. Folglich ist $hP = s + a$, und $HP = s - a$; Folglich $hP \times HP = (s + a)(s - a) = ss - aa$.

Nun hat man wegen der ähnlichen Triangel CHR und CPm folgendes Verhältniß: $CH : HR = CP : Pm = PM$ oder $a : b = s : \frac{bs}{a} = Pm$ oder PM; Folglich ist $lm = Pm - Pl = \frac{bs}{a} - z$ und $lM = PM + Pl = \frac{bs}{a} + z$.

Eben so ist der ähnlichen Triangel RHp und mlQ wegen $HR : Hp = lm : lQ$; oder $b : d = \frac{bs}{a} - z$; $\frac{bds - adz}{ab} = lQ$; und aus den ähnlichen Triangeln HSn und lMN fließt folgendes Verhältniß $SH : Hn = lM : lN$ oder $b : c = \frac{bs}{a} + z : \frac{bcs + acz}{ab} = lN$. Es ist aber $lQ \times lN = Hp \times pC$ (§. 56), das heißt, wenn man die analytischen Werthe dieser Linien $\frac{bds - adz}{ab}$, $\frac{bcs + acz}{ab}$, d, c substituirt, so ist $\frac{b^2cds^2 - a^2cdz^2}{a^2b^2} = cd$. Wenn man folglich durch cd dividirt, und darauf durch a^2b^2 multiplicirt, so

so ist $b^2s^2 - a^2z^2 = a^2b^2$. Folglich $b^2s^2 - a^2b^2 = a^2z^2$ (D) oder $(s^2 - a^2)\,b^2 = a^2 \times z^2$. Deswegen verhält sich $z^2 : s^2 - a^2 = b^2 : a^2 = 4b^2 : 4a^2$ oder $\overline{LP}^2 : hP \times HP = \overline{Gg}^2 : \overline{Hh}^2$.

§. 75.

Anmerkung. Man siehet vermöge dieses Zusatzes, daß auch die conjugirten Diameter die Eigenschaften der Hyperbel haben, die in Betracht ihrer Axen im 3ten Hauptsatze und in den daraus gefolgerten Sätzen, angegeben sind.

§. 76.

Zweyter Zusatz. Folglich verhalten sich 1) die Quadrate der Ordinaten an jedem ersten Diameter zu einander, wie die Rechtecke aus den aufgefangenen Diametern und den correspondirenden Abscissen. Das heißt: $\overline{xK}^2 : \overline{LP}^2 = hK \times HK : hP \times HP$.

2) Alle Rechtecke, wie $ML \times Lm$ sind allemal so groß als einerley Quadrat $\overline{HR}^2$ oder $\overline{GC}^2 = bb$, und sind folglich auch unter sich gleich. Denn, wenn man die Glieder der Gleichung aus §. 74 versetzt, so ist $b^2s^2 - a^2z^2 = a^2b^2$ und folglich $\frac{b^2s^2}{aa} - zz = bb$. oder $\left(\frac{bs}{a} - z\right) \times \left(\frac{bs}{a} + z\right) = bb$. Nun ist aber $\frac{bs}{a} - z = ML$ und $\frac{bs}{a} + z = Lm$ (§. 74). Folglich ist $ML \times Lm = bb = \overline{HR}^2 = \overline{GC}^2$.

3) Wenn man von dem Punkt L der Hyperbel mit dem ersten Diameter HCh eine Parallellinie LfO ziehet, und sie so lange verlängert, biß sie die Asymptote in den Punkten f und o durchschneidet, so sind alle Rechtecke wie $Lf \times Lo =$

 dem

dem Quadrat $\overline{CH}^2 = aa$, und folglich unter sich gleich.

Man darf zu seiner Ueberzeugung nur die Gleichung D im §. 74 wieder zur Hand nehmen, und wenn man in derselben mit bb dividirt, so ist $s^2 - a^2 = \frac{a^2 z^2}{bb}$; Folglich durchs Versetzen $s^2 - \frac{a^2 z^2}{bb} = aa = \left(s - \frac{az}{b}\right) \left(s + \frac{az}{b}\right)$. Nun ist aber $s - \frac{az}{b} = Lf$ und $s + \frac{az}{b} = Lo$. Denn wegen der ähnlichen Triangel CGS und CJf verhält sich CG oder HS: GS oder CH = CI oder LP : If oder IO (weil tS in G in 2 gleiche Theile getheilet wird; Folglich wird auch die Parallellinie von derselben in I in 2 gleiche Theile getheilet, und folglich ist If = Io), das heißt, wenn man die analytischen Werthe substituirt, $b : a = z : \frac{az}{b} = If = Io$. Folglich ist $Lf = IL - If = CP - If = s - \frac{az}{b}$ und $Lo = IL + Io = CP + Io = s + \frac{az}{b}$. Folglich ist $Lf \times Lo = \left(s - \frac{az}{b}\right) \left(s + \frac{az}{b}\right) = aa$. Dieses ist der vorige Ausdruck. Folglich ist $Lf \times Lo = aa = \overline{CA}^2$. W. z. E. W.

4) Man kann auch auf eine eben solche leichte Art beweisen, daß die Linien Lf und ob, die durch die entgegengesetzten Hyperbeln und durch die Asymptoten determinirt werden, sich gleich sind. Wenn man durch b an dem Diameter Hh eine Ordinate ziehet, so wird diese Ordinate so groß seyn als LP. Daraus erhellet daß $Lf = ob$.

5) Wenn man folgendes Verhältniß annimmt: $Hh : Gg = Gg : p$, oder $2a : b = 2b : p = \frac{2bb}{a}$: so wird

p oder $\frac{2bb}{a}$ der Parameter des Diameters Hh seyn, und folglich verhält sich $4aa : 4bb = 2a : p$ oder $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$. Wenn man folglich aus dem §. 74 die Gleichung D durch bb dividirt, so ist $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$ (L) und wenn man in dieser letzten Gleichung den Ausdruck $\frac{2a}{p}$ an der Stelle von $\frac{aa}{bb}$ setzet, so ist $ss - aa = \frac{2azz}{p}$. Diese Gleichung kommt mit der im §. 37 überein, und die Gleichung $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$ (L) mit der Gleichung im §. 17. Es sind also die Gleichungen der Hyperbel aus ihren Axen und dem Parameter der Axen einerley mit den aus den 2 conjugirten Diametern und den Parametern dieser Diameter. Nur darin sind sie unterschieden, daß die Axen rechtwinklicht gegen einander sind, die conjugirten Diameter aber schiefe Winkel unter sich machen.

6) Nimmt man die conjugirten Diameter als gleich an, das heißt, macht man $a = b$, so wird aus der Gleichung $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$ folgende werden $ss - aa = zz$. Dieses ist die Gleichung für eine gleichseitige Hyperbel gegen jede 2 ihrer Diameter. Weil würklich in der gleichseitigen Hyperbel die 2 conjugirten Axen sich gleich sind (§. 18) und der Asymptotenwinkel SCR ein rechter Winkel ist (§. 19), so wird also ein Cirkel, den man aus der Mitte H der Linie SR $=$ Gg mit dem Radius HS oder HR beschreibet, durch das Centrum C der Hyperbel gehen und es wird HC $=$ HS oder 2HC $=$ 2HS seyn, oder Hh $=$ SR. Es ist aber SR $=$ Gg. Folglich ist Hh $=$ Gg. Hieraus siehet man, daß in der gleichseitigen Hyperbel so wohl die 2 conjugirte Diameter als auch die Axen sich gleich sind.

* §. 77.

Achter Hauptsatz. Man ziehe durch jede 2 Punkte M und l der Hyperbel (Fig. 76) die Tangenten CMS und dlN, die durch die Asymptoten in den Punkten C und S; d und N bestimmt werden. Man ziehe auch die Linien Cd und und NS, so werden nothwendig diese 2 letztern Linien unter sich parallel seyn, oder es verhält sich alsdenn OC : ON = Od : OS.

Beweis. Man ziehe durch die Berührungspunkte M und l die Linien MP und lG mit der Asymptote Od parallel, so wird MP×PO so groß seyn, als lG×GO (§. 56) Folglich verhält sich PO : GO = lG : MP oder 2PO : 2GO = 2lG : 2MP. (D). Es ist aber CP = PO, weil (§. 62) CM = MS. Folglich ist OC = 2PO oder 2CP.

Da ferner MP mit OS parallel ist (Constr.), so verhält sich OC : CP = OS : MP. Nun ist aber OC = 2CP. Folglich ist OS = 2MP und da Nl = ld (§. 62), so ist NG = GO; Folglich ON = 2GO oder 2NG. Da folglich lG mit Od parallel ist (Constr.), so verhält sich ON : NG = Od : lG. Es ist aber ON = 2NG. Folglich ist Od = 2lG.

Setzen wir daher in dem obigen Verhältniß D die Werthe, die wir so eben bestimmt haben, das heißt, setzen wir für 2PO, OC; für 2GO, ON und Od für 2lG und OS für 2MP, so verhält sich OC : ON = OD : OS. Dieses zeigt an, daß Cd mit NS parallel sey. W. z. E. W.

* §. 78.

Zusatz. Weil NS mit Cd parallel ist, so verhalten sich CN : ON = dS : OS.

* §. 79.

Neunter Hauptsatz. Wenn man durch die Berührungs-

rungspunkte M und l die Linie Ml ziehet, so wird diese mit der Linie Cd und NS parallel seyn.

Beweis. Denn Cd ist mit NS parallel (§. 77). Wenn man folglich von den Punkten M und l die Perpendicularlinien TMK und SlF fallen läßt, so ist

1) Wegen der Aehnlichkeit der Triangel TMS und CMK, CM : MS = MT : MK. Nun ist aber CM = MS (§. 62). Folglich ist MT = MK : Folglich ist MK $= \frac{KT}{2}$ oder $\frac{FS}{2}$.

2) Aus den ähnlichen Triangeln DlF und nlS ziehet man nachstehendes Verhältniß : dl : lN = lF : lS. Nun ist $dl = l$N (§. 62); Folglich ist lF = lS = Folglich ist lF $= \frac{FS}{2}$. Es ist aber MK $= \frac{FS}{2}$ (N° 1) Folglich ist die Perpendicularlinie MK so groß, als die Perpendicularlinie lF. Folglich ist Ml mit cd parallel. Es ist aber Cd mit NS parallel (§. 77) Folglich ist MC mit den beyden Linien Cd und NS parallel (W. z. E. W.)

* §. 80.

Zehnter Hauptsatz. Die Tangenten CMS und dlN werden durch die Berührungspunkte M und l und den Punkt x, wo sie sich schneiden, so getheilet, daß die beyderseitigen Theile im Verhältniß gegen einander stehen, das heißt, daß CM : dl = Mx : lx = xS : xN.

Beweis. Weil CD mit Ml parallel lauft (§. 79), so ist CM : dl = Mx : lx und Mx : lx = xS : xN. Denn die Triangel xMl und xNS sind sich ähnlich. Folglich verhält sich CM : dl = Mx : lx = xS : xN. W. z. E. W.

*§. 81.

Zusatz. Folglich verhält sich auch CM : $Mx = dl : lx$. Folglich ist $CM + Mx : Mx = dl + lx : lx$, das heißt, $Cx : Mx = dx : lx$ oder $Mx : Cx = lx : dx$.

* §. 82.

Eilfter Hauptsatz. Man ziehe einen ersten Diameter OlP (Fig. 77) und durch den Punkt l, wo er die krumme Linie durchschneidet, die Tangente Nld, um an diesen Diameter eine Ordinate PM zu erhalten. Ferner verzeichne man durch den Punkt M die Tangente CMS. Nun behaupte ich, daß diese Tangente den Diameter OlP in einem Punkt R unterhalb dem Centrum O durchschneiden werde, daß daher $OP : Ol = Ol : OR$.

Beweis. Man verlängere die Ordinate PM so lange, bis sie in dem Punkt G die Asymptote OC durchschneidet und ziehe mit der Tangente CS die Parallellinie lK. Nun wird die Tangente CS den Diameter OP in einem Punkt R unterwärts O durchschneiden, weil diese Tangente, die immer unterhalb O ist von der Asymptote OC zur Asymptote Od gehet, zwischen welchen der erste Diameter OP nothwendig durchgehet.

2) Itzt ist zu beweisen, daß $OP : Ol = Ol : OR$. Es ist aber wegen der Parallellinien Nl und PG, $Pl : Ol = GN : ON$ oder $\frac{Pl}{OL} = \frac{GN}{ON} = \frac{GN \times NC}{NC \times ON}$. Da nun GM der Construction wegen mit Nx parallel ist, so verhält sich $GN : NC = Mx : Cx = lx : dx$. (§. 81) $= KS : dS$ (weil lK mit xS parallel ist) (Construct.). Folglich verhält sich $GN : NC = KS : dS$ oder $\frac{GN}{NC} = \frac{KS}{dS}$.

Ferner verhält sich $NC : ON = dS : OS$ (§. 78)

Folg-

Folglich ist $\frac{NC}{ON}=\frac{dS}{OS}$: Wenn man folglich in der Gleichung $\frac{Pl}{ol}=\frac{GN\times NC}{NC\times ON}$. Die Grösse $\frac{KS}{dS}$ an der Stelle von $\frac{GN}{NC}$ und $\frac{dS}{OS}$ an der Stelle von $\frac{NC}{ON}$ setzet, so ist $\frac{Pl}{Ol}=\frac{KS}{OS}$. Nun verhält sich aber wegen der Parallellinien lK und RS (Constr.) $KS : OS = lR : OR$ oder $\frac{KS}{OS}=\frac{lR}{OR}$. Folglich ist $\frac{Pl}{Ol} = \frac{lR}{OR}$ oder $Pl : Ol = lR : OR$. Folglich ist $Pl + Ol : Ol = lR + OR : OR$, das heißt, $OP : Ol = Ol : OR$. W. z. E. W.

*§. 83.

Wenn man hingegen an einem Diameter OP eine Ordinate OM ziehet, und zu den 2 Linien OP und Ol eine dritte Proportionallinie suchet, und wenn man diese aus O in R trägt und die Linie MR ziehet, so behaupte ich, daß diese Linie MR eine Tangente von der Hyperbel sey.

Beweis. Wäre sie keine Tangente an dem Punkt M, so könnte man aus diesem Punkt eine andere ziehen. Diese würde den Diameter OP in irgend einem Punkt V oberhalb oder unterhalb R durchschneiden. Setzt man aber das Verhältniß $OP : Ol = Ol : OR$, so kann VM unmöglich eine Tangente seyn Denn nähme man VM als eine Tangente an, so verhielte sich nach §. 82 $OP : Ol : Ol : OV$. Folglich wäre $OV=\frac{\overline{Ol}^2}{OP}$. Vermöge der Bedingung verhält sich aber $OP : Ol = Ol : OR$. Folglich ist $OR = \frac{\overline{Ol}^2}{OP}$. Folglich wäre $OV = OR$: Welches unmöglich ist.

§. 82.

Anmerkung. Diese Art, eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen, hätte man schon lange verstehen können. Die Anfänger werden aber finden, daß man auf diesem Wege langsam und beschwerlich zu seinem Endzweck kommt. Wir werden daher nicht unschicklich unsere Methode Tangenten an krumme Linien zu ziehen, wieder vornehmen. Man wird finden, wie leicht sie gegen die vorige Methode der Alten sey.

§. 85.

Aufgabe. Den Ausdruck von OC zu finden, wenn man OH für die Tangente annimmt (Fig. 70).

Auflösung. Man stelle sich anfänglich vor, daß OH die Hyperbel in den Punkten H und L durchschneide und ziehe die Ordinate HE und LR auf die Axe oder auf den Diameter.

Nun ist es evident, daß OC = CE — OE, das heißt, OC ist so groß, als die undeterminirte Linie CE weniger die Subtangente OE. Man suche also den Ausdruck für die Subtangente.

1) Deswegen sey CA = BC = a; CE = x; ER = r; OE = s; OC = CE — OE = $x - s$; OR = OE + ER = $s + r$; BR = BC + CE + ER = $a + x + r$; AR = CE + ER — CA = $x + r - a$. Folglich ist BR × AR = $(a + x + r)(x + r - a) = xx + 2rx + rr - aa$; AE = CE — CA = $x - a$; BE = CE + BC = $x + a$. Folglich ist BE × AE = $(x + a)(x - a) = xx - aa$.

2) Nach dieser Voraussetzung ist der ähnlichen Triangel ORL und OEH wegen OR : OE = RL : EH oder $\overline{OR}^2 : \overline{OE}^2 = \overline{RL}^2 : \overline{EH}^2$. Allein (§. 4) $\overline{RL}^2 : \overline{EH}^2$ = BR × AR:

$\times AR : BE \times AE$. Folglich $BR \times AR : BE \times AE = \overline{OR}^2 : \overline{OE}^2$. Das heißt, wenn man in dieser Proportion die analytischen Werthe dieser Glieder setzet. $xx + 2rx + rr - aa : xx - aa = ss + 2rs + rr : ss$. Wenn man folglich das 2te Glied vom ersten und das 4te vom 3ten abziehet, so ist $2rx + rr : xx - aa = 2rs + rs : ss$. Wenn man folglich das Factum der beyden äussersten und mittelsten Glieder macht, so ist $2rs^2x + r^2s^2 = 2rsx^2 + r^2x^2 - 2a^2 \cdot rs - a^2r^2$ und wenn man durch r dividirt, so ist $2s^2x + rs^2 = 2sx^2 + rx^2 - 2a^2s - a^2r$ (E). Auf diese Gleichung kommt man, wenn man OH für eine Sekante annimmt. Wird nun aber OH die Tangente, so fallen die Punkte L und H in einander und der Unterschied der Abscissen $ER = r$ verschwindet oder $r = o$. Folglich muß man in der Gleichung E alle Glieder, worin r vorkommt, wegnehmen, so ist $2s^2x = 2sx^2 - 2a^2s$. Wenn man folglich durch $2s$ dividirt, so ist $sx = xx - aa$ oder $s = \frac{xx - aa}{x}$ $= OE =$ der Subtangente.

3) Folglich ist $OC = CE - OE = x - \frac{xx + aa}{x} = \frac{xx - xx + aa}{a} = \frac{aa}{x}$. Folglich ist $OC = \frac{aa}{x}$ oder $OC \times x = aa$. Folglich verhält sich $x : a = a : OC$ oder $CE : CA = CA : OC$. Dieser Werth ist dem im §. 82 gefundenen vollkommen gleich.

§. 86.

Anmerkung. Nach der vorigen Methode haben wir den Werth von OC nur vermittelst 9 Hauptsätzen erhalten, unter welchen der 9te allein schon so langwierig und beschwerlich, als die ganze Auflösung unserer Aufgabe, nach meiner

Methode ist. Man hat dort eine viel grössere Anzahl Vergleichungen nöthig, als in dem letztern Fall, wo man alles durch 2 ähnliche Triangel und vermittelst der im ersten Hauptsatz bewiesenen Eigenschaft der Hyperbel blos durch Rechnung findet.

Vielleicht hält man diese Erfindung für unnütz, weil man ohne sie eine Tangente an die Hyperbel ziehen kann. Es ist wahr, man kann diese Aufgabe auflösen, wenn Asymptoten mit in der Auflösung vorkommen. Allein, ausserdem, daß man vermittelst dieser letzten Methode ohne Asymptoten, bloß durch die Axe oder einen von den Diametern die Tangente ziehen kann, so dient uns auch der augenblicklich gefundene Ansdruck für OC, nämlich $\frac{aa}{x}$, darzu, 2 Punkte der Hyperbel zu finden, welcher bey der Anwendung dieser krummen Linie auf die ausübenden Künste wichtig ist. Wir werden dieses zeigen, wenn wir vorher einige Folgerungen aus dem vorigen Satze gezogen haben.

§. 87.

Erster Zusatz. Weil (Fig. 70) die Subtangente $OE = \frac{xx - aa}{x}$ (§ 85. N° 2), so ist $OE \times x = (x+a)(x-a)$ oder $x : x+a = x-a : OE$. oder $CE : BE = AE : OE$. als der Subtangente, aus welcher man die Tangente herleitet. Wenn folglich einer von den Punkten H der Hyperbel und ihre Axe oder einer ihrer ersten Diameter gegeben ist, so darf man nur, die Tangente OH zu bekommen, die Ordinate HE an den gegebenen Diameter ziehen (§. 101. Ellypse). Dadurch wird die Grösse CE determinirt, und durch diese kann man das übrige finden.

§. 88.

Zweyter Zusatz. Wenn man den Ausdruk von OC =

$=\frac{aa}{x}$ (§. 85) annimt und wenn man alsdenn OC von CA abziehet, so ist $CA - OC = aa - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x} = AO$. oder $AO \times x = (x - a)\ a$. Draus folgt, daß $x : x - a = a : AO$ oder $CE : AE = CA : AO$. Dieses bestimmt auch den Punkt O der Tangente, wenn ein Punkt der krummen Linie und einer ihrer ersten Diameter gegeben ist.

§. 89.

Dritter Zusatz. Man bemerke hier, daß eine Tangente, die an einen Punkt der Hyperbel, der von dem Scheitelpunkt verschieden ist, gezogen wird, nothwendig die Axe oder einen ihrer ersten Diameter in einem Punkt zwischen dem Centrum der krummen Linie und dem Scheitelpunkt durchschneide und daß sie eine Neigung habe, auf der entgegengesetzten Seite eine von den Asymptoten zu durchschneiden. Weil nun beständig $OC = \frac{aa}{x}$ (§ 85) oder weil $CE : CA = CA : OC$, so erhellet, daß die Linie CE unaufhörlich wachsen und gegen CA unendlich groß werden kann, weil CA eine beständige Grösse ist. Es kann CE z.E. hundert Millionen mal grösser werden als CA, folglich kann auch CA hundert Millionenmal grösser werden als OC, oder welches einerley ist, OC kann nur der hundertmillionste Theil von CA seyn. Es wird aber der hundertmillionste Theil von CA keine merkliche Grösse seyn. Wenn folglich CE sehr groß in Vergleichung gegen ihren ersten Diameter wird, so werden die Punkte O und C gewissermassen in einander fallen, oder ihre Tangente wird die Axe oder den Diameter beynahe im Centrum durchschneiden, und folglich ist die Tangente beynahe nicht von der Asymptote verschieden, weil sie mit dieser Linie beynahe 2 Punkte gemeinschaftlich hat. Folglich kann man behaupten, daß die Asymptote der Hyperbel, die in einer sehr grossen Weite verlängert sind,

sind, nach der Empfindung zu urtheilen, die Tangente der krummen Linie werde (*a*).

* §. 90.

(*a*) Wolte man einwenden, daß dieses alles dem §. 46 widerspräche, in welchem man bewies, daß die Asymptoten der Hyperbel, man mögte sie auch so lange verlängern, als man will, niemals diese krumme Linie berühren würde, so muß man bedenken, daß die Asymptoten nur alsdenn Tangenten werden, wenn sie ins unendliche verlängert werden. Da dieses aber unmöglich ist, so ist es eben so viel, als wenn man sagte, daß sie sich bey einer sehr grossen Verlängerung endlich so sehr der Tangente näherten, daß der würkliche Unterschied zwischen ihnen und der Tangente unmerklich und kleiner als jede Grösse wird. Dieses geschiehet aber nur, wenn sie unendlich verlängert wird, und dieses heißt im Grunde nichts anders, als es sey unmöglich, daß es jemals statt habe. Wenn man also um die Gleichheit 2 Grössen zu zeigen, sich dieses Satzes bedlente: **Zwey Grössen sind sich gleich, wenn ihr Unterschied kleiner, als jede Grösse ist,** so muß man wohl Acht haben, ob die Gränze, welcher sich die Grössen beständig nähern, unendlich oder endlich sey. Im lezten Fall ist würklich eine Gleichheit da, weil nach dem Beweise unmöglich ein Unterschied angegeben werden kann. Anders ist es aber im ersten Fall. Denn, weil sie die Gränze erst in einer unendlichen Weite oder Entfernung erreicht, so ist es eben so viel, als wäre gar keine Gränze da. Weil also der Punkt der Vergleichung fehlet, so findet der Satz nicht weiter statt, und sich also darauf gründen, heißt, sich einem unfehlbaren Trugschluß aussetzen, der uns gewiß auf diesen offenbahren Widerspruch führen würde, daß die Asymptoten der Hyperbel niemals mit dieser krummen Linie zusammen stossen könnten, und daß sie inzwischen sich dennoch durchschnitten.

Ich habe mich den Anfängern zu Gefallen hierbey etwas aufgehalten. Sie hätten ein Mißtrauen gegen den Satz fassen können, daß Grössen sich gleich sind, wenn bewiesen ist, daß der Unterschied zwischen ihnen kleiner, als jede angebliche Grösse ist. Ich habe es aber um so viel lieber gethan, da ich keinen einzigen Geometer kenne, welcher Achtung genug darauf gehabt hat, daß man diesen scheinbaren Widerspruch heben müsse.

* §. 90.

Vierter Zusatz. Wenn man die Tangente MO nach Gefallen gegen T verlängert (Fig. 78), biß sie in einem Punkt H mit der 2ten nach Erforderniß verlängerten Axe GCD zusammen stößt und wenn man von dem Punkt M auf diese 2te Axe eine Perpendiculairlinie MS ziehet, so verhält sich

$$S : CG = CG : CH \text{ oder } CS \times CH = \overline{CG}^2.$$

Beweis. Man ziehe die Ordinate $ME = CS = y$ und behalte die vorige Benennungen der Linien. Man erinnere sich, daß $OE = \frac{xx - aa}{x}$ und $OC = \frac{aa}{x}$ (§. 85). Betrachten wir nun die ähnlichen Triangel OEM und OCH, so verhält sich OE : EM oder CS = OC : CH. Das heißt, wenn man die analytischen Werthe substituirt $\frac{xx-aa}{x}$: $y = \frac{aa}{x}$: CH oder wenn man die Brüche wegnimmt, $xx - aa : y = aa$: CH. Es ist aber $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ (§. 17). Folglich verhält sich $\frac{aayy}{bb} : y = aa$: CH, oder wenn man den Bruch aufhebt $aayy : bby = a^2$: $CH = \frac{aabby}{aayy} = \frac{bb}{y}$. Folglich ist $CH \times y = bb$ oder $CH \times CS = \overline{CG}^2$. Hieraus folgt, daß CS : CG = CG : CH. W. z. E. W.

§. 91.

Fünfter Zusatz. Man richte aus den Endpunkten B und A der ersten Axe AB die Perpendiculairlinien AV und BT auf, und verlängere sie, biß sie auf eine Tangente MOT stossen, so ist das Rechteck AV×BT aus diesen Perpendicu-

lairlinien so, groß als das Quadrat der halben 2ten Axe $\overline{CG}^2$.

Beweis. Es verhält sich CE : CA = CA : OC (§. 85) Folglich ist CE—CA : CA = CA—OC : OC, oder AE : CA = AO : OC oder verwechselt AE : AO = CA : OC : Folglich ist AE + AO : AO = CA + OC, oder BC + OC : OC. Das heißt, es verhält sich OE : AO = OB : OC oder AO : OE = OC : OB. Es verhält sich aber wegen der ähnlichen Triangel OAV und OEM, AO : OE = AV : EM. Folglich ist AV : EM = OC : CB. Nun geben aber die ähnlichen Triangel OCH und OBT folgendes Verhältniß OC : OB = CH : BT. Folglich verhält sich auch AV : EM oder CS = CH : BT. Folglich ist AV × BT = CS × CH. Nun ist CS × CH = $\overline{CG}^2$ (§. 90). Folglich ist AV × BT = $\overline{CG}^2$. W. z. E. W.

§. 92.

Sechster Zusatz. Wenn man von den Punkten f und F (§. 29) auf die Tangente MT Perpendiculairlinien FL und fK ziehet, so ist das Product aus diesen Perpendiculairlinien fK × FL so groß, als das Quadrat von der Helfte der 2ten Axe = $\overline{CG}^2$. Folglich ist zu beweisen, daß fK × FL = $\overline{CG}^2$.

Beweis. 1) Wir behalten immer die nämliche Benennungen und nennen nun noch CF = Cf = c, so ist $cc = aa + bb$. (§. 29) $Of = Cf - Oc = c - \frac{aa}{x} = \frac{cx - aa}{x}$; $OF = CF + OC = c + \frac{aa}{x} = \frac{cx + aa}{x}$; $AO = CA - OC = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x}$; $OB = CB + OC = a + \frac{aa}{x} = \frac{ax + aa}{x}$.

2)

2) Itzt verhält sich der ähnliche Triangel OAV und OKf wegen Of : OV = fK : AV. (S) und aus den ähnlichen Triangeln OLF und OBT fließt folgendes Verhältniß OF : OT = FL : BT. (T) Wenn man folglich die Glieder dieser beyden Verhältnisse S und T der Ordnung nach durch einander multipliciret, so verhält sich Of × OF : OV × OT = fK × FL : AV × BT (D) Wenn man folglich beweiset, daß Of × OF = OV × OT, so ist bewiesen, daß $f\text{K} \times \text{FL} = \text{AV} \times \text{BT} = \overline{\text{CG}}^2$ (§ 91). Nun ist aber Of × OF $= \left(\frac{cx - aa}{x}\right) \times \left(\frac{cx + aa}{x}\right)$ (N° 1) $= \frac{c^2 x^2 - a^4}{xx} = \frac{a^2 x^2 + b^2 x^2 - a^4}{xx}$ (Wenn man nämlich $aa + bb$ in der Stelle von cc setzet). Folglich ist noch zu beweisen, daß auch OV × OT $= \frac{a^2 x^2 + b^2 x^2 - a^4}{xx}$.

3) Um dieses beweisen zu können, erinnere man sich anfangs, daß OE $= \frac{xx - aa}{x}$ (§. 85); Folglich $\overline{\text{OE}}^2 = \frac{(xx - aa)^2}{xx}$ und wegen des rechtwinklichten Triangels OEM ist $\overline{\text{OM}}^2 = \overline{\text{OE}}^2 + \overline{\text{EM}}^2$ oder OM $= \sqrt{\left(\frac{(xx - aa)^2}{xx} + yy\right)}$.
Aus der Aehnlichkeit der Triangel OEM und OAV schliessen wir folgendes Verhältniß OE : OM = AO : OV oder $\frac{xx - aa}{x} : \sqrt{\left(\frac{(xx - aa)^2}{xx} + yy\right)} = \frac{ax - aa}{x}$: OV. Dividiren wir folglich das erste und dritte Glied durch $\frac{x - a}{x}$ und verwechseln die Glieder, so verhält sich $x + a : a = \sqrt{\left(\frac{(xx - aa)^2}{xx} + yy\right)}$: OV (G).

So ist wegen der ähnlichen Triangel OEM und OBT, OE: OM :

$OM = OB : OT$ oder $\frac{xx - aa}{x} : \sqrt{\left(\frac{(xx - aa)^2}{x} + yy\right)}$ $= \frac{ax + aa}{x} : OT$. Dividirt man also das erste und dritte Glied durch $\frac{x + a}{x}$ und verwechselt sie alsdenn, so ist $x - a : a = \sqrt{\left(\frac{(xx - aa)^2}{xx} + yy\right)} : OT$. (L) Wenn man folglich die Glieder der beyden Verhältnisse G und L der Ordnung der Glieder nach durch einander multiplicirt, so ist $xx - aa : aa = \frac{(xx - aa)^2}{xx} + yy : OV \times OT$. Sezet man also in diesem lezten Verhältniß den Werth von $yy = (xx - aa) \times \frac{bb}{aa}$ (§. 23) und multiplicirt alsdenn die mittelsten Glieder durch einander und dividirt dieses Product alsdenn durchs erste Glied $xx - aa$, so ist $OV \times OT$

$$= \frac{\frac{(xx - aa)(xx - aa)}{xx} \times aa + (xx - aa) \times \frac{bb}{aa} \times aa}{xx - aa}$$

$= \frac{a^2x^2 - a^4}{xx} + bb = \frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx}$. Dieser Werth von $OV \times OT$ ist grade derjenige, den wir (N° 2) für $Of \times OF$ gefunden haben. Folglich ist $Of \times OF = OV \times OT$. Folglich ist, vermöge des Verhältnisses D (N° 2) $fK \times FL = AV \times BT$. Nun ist aber $AV \times BT = \overline{CG}^2$ (§. 91). Folglich ist endlich $fK \times FL = \overline{CG}^2$. W. z. E. W.

§. 93.

Zwölfter Zusatz. Nachdem man aus dem Centrum C (Fig. 70) die Hypothenuse BD auf die Punkte F und f der Axe der entgegengesetzten Hyperbeln getragen hat, und wenn man von einem beliebigen Punkt M einer dieser Hyperbeln

beln die Linien MF und Mf an die Punkte F und f (§. 29) ziehet, und wenn man ferner an den nämlichen Punkt M die Tangente Ml ziehet, so behaupte ich, daß der Winkel fMl $=l$MF oder welches einerley ist, daß Mf : MF : fl : lF (*).

Beweis. Man gäbe den nämlichen Linien die vorige Benennung, und erinnere sich, daß im §. 29 bewiesen ward, daß $Mf = \frac{cx + aa}{a}$ und $MF = \frac{cx - aa}{a}$. So verhält sich also $Mf : MF = cx + aa : cx - aa$. Allein, da C$l$ in Absicht auf die Tangente Ml das ist, was OC in Betracht der Tangente OH ist, so ist (§. 85) $Cl = \frac{aa}{x}$; Folglich ist $fl = Cf + Cl = C + \frac{aa}{x} = \frac{cx + aa}{x}$; Folglich ist $fl = \frac{cx + aa}{x}$ und $lF = CF - Cl = c - \frac{aa}{x} = \frac{cx - aa}{x}$; Folglich ist $lF = \frac{cx - aa}{x}$; Folglich verhält sich $fl : lF = cx + aa : cx - aa$. Wir haben aber so eben bewiesen, daß $Mf : MF = cx + aa : cx - aa$. Folglich verhält sich $Mf : MF = fl : lF$ und folglich ist der Winkel $fMl =$ dem Winkel lMf. W. z. E. W.

§. 94.

Wenn man hingegen den Winkel fMF in 2 gleiche Theile theilet, oder wenn der Winkel $fMl = l$MF ist, so wird die Linie Ml die Tangente in dem Punkt M seyn. Und um dieses zu beweisen, dürfen wir nur zeigen (§. 83) daß $CP : CB = CB : Cl$ oder, daß $Cl = \frac{aa}{x}$. Denn nach der Voraussetzung ist $CP = x$ (Fig. 70).

(*) Denn da der Winkel fPM = FRM, weil er zu beyden Triangeln gehört, so sind unter dieser Bedingung diese Triangel sich ähnlich. Folglich findet das angegebene Verhältniß statt. B.

Beweis. Weil nach der Bedingung der Winkel $fMl = lMF$, so verhält sich $Mf : MF = fl : lF$ (Geom.). Folglich ist $Mf - MF : MF = fl - lF : lF$ (G). Nun ist aber $Mf - Mf = 2a$ (§. 31). $MF = \frac{cx - aa}{a}$ (§. 29 N° 2); $fl - lF = Cl + CF - lF = Cl + Cl + lF - lF = Cl + Cl + lF - lF = 2Cl$; Folglich ist $fl - lF = 2Cl$; und $lF = \frac{cx - aa}{x}$ (§. 93). Wenn man folglich in dem Verhältniß G die Werthe von $Mf - MF$, MF, $fl - lF$, die wir itzt eben gefunden haben, substituirt, so verhält sich $2a : \frac{cx - aa}{a} = 2Cl : \frac{cx - aa}{x}$. Daraus schliesset man, daß $2Cl$

$$= \frac{\frac{cx - aa}{x} \times 2a}{\frac{cx - aa}{a}} = \frac{(cx - aa) \times 2a \times a}{(cx - aa)\, x} = \frac{2aa}{x}$$

Folglich ist $Cl = \frac{aa}{x}$ oder $Cl \times x = aa$. Folglich verhält sich $x : a = a : Cl$ oder $CP : CB = CB : Cl$ und folglich ist Ml eine Tangente (§. 83). W. z. E. W.

§. 95.

Erster Zusatz. Man verlängere die Linien fM und lM nach Belieben biß zu den Punkten b und a. Da nun der Winkel aMb so groß, als sein Verticalwinkel $fMl = lMf$ (§. 93), so folgt, daß der Winkel $aMb = lMF$, das heißt, daß der Einfallswinkel FMl dem Reflexionswinkel bMa gleich sey. Wenn folglich in dem Punkte F ein leuchtender Körper stünde, so würden die Lichtstrahlen FM nach ihrem Auffallen auf die krumme Linie nach den Linien Mb so zurückgeworfen werden; daß, wenn sie von A aus verlängert würden, sie durch den andern Punkt f gehen würden. Folglich

lich würden sich alle diese reflectirte verlängerte Lichtstrahlen in dem Punkt f vereinigen, und wenn man hingegen den leuchtenden Körper in f setzte, so würden alle Strahlen von der erhabenen Seite der krummen Linie so zurück geworfen werden, daß diese verlängerten reflectirten Linien sich in dem Brennpunkt F vereinigen würden. Dieses alles erhellet, wenn man FM von der Seite h verlängert. Deswegen sind die Punkte f und F Brennpunkte. Dieses versprachen wir im §. 36 zu beweisen.

§. 96.

Zweyter Zusatz. Man ziehe von einem Punkt M (Fig. 79) einer Hyperbel die Linien MF und Mf nach den Brennpunkten F und f, und theile den Winkel fMF durch die Linie CME in 2 gleiche Theile, so ist diese Linie CME an dem Punkt M die Tangente dieser Hyperbel (§. 94). Aus dem Berührungspunkt M richte man auf dieser Tangente die Perpendiculairlinie GML auf, und ziehe durch diesen nämlichen Punkt MT = Mf mit der Axe ABS parallel. Wenn man nun von den Punkten T und f auf GMl die Perpendiculairlinien TG und fG ziehet, so verhalten sich diese unter einander, wie sich die erste Axe AB zur Entfernung der Brennpunkte Ff verhält. Das heißt, es verhält sich TL : fG = AB : Ff.

Beweis. 1) Man verlängere fM von der Seite P und ziehe von dem Punkt S auf fP die Perpendiculairlinie SP. Darauf ziehe man FO mit GL parallel, damit Of der Unterschied zwischen Mf und MF sey. Denn da GL auf CE perpendiculair ist (Constr.), so ist FO es gleichfalls. Weil folglich der Winkel FME = OME (Constr.), so erhellet, daß MFE = MOE; Folglich MF = MO. Folglich Mf — MF = Mf — MO = Of. Folglich ist die Differenz zwischen Mf nnd MF die Linie Of. Ferner ist diese Linie Of = der ersten Axe AB; Denn Mf — MF = AB. (§. 31). Nun

 ist

ist $Mf - MF = Of$, wie wir oben gesehen haben. Folglich ist $Of = AB$. Endlich ziehe man noch MH auf AS perpendiculair.

2) Nach dieser Voraussetzung verhält sich wegen der rechtwinklichten ähnlichen Triangel TML und MSH, $TL : MH = MT$ oder $Mf : MS$. Wegen der ähnlichen rechtwinklichten Triangel fGM und SPM verhält sich aber $Mf : MS = fG : PS$. Folglich ist $Tl : MH = fG : PS$ oder $TL : fG = MH : PS$. Es verhält sich aber auch wegen der ähnlichen rechtwinklichten Triangel fPS und fHM, $MH : PS = fM : fS$. Folglich auch $TL : fG = fM : fS$; Weil aber OF mit ML parallel ist (Constr.), so verhält sich auch $fM : fS = Of : fT$. Folglich auch $TL : fG = Of : fF = AB : fF$. Denn $Of = AB$ (N° 1). Folglich verhält sich endlich $TL : fG = AB : fF$. W. z. E. W.

§. 97.

Man lasse eine Perpendiculairlinie fG auf die Linie GML fallen. Diese Linie stehet perpendiculair auf CME, die den Winkel fMF, welcher von den 2 Linien Mf und MF, die aus einem Punkt M einer Hyperbel in die Brennpunkte F und f gezogen sind, entstanden ist, in 2 gleiche Theile theilet. Man suche alsdenn die 4te Proportionallinie TL zu 3 gegebenen fF, AB, fG und man construire an dem Punkt M auf der verlängerten Linie GM den rechtwinklichten Triangel LMT, dessen Hypothenuse $MT = Mf$ und dessen andere Seite $= TL$ ist (a). Nun behaupte ich, daß MT mit der Axe ABS parallel sey.

Beweis.

(a) Die Construction dieses rechtwinklichten Triangels auf die Verlängerung GM ist sehr leicht. Denn da die Grösse der Hypothenuse $MT = Mf$ nebst der Länge der Linie TL (Beding) gegeben ist, so weiß man folglich auch die Länge von ML, worauf man diesen Triangel construiren soll.

Beweis. Vermöge der Construction verhält sich TL : $fG = AB : fF = OF : fF$ (denn es ist $Of = AB$ (§. 96)) $= fM : fS$ (weil OF und MS Parallellinien sind) $= MT : fS$ (weil $MT = fM$ (Beding)). Folglich verhält sich $TL : fG = MT : fS$ oder $TL : MT = fG : fS$. Folglich sind die rechtwinklichten Triangel MLT und fGS sich ähnlich (Geom.); Folglich ist der Winkel $TML = GSf$. Folglich schneidet die Linie GML die Linien MT und AS so, daß die Wechselwinkel sich gleich sind. Folglich ist MT mit AS parallel. W. z. E. W. Wir gebrauchen diesen Satz.

§. 98.

Dritter Zusatz. Man ziehe an 2 Punkte einer Hyperbel 2 Tangenten MS und TQ (Fig. 80) und aus dem Brennpunkt F die Perpendiculairlinien FH und FR auf diese Tangenten. Nun behaupte ich, daß diese Tangenten nach einem geringern Verhältniß unter sich wachsen, als in dem Verhältniß der Quadratwurzeln der Träger FM und FT, die aus dem Brennpunkt F an die Berührungspunkte M und T gezogen werden, das heißt, FH ist grösser im Verhältniß gegen FR als $\sqrt{FM}$ gegen $\sqrt{FT}$. Folglich ist zu beweisen, daß $\frac{FH}{FR} > \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$.

Beweis. 1) Nachdem man aus dem Brennpunkt f der entgegengesetzten Hyperbel die Linien fM und fT an die Berührungspunkte M und T gezogen hat, so ist der Winkel FMH so groß, als der Winkel fMS (§. 93). Und folglich sind die rechtwinklichten Triangel FHM und fSM sich ähnlich. Folglich verhält sich $FM : fM = FH : fS = \frac{FH \times fM}{FM}$ oder $fS \times FH = \frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM}$. Nun ist $fS \times FH =$

 $\overline{CG}^2$

$\overline{CG}^2$ (§. 92); Folglich ist $\frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM} = \overline{CG}^2$; Folglich ist

$\overline{FH}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$.

2) Da auch der Winkel $FTR = fTQ$ (§. 93), so sind die rechtwinklichten Triangel FRT und fQT sich ähnlich; Folglich verhält sich $FT : fT = FR : fQ = \frac{FR \times fT}{FT}$. Folglich ist $fQ \times FR = \frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT}$. Es ist aber $fQ \times FR = \overline{CG}^2$ (§. 92). Folglich ist $\frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT} = \overline{CG}^2$. Folglich ist $\overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT}$. Nun ist $\overline{FH}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$: (N° 1). Folglich verhält sich $\overline{FH}^2 : \overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM} : \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT} = \frac{FM}{fM} : \frac{FT}{fT}$; Folglich ist $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} = \frac{\frac{FM}{fM}}{\frac{FT}{fT}} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$. Allein $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} > \frac{FM}{FT}$ denn $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} : \frac{FM}{FT} = \frac{fT}{fM} : 1 = fT : fM$. Nun ist $fT > fM$. Folglich ist $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} > \frac{FM}{FT}$ und folglich, weil $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$, so ist auch $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} > \frac{FM}{FT}$. Wenn man folglich die Quadratwurzeln ausziehet, so ist $\frac{FH}{FR} > \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$. W. z. E. W.

§. 99

§. 99.

Vierter Zusatz. Wenn man in der Hyperbel den undeterminirten 2ten Diameter NS (Fig. 81) mit der Tangente Mr parallel ziehet, so durchschneidet er den Radius Vector FM, der von dem Brennpunkt F der entgegengesetzten Hyperbel an den Berührungspunkt M gezogen wird, dergestalt in dem Punkt O, daß der Theil OM dieses Radius Vector jederzeit der Helfte CB der ersten Axe gleich ist. Es ist also zu beweisen, daß $OM = CB$.

Beweis. Ziehet FT mit Mr parallel und verlängert fM, biß sie FT berührt. Nun ist

1) Wegen der Parallellinien FT, NS und Mr (Constr.) der Winkel $MTF = rMf = rMF$ (§. 93) $= MFT$, als seinem Wechselwinkel. Folglich ist $MTF = MFT$. Folglich ist $MT = MF$.

2) Es verhält sich $MT : MF = MS : OM$. Nun ist $MT = MF$ (N° 1); Folglich ist $MS = OM$ oder $2MS = 2OM$.

3) Es verhält sich $fS : ST = fC : CF$. Es ist aber $fC = CF$; Folglich ist $fS = ST$. Folglich ist $fS + MS = MF$. Es ist aber $fS + MS = fM + 2MS$. Folglich $MF = fM + 2MS$; Folglich $MF - fM = 2MS = 2OM$ (2); Nun ist $MF - fM = AB$ (§. 31) $= 2CB$ Folglich ist $2OM = 2CB$ oder $OM = CB$. W. z. E. W.

§. 100.

Anmerkung. Dieses sind die Haupteigenschaften, die die Hyperbel oder die entgegengesetzten Hyperbeln characterisiren, und die man hauptsächlich in der Anwendung dieser krummen Linie auf die Kunst und auf die Theorie der Gesetze der Bewegung gebraucht. Da ich inzwischen nichts von den Hyperbeln gesagt habe, die man den entgegengesetzten Hyperbeln beyzugesellen pfleget, so will ich auch von diesen einiges anführen. Ich löse nachsolgende Aufgaben vorher auf. Es haben diese Hyperbeln die nämlichen Eigenschaften, als ihre

schafterinnen. Ja, sie sind nicht einmal zur Entdeckung der Eigenschaften der Hyperbeln nöthig. Dieses ist auch der Grund, warum ich biß hieher noch nicht davon gehandelt habe. Ich wolte nämlich die Kette von Sätzen nicht unterbrechen.

§. 101.

Aufgabe. Zwo entgegengesetzte Hyperbeln so zu construiren, daß die Entfernung der Brennpunkte F und f mit der Zwerchaxe AB in einem gegebenen Verhältniß stehe. z. E. wie 3 : 2. (Fig. 82).

Auflösung. Diese Aufgabe kann auf verschiedene Art aufgelöset werden. Dieses ist die simpelste und meiner Meynung nach die sicherste und in der Ausübung die geschwindeste.

1) Muß man die Distanz Ff der Brennpunkte seiner Absicht gemäß bestimmen. Diese theile man in 3 gleiche Theile. Darauf trage man die Helfte von einem dieser Theile aus f in A und aus F in B, so wird diese Distanz Ff nach Verlangen getheilet seyn. Denn $Ff = 3$, und BF und $Af = \frac{1}{2}$ (Constr.), so wird $AB = 2$ seyn; Folglich verhält sich $Ff : AB = 3 : 2$.

3) Man trage AB auf eine unbestimmte Linie A6. Man setze einen von den Schenkeln des Cirkels in dem Punkt f und öfne ihn etwas weiter, als fB. Mit dieser Oefnung des Cirkels beschreibe man die Bögen in 1 und 1, so wohl aus dem Punkt F für die Hyperbel 5B5, als auch aus dem Punkt F für die entgegengesetzte Hyperbel 5A5. Darauf trage man diese nämliche Oefnung des Cirkels von A in 1 auf die Linie A6. Man nehme auf dieser Linie die Weite B1. Mit dieser Linie beschreibe man aus den Punkten F und f Bögen, welche die ersten in 1 und 1 durchschneiden, u. s. w. So werden die Punkte 1 und 1 in den verlangten Hyperbeln seyn.

Um mehrere Punkte dieser Hyperbeln z. E. 2 und 2 zu bekommen, nehme man auf der unbestimmten Linie A6 eine Distanz

Distanz A2. Mit dieser ziehe man aus den Punkten F und f auf beyden Seiten von fF Bögen in 2. und 2. Darnach nehme man auf der nämlichen Linie A6 die Linie B2 und ziehe aus den Punkten F und f andere Bögen, welche die mit dem Radius A2 gezogenen in 2 und 2 durchschneiden werden, so werden diese neuen Punkte 2 und 2 auch in den Hyperbeln 5A5 und 5B5 seyn.

Auf diese Art werden diese also construirte krumme Linien, in welchen der Unterschied der Linien Lf und LF (die durch einen Punkt 1. 2. — — des Umkreises dieser krummen Linien an den Punkten F und f gezogen sind) beständig der Linie AB gleich ist, nothwendig Hyperbeln seyn, deren Brennpunkte F und f sind, deren erster Diameter oder Zwerchaxe AB und worin $Ff : AB = 3 : 2$.

Beweis. Dieses letztere ist schon N° 1 dieses §. bewiesen worden. Es ist also nur noch dieses zu beweisen, daß die also construirten Linien 5B5 und 5A5 würklich Hyperbeln sind. Man richte HK auf der Mitte C der Linie AB perpendiculair auf und beschreibe aus dem Scheitelpunkt B mit CF oder Cf Bögen, welche die Linie HK in G und D schneiden, damit GD die 2te Axe dieser krummen Linien sey (§. 29), wenn sie anders Hyperbeln sind.

Es sey itzt $CF = Cf = BG = BD = c$; $AC = CB = a$; $CD = CG = b$. So ist wegen der rechtwinklichten Triangel BCD, $bb = cc - aa$. Es sey auch $LM = y$, $CM = x$, so ist $fM = x + c$ und $FM = x - c$; $AM = a + x$; $BM = a - x$. Folglich $AM \times BM = aa - xx$. Nennen wir ferner $2f$ die Summe der Linien fL und LF, und ihren Unterschied (Constr.) $= AB = 2a$, so ist die größte Linie $fL = f + a$ und die kleinste $LF = f - a$. Nach

 dieser

dieser Voraussetzung ist in dem rechtwinklichten Triangel fML, $\overline{fL}^2 = \overline{fM}^2 + \overline{LM}^2$ oder $ff + 2af + aa = xx + 2cx + cc + yy$ (T). Eben so ist in dem rechtwinklichten Triangel FML, $\overline{LF}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{LM}^2$ oder $ff - 2af + aa = xx - 2cx + cc + yy$ (S). Wenn man folglich die Gleichung S von der Gleichung T abziehet, so ist $4af = 4cx$ oder $f = \frac{cx}{a}$. Wenn man folglich diesen Werth von f in der Gleichung T substituirt, so ist $\frac{c^2x^2}{aa} + 2cx + aa = xx + 2cx + cc + yy$. Wenn man folglich von beyden Seiten $2cx$ abziehet und durch aa multiplicirt, so ist $c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$. Wenn man folglich die Glieder versetzt, so ist $c^2x^2 - a^2x^2 = a^2c^2 + a^2y^2 - a^4$ (M) oder $(cc - aa)\ x^2 = (cc - aa \times aa) + a^2y^2$ (M). Es ist aber, wie wir wissen, $cc - aa = bb$. Wenn man folglich in den beyden Helften der Gleichung M, bb in der Stelle von $cc - aa$ setzet, so ist $bbxx = aabb + a^2y^2$. Folglich ist $bbxx - aabb = a^2y^2$, das heißt, $(xx - aa)\ bb = aa \times yy$. Folglich verhält sich $yy : xx - aa = bb : aa = 4bb : 4aa$ oder $\overline{LM}^2 : BM \times AM = \overline{GD}^2 : \overline{AB}^2$. Dieses zeiget an, daß das Quadrat der Ordinate LM an der krummen Linie 5B5 sich zu dem Rechteck aus der Abscisse BM und der aufgefangenen Axe AM verhalte, wie das Quadrat der 2ten Axe GD zum Quadrat der Zwerchaxe AB. Dieses ist aber vollkommen die Eigenschaft der Hyperbel, die im §. 15 vestgesetzet ist. Folglich sind die krumme Linien 5B5 und 5A5 die verlangten Hyperbeln.

§. 102.

Solte man mit den gegebenen Linien AB und GD als den Axen dieser krummen Linien, Hyperbeln construiren, so muß man diese Axen rechtwinklicht so zusammen setzen, daß sie einan-

einander in der Mitte durchschneiden. Darauf muß man die Hypothenuse BD aus *C* in die Punkte F und *f* tragen. Dadurch werden die Brennpunkte bestimmt werden (§. 93. 95). Nun darf man in der Construction dieser krummen Linien nur nach dem §. 101 verfahren.

§. 103.

Aufgabe. Zu einer gegebenen Hyperbel LBT, das Centrum, die Axen, ihre Parameter, ihre Brennpunkte und Asymptoten zu finden (Fig. 83).

Auflösung. Ziehet nach Belieben in der Hyperbel 2 Paar parallellaufende Sehnen, oder machet LS mit BM und BT mit *ur* parallel. Durch die Mitte 1 und 2 der Sehnen BM, und LS ziehet von einer willkührlichen Länge eine Linie 2. 1, so erhellet aus §. 70 daß diese also verlängerte Linie 21 nothwendig durch das Centrum dieser krummen Linie gehen müsse. Macht man die nämliche Operation mit den 2 Sehnen *ur* und BT, so wird auch die Linie *ao*, welche durch die Mitte dieser gegen *y* verlängerten Sehnen, auch nothwendig durch das Centrum der Hyperbel gehen. Folglich ist der Punkt *C*, wo sich diese beyden Linien 21 und *ao* durchschneiden, das Centrum der krummen Linie.

2) Setzet einen von den Cirkelfüssen in dem Centrum *C* und öfnet dieses Instrument so weit, daß ihr damit die krumme Linie in 2 Punkten *x* und *y* durchschneiden könnt. Ziehet den Bogen *xpy*. Wenn ihr nun von dem Punkt C durch die Mitte *p* dieses Bogens die Linie *CpQ* von beliebiger Länge ziehet, so ist dieses die gesuchte Axe. Denn, wenn man die Sehne *xy* ziehet, so stehet jene Linie augenscheinlich auf *CQ* perpendiculair, und wird durch die Sehne in 2 gleiche Theile getheilet. Es wird also die Sehne eine doppelte Ordinate von *CQ* seyn (§. 71. 70). Nur die Axe aber hat recht-

rechtwinklichte Ordinaten (§. 73). Folglich wird der Diameter *CQ* die Axe der krummen Linie seyn.

3) Ist die erste Axe gefunden, so bekommt ihr die 2te nach §. 28.

4) Sind die 2 Axen bekannt, so findet ihr den Diameter nach §. 33 und die Brennpunkte nach §. 93 und 95.

5) Die Asymptoten bekommt ihr endlich, wenn ihr die Linie *ht* die an der Spitze B der ersten Axe gezogen ist, der 2ten Axe GD gleich macht, daß B*h* = B*t* und wenn ihr von dem Centrum *C* durch die Endpunkte *h* und *t* die unbestimmte Linien *C*N und *C*K ziehet, so sind dieses die Asymptoten der vorgegebenen krummen Linie (§. 42. 47). Es reducirt sich also diese Aufgabe darauf, daß man das Centrum uud die erste Axe der Hyperbel finde, wodurch man alles übrige erhält.

* §. 104.

Aufgabe. Es seyn die entgegengesetzten *Hyperbeln* HB*x* und *h*A*y* (Fig. 84); AB und GD ihre Axen. Von den Tangenten LBQ und MAN eine jede so groß, als GD. Man ziehe LM und QN, so bekommt man die Figur LMNQ. Dieses ist ein von aussen um der Hyperbel beschriebenes Rechteck aus den Axen. Itzt ziehe man durch einen beliebigen Punkt H einer von den Hyperbeln einen ersten Diameter H*Ch*, und nachdem man durch die Punkte L und Q die Asymptoten *C*R und *C*K (§. 42. 47) gezogen hat, so ziehe man H*n* mit *C*K parallel. Man mache *n*P = H*n*, damit, wenn man P*C* verlängert biß *Cp* = P*C*, P*p* alsdenn der 2te oder conjugirte Diameter von dem ersten H*h* sey (§. 67). Nun ziehe man durch die Punkte *h* und H die Tangenten RHS und V*h*T, wovon eine jede so groß ist, als der 2te Diameter P*p* (§. 64). Ziehen wir nun die Linien RV und ST aus, so entstehet die Figur RSTV, die man das äussere Parallogramm aus den 2 conjugirten Diametern H*h* und P*p* nennet. Nun will man wissen, was das äussere Rechteck LMNQ aus den

Axen

Axen gegen das äussere Parallelogram RTSV aus 2 conjugirten Diametern Hh und Pp für ein Verhältniß habe?

Auflösung. Man ziehe BG. So ist der Triangel BCG der 8te Theil des Rechtecks aus den Axen; weil das Quadrat LBCG der 4te Theil davon ist. Und da BG in O in 2 gleiche Theile durch die Asymptote CR getheilet wird (Bew. §. 54), so ist der Triangel BOC die Helfte von BCG; Folglich ist BOC der 16te Theil des Rechtecks aus den Axen. Denn wir haben bemerket, daß BCG der achte Theil davon ist.

Weil auch der Triangel RST die Helfte des äussern Parallelogramms aus den conjugirten Diametern ist, so wird RCS der 4te Theil davon seyn; RCH der 8te, weil $RH = HS$ (§. 62) und folglich wird der Triangel CHn der 16te Theil davon seyn; weil $Rn = Cn$ (§. 61). Folglich ist zu zeigen, was der Triangel BOC für ein Verhältriß gegen den Triangel CHn habe?

Da aber BO und Hn mit der Asymptote CK parallel sind, (Constr.), so ist $Hn \times nC = BO \times OC$ (§. 56). Folglich verhält sich $nC : CO = BO : Hn$. Ziehet man nun die Perpendiculairlinien Hb und Bd auf CR, so sind die Triangel BOd und Hnb sich augenscheinlich ähnlich, und es verhält sich also $BO : Hn = Bd : Hb$. Folglich auch $nC : OC = Bd : Hb$. Folglich ist $nC = Hb = OC \times Bd$ oder $\frac{nC \times Hb}{2} = \frac{OC \times Bd}{2}$, das heißt, der Triangel CHn = dem Triangel BOC. Und da folglich ein jeder von diesen Triangeln der 16te Theil von ihrem Parallelogramm ist, so folgt, daß das äussere Rechteck aus den Axen der entgegengesetzten Hyperbeln beständig dem äussern Parallelogramm aus jeden conjugirten Diametern gleich sey. W. z. Th. u. z. E. W.

* §. 105.

Aufgabe. Die Fläche der Hyperbel HAP oder die Helfte derselben HAl zu finden (Fig. 83).

Auflösung. Da man im strengsten Verstande noch keine Methode besitzet, diese Aufgabe aufzulösen, so bedienet man sich der Näherung. Deswegen ziehe man an den Scheitelpunkt A die Tangente eS, die so groß ist, als die 2te Axe GD dieser Hyperbel, und ziehe nun die Asymptote Cb. Jtzt suche man den Innhalt des Trapez $Aebl$. Wenn man darauf die Linien bH, 22, 77. u. s. w mit der Tangente Ae parallel und sehr nahe an einander ziehet, so wird der Raum $AebH$ in verschiedene Theile bH22, 2277 u. s. w. die von den kleinen Trapezen nicht merklich unterschieden sind, getheilet. Jtzt rechne man ein jedes von diesen Trapezen insbesondere aus, so wird die Summe derselben fast gänzlich die Fläche des Raums $AebH$ geben. Diesen gefundenen Raum ziehe man von dem Trapez $Aebl$ ab, so wird augenscheinlich die Fläche der halben Hyperbel HAl übrig bleiben. Folglich — — —

§. 106.

Vorbereitungssatz zur Cubatur der Hyperbel.

(Fig. 85). Man beschreibe 2 concentrische Cirkel und ziehe den Diameter qV und an dem Punkt g, wo dieser Diameter den Umkreis des kleinen Cirkels durchschneidet, richte man die Perpendiculairlinie gS auf und verlängere sie biß an die Peripherie des grossen Cirkels, so behaupte ich, daß die Krone, oder der zwischen den 2 concentrischen Peripherien eingeschlossene Raum einem Cirkel gleich sey, der mit dem Halbmesser gS beschrieben wird. Es ist aber gS die mittlere Proportionallinie zwischen der Summe qg der Halbmesser der concentrischen Cirkel, und der Differenz Vg der Halbmesser.

Beweis. Es sey $Vm = R$; $gm = r$. So ist $qg = R + r$ und $Vg = R - r$. Es sey ferner A die Peripherie des grossen Cirkels, und a die Peripherie des kleinen. So ist die Fläche des grossen Cirkels $= \frac{AR}{2}$ und die Fläche des

kleinen

kleinen $= \frac{ar}{2}$. Nennet man ferner s die Peripherie von dem Radius gS und diesen Radius selbst y so ist $\frac{sy}{2}$ der Flächen Innhalt dieses Cirkels. Nach dieser Voraussetzung erhellet, daß die Krone so groß sey, als der grosse Cirkel weniger dem kleinen, oder, daß diese Krone $= \frac{AR}{2} - \frac{ar}{2}$. Es ist also zu beweisen: daß $\frac{AR}{2} - \frac{ar}{2} = \frac{sy}{2}$ oder daß $Ar - ar = sy$.

Man bemerke 1) daß nach der Natur des Cirkels $\overline{gS}^2 = qg \times Vg$ oder $yy = (R + r) \times (R - r)$ $RR - rr$.

2) Daß die Cirkelflächen sich unter einander verhalten wie die Quadrate ihrer Halbmesser. Folglich verhält sich $\frac{AR}{2} : \frac{ar}{2} = RR : rr$ oder $Ar : ar = RR : rr$. Folglich $AR - ar : ar = RR - rr : rr$. Es ist aber $RR - rr = yy$. Folglich verhält sich $AR - ar : ar = yy : rr$. Nun verhalten sich aber die Quadrate der Halbmesser r und y unter einander wie ihre Cirkelflächen oder $yy : rr = \frac{sy}{2} : \frac{ar}{2} = sy : ar$. Folglich $AR - ar : ar = sy : ar$. Da nun $ar = ar$, so ist auch $AR - ar = sy$. W. z. E. W.

*§. 107.

Aufgabe. Den körperlichen Innhalt eines hyperbolischen Afterkegels zu finden (Fig. 83).

Auflösung. Es sey HAP die beschreibende Hyperbel des Körpers; Cb und Cd die Asymptoten; eS die Tangente an dem Scheitelpunkt A dieser krummen Linie, welche Tangente jederzeit so groß ist als die 2te Axe GD (§. 42). Man bilde sich itzt ein, nachdem die Axe Al in eine sehr grosse Anzahl gleicher Theile getheilet worden, daß man durch die Theilungspunkte mit der Tangente AS Parallellinien gezogen habe,

be, um die äussern Parallelogramme von dem Trapez $AldS$ und der halben Hyperbel ACP zu bekommen. Eben so verfuhren wir bey Aufsuchung des Innhalts der Paraboloide und Ellypsoide. Stellen wir uns nun vor, daß diese Figur um ihre Axe Al sich drehe, so wird das Trapez $AldS$ einen abgekürzten Kegel und ein jedes von diesen äussern Parallelogrammen fm wird um diesen abgekürzten Kegel einen Cylinder beschreiben. Die halbe Hyperbel AlP wird einen Hyperbolischen Afterkegel und ein jedes ihrer äusseren Parallelogramme mn einen äusseren Cylinder von der Hyperboloide. Nun haben wir aber bewiesen (§. 68. 69 der Parabel und 68. 77 der Ellypse) daß die Summe der äussern Cylinder eines abgekürzten Kegels von dem körperlichen Innhalt dieses Kegels selbst nicht unterschieden sey, und daß die Summe der Cylinder, die um eine Hyperbel beschrieben sind, für die Hyperbel selbst genominen werden können. Können wir folglich den Unterschied zwischen der Summe der äussern Cylinder um den abgekürzten Kegel und zwischen den äussern Cylindern um der Hyperbel bestimmen, so haben wir augenscheinlich den Unterschied zwischen diesen 2 Körpern selbst. Und da man den abgekürzten Kegel ausrechnen kann, so haben wir dadurch ein Mittel, den körperlichen Innhalt des parabolischen Afterkegels zu finden.

Es sey folglich G der Cylinder, der durch die Umwälzung des Parallelogramms fm erzeugt ist. P der Cylinder, der durch die Herumdrehung des Parallelogramms mn entstanden ist. Der Cirkel von dem Radius $mV = S$; der Cirkel vom Halbmesser $mg = C$, und der Cirkel von $AS = T$, so ist der Cylinder $G = S \times Am$ und der Cylinder $P = C \times Am$; Folglich $G - P = (S - C)\ Am$ (K). Man bemerke itzt, daß die Halbmesser mV und mg die concentrischen Cirkel S und C beschreiben und daß also der Unterschied $S - C$ dieser Cirkel, oder die Krone die zwischen ihnen ist, einem Cirkel gleich sey, dessen Radius a die mittlere Proportionallinie zwischen der Summe gq und der Differenz Vg dieser Halbmesser ist (§. 106).

106). Es ist aber die Linie AS dieser Radius. Denn es ist (§. 42) $qg \times Vg = \overline{AS}^2$. Folglich verhält sich qg : AS : AS : Vg. Folglich ist der Cirkel von AS, oder T = S — C. Setzet man folglich in der Gleichung K den Cirkel T in der Stelle von S—C, so ist G — P = T × Am = dem Cylinder, der durch die Herumwälzung des Parallelogramms mS beschrieben ist. Das nämliche findet man in Ansehung eines jeden äussern Cylinders des abgekürzten Kegels, wenn man ihn gegen jeden um der Hyperboloide beschriebenen hält. Folglich ist der Unterschied zwischen der Summe der um dem abgekürzten Kegel beschriebenen Cylinder und der Summe der Cylinder T × Am die durch die Herumwälzung des Rechtecks lS erzeugt sind. Es ist aber diese lezte Summe dem ganzen Cylinder gleich, der durch die Herumwälzung des Rechtecks lS um seine Axe AC entstanden ist. Folglich ist der Unterschied zwischen dem abgekürzten Kegel und der Hyperboloide der durch das Rechteck lS erzeugte Cylinder. Man muß also, um den körperlichen Innhalt der Hyperboloide zu finden, zuerst den Innhalt des abgekürzten Kegels bestimmen, der durch Herumwälzung des Trapezs AldS entstanden ist, und davon den Cylinder abziehen, der durch die Herumwälzung des Rechtecks lS um seine Axe Al entstanden ist.

Conjugirte Hyperbeln.

*§. 108.

Wenn man in der Hyperbel PBT (Fig. 86) eine beliebige Anzahl von Punkten P, M und B — — annimmt und aus diesen Punkten mit der Asymptote CL die Linien Pop, Mem, Bfg — — parallel ziehet, und op = Po, em = Me, fg = Bf — — macht, und die nämliche

Operation mit dem andern Arm BT vornimmt und wenn man endlich mit den entgegengesetzten Hyperbeln xAd in Absicht der nämlichen Asymptoten eben so verfährt, und endlich durch die Punkte $p.\ m.\ g$ — — eine Linie zwischen dem Winkel oCl und eine ähnliche Linie innerhalb dessen Verticalwinkel LCr ziehet, so werden dadurch 2 entgegengesetzte Hyperbeln HGh und pgS entstehen, die mit den entgegengesetzten Hyperbeln PBT und xAd, deren Axen AG und Gg sind, conjugirt sind. Und diese beyden neuen Hyperbeln werden mit den erstern einerley Asymptoten und Axen haben, ausser, daß die erste Axe der erstern Hyperbeln bey den conjugirten die 2te Axe wird, und umgekehrt.

Beweis. 1) Vermöge der Construction ist $em = Me$; Folglich $em \times eC = Me \times eC = Bf \times fC = \overline{Bf}^2$ (§. 54), weil die krumme Linie PBT eine Hyperbel ist (Beding). Folglich ist $em \times eC = Bf \times fC$. Nun ist $Bf = fg$ (Constr.); Folglich ist $em \times eC = fg \times fC = \overline{fg}^2$.

Aus dem nämlichen Grunde ist $op \times oC = \overline{fg}^2$ — — In diesem Falle sind aber die Punkte $p.\ m.\ g$ .... in der Hyperbel (§. 55). Folglich ist die krumme Linie $pmgS$ und ihre entgegengesetzte Hgh, die nach der Bedingung auf eine gleiche Art in dem entgegengesetzten Winkel LCr beschrieben ist, eine Hyperbel.

2) Weil in der Hyperbel PBT, $Me > Po$ (§. 45) so ist auch in der Hyperbel $pmgS$, $em > op$. Folglich nähern sich diese Hyperbeln je länger je mehr der Linie Co. Folglich ist die Linie Co eine von den Asymptoten dieser Hyperbel und von der Hyperbel BPT (§. 47). Eben so beweiset man auch, daß Cl eine Asymptote der Hyperbel $pmgS$ sey.

3) Der Scheitelpunkt einer Hyperbel hat diese Eigenschaft (§. 54), daß eine Linie, die durch diesen Punkt mit einer der Asymptoten parallel gezogen und durch die andern bestimmt

bestimmt wird, dem Theil der andern Asymptote gleich ist, der zwischen der Spitze des Asymptotenwinkels und dem Berührungspunkt liegt. Es erhellet daraus, da die Linie *fg* diese Eigenschaft hat, daß der äusserste Punkt derselben *g* der Scheitelpunkt der Hyperbel *pmg*S sey. Folglich ist G*Cg* die erste Axe derselben.

4) Wenn man aus dem Punkt *g* auf diese erste Axe G*Cg* eine Perpendiculairlinie *bga*, die durch die Asymptote determinirt ist, aufrichtet, so erkennet man ohne Schwierigkeit, da in dem Triangel *yba* die Linie *ba* doppelt so groß, als BC ist, daß sie so groß, als BA sey. Ferner ist $bg = BC = CA = ga$. Folglich $bg = ga$. Folglich ist *ba* eine Tangente am Scheitelpunkt der Hyperbel, (§. 61. 63). Nun ist aber die Tangente am Scheitelpunkt der Hyperbel, wenn sie durch die Asymptoten determinirt wird, so groß, als die 2te Axe dieser krummen Linie (§. 42. 47). Weil also $ba = BA$ und die Linie BA durch die Spitze des Asymptotenwinkels gehet, wo sie in 2 gleiche Theile getheilet wird, und da sie perpendiculair auf der ersten Axe G*Cg* stehet, so folgt daraus, daß BA die 2te Axe von der Hyperbel *pmg*S und ihrer entgegengesetzten *H*G*h* sey. W. z. E. W.

§. 109.

Anmerkung. Die Hyperbeln *pmg*S und HG*h* heissen deswegen conjugirte Hyperbeln von PBT und *x*A*d*, weil diese Hyperbeln auf eine gleiche Art sich gegen einander verhalten, indem durch die Hyperbeln PBT und *x*A*d* die Hyperbeln *pm*GS und HG*h* und jene durch diese beschrieben werden können.

* §. 110.

Erster Zusatz. Man ziehe von einem beliebigen Punkt M der Hyperbel MBT einen ersten Diameter MCD, M*em* mit der Asymptote L*l* parallel, und von einem Punkt *m* einen ersten Diameter *m*C*h* an die conjugirte Hyperbel *pmg*S, so

 wird

wird dieser erste Diameter M*Ch* der 2te conjugirte Diameter M*Cd* der Hyperbel MBT seyn.

Denn um den conjugirten Diameter von dem Diameter M*Cd* zu bekommen (§. 54) muß man von dem Punkt M die Linie M*em* mit der Asymptote L*l* parallel ziehen; M*e*=*em* machen und M*Ch* so ziehen, daß *Ch*=*m*C. Dieses ist aber hier geschehen, weil M*e* = *em* mit L*l* parallel (Constr.) und *m*C=C*h* ist, weil *mh* einer der ersten Diameter der entgegengesetzten Hyperbeln *pmg*S und HG*h* ist.

* §. 111.

Zweyter Zusatz. Man siehet hieraus, daß die conjugirte Hyperbeln *pmg*S und HG*h* durch die Endpunkte aller 2ten Diameter der Hyperbeln PBT und *x*A*d* gehen, und umgekehrt rc.

* §. 112.

Anmerkung. Die Eigenschaft, die die conjugirte Hyperbeln *pmg*S und HG*h* haben, daß sie nämlich durch die Endpunkte aller 2ten Diameter der Hyperbeln PBT und *x*A*d* gehen, hat bey einigen Geometern die Vermuthung erreget, ja es giebt so gar einige, die es ausdrücklich behaupten, daß die 4 Hyperbeln der 86ten Figur nur 4 Viertheile der nämlichen krummen Linie sind, oder, daß diese 4 Hyperbeln nur eine einzige krumme Linie ausmachen. Sie haben sich in ihren Gedanken dadurch bestärket, weil sie glaubten voraussetzen zu dürfen, daß diese Hyperbel in einer sehr grossen Entfernung von ihrem Scheitelpunkt sich mit ihren Asymptoten vereinigen würden, ohngeachtet es nach aller Strenge bewiesen ist, daß diese Linien sich absolut niemals berühren können (§. 47).

Um sich zu überzeugen, daß verschiedene Punkte krummer Linien zu einer und derselbigen gehören, so muß man darauf sehen, ob ein jeder dieser Punkte auf einerley Art gegen einer-

einerley Linie gehalten, einerley Gleichung gäbe. Da nun die Punkte der conjugirten Hyperbeln, wenn sie als perpendiculair gegen die erste Axe eine Hyperbel betrachtet werden in dem nämlichen Punkt dieser Axe offenbar nicht diejenige Gleichung, die die Punkte der andern Hyperbel, womit sie conjugirt ist, geben; so muß man nothwendig schliessen, daß die conjugirte Hyperbeln nicht Theile oder Viertel von den Hyperbeln sind, womit sie conjugirt sind.

Würden also würklich die Asymptoten der entgegengesetzten Hyperbeln endlich Tangenten dieser krummen Linie (die Unmöglichkeit davon ist aber schon gezeiget) so würde man doch kein Recht haben, daraus zu schliessen, daß sie 4 Viertel der nämlichen krummen Linie wären.

Gebrauch der Hyperbel in der Dioptrick theils bey Verfertigung der Brenngläser, theils bey Verfertigung der Augengläser.

* §. 113.

Ich setze hier alle die Vorbereitungssätze der Dioptrick die im §. 110. 111. 112. 113 der Ellypse erklärt sind, voraus.

Es sey folglich in der Hyperbel PBZ (Fig. 87) der Punkt F ihr Brennpunkt; *f* der Brennpunkt der entgegengesetzten und ihre erste Axe AB. Diese stehe mit der Distanz der Brennpunkt F*f* in dem Verhältniß der Refraction aus Glas in Luft, das heißt, ungefehr in dem Verhältniß wie 2 : 3 (*a*). Nun behaupte ich, daß alle Lichtstrahlen TM, die mit der

(*a*) Um entgegengesetzte Hyperbeln von diesen Eigenschaften zu be-

der Axe AB parallel einfallen, und aus Luft in den Glaskörper gehen, der durch die Herumwälzung der Hyperbel PBZ, wovon PZ eine doppelte Ordinate ist, um ihre Axe entstanden ist, so werden alle Lichtstrahlen nach ihrem Herausgehen aus dem Glas bey M von ihrer Richtungslinie MS nach einer Linie Mf gewendet werden, die nach dem Brennpunkt f der ihr entgegengesetzten Hyperbel gerichtet ist.

Beweis. Richtet aus dem Punkt M auf der krummen Linie oder ihrer Tangente an diesem Punkt eine Perpendiculairlinie GL auf. Machet TM=Mf Beschreibet aus dem Punkt M ein Stück eines Cirkelbogens fRTQ und aus den Punkten T und f lasset die Perpendiculairlinien TL und fG auf GL fallen. Aus dieser Construction erhellet, daß GML die Axe der Refraction ist, daß TL der Sinus des Neigungswinkels TML ist, und daß fG der Sinus des Winkels GMf sey. Zeigt man also, daß TL : fG=2:3 (dieses ist das Verhältniß des Sinus des Neigungswinkels zu dem Sinus des gebrochenen Winkels, wenn ein Lichtstrahl aus Glas in Luft geht), so hat man bewiesen, daß fG der Sinus

---

bekommen, und worinn der Scheitelpunkt der einen in seiner gegebenen Weite, z. E. von 20 Schuh von dem Brennpunkt f der andern, entfernt ist, muß man diese Weite um $\frac{1}{5}$ folglich hier um 4 Schuh vergrössern. Gibt man alsdenn der Linie Ff24 und theilet sie in 6 gleiche Theile, deren jedes 4 Schuh hat, so muß man 1 von diesen Theilen aus F in B und aus f in A tragen, so bleiben $\frac{4}{6}$ für AB übrig und folglich verhält sich Ff : AB=$\frac{6}{6}$: $\frac{4}{6}$=6 : 4=3 : 2. Folglich verhält sich 1) AB : Ff=2 : 3. Wenn man nun diese Hyperbeln construirt (§. 101), so erhellet, da die Entfernung der Brennpunkte Ff 24 Schuh ist und BF 4 Schuh hat (Constr.), daß BF accurat 20 Schuh haben werde. Diese Regel ist allgemein. Denn wenn man die gegebene Länge um $\frac{1}{5}$ vermehrt, so hat sie $\frac{6}{5}$ oder 1+$\frac{1}{5}$. Wenn man folglich dieses $\frac{1}{5}$ der Linie FB giebt, so hat man ihr den 6ten Theil von $\frac{6}{5}$ gegeben. Folglich bleibt noch $\frac{5}{5}$ oder 1 oder die für Bf gegebene Weite übrig. W. z. E. W.

Sinus des gebrochenen Winkels sey, und daß also der Lichtstrahl beym Herausgehen aus Glas in dem Punkt M sich nach der Linie Mf wenden müssen, der durch den Brennpunkt f gehet.

Nun wird aber 1) der Strahl TM, da er mit der Axe AB parallel ist, und auf die Fläche PZ perpendiculair fällt, bey seinem Durchgehen aus Luft in Glas keine Refraction erleiden. Folglich wird er in M auf die hohle Seite des Glases und zwar unter einer solchen Richtung fallen, die mit AB parallel ist. Beym Herausgehen aber aus Glas in Luft, wird er seine Direction MS nach den Gesetzen der Strahlenbrechung verändern um sich von der Perpendiculairlinie GML zu entfernen.

2) Ich behaupte, daß, wenn der Strahl den Weg Mf nimmt, er genau so gebogen sey, wie er gebogen seyn solte, damit sich der Sinus TL des Inclinationswinkels TML zum Sinus fG des gebrochenen Winkels GMf verhalte $= 2 : 3$. Denn es verhält sich (§. 96) TL : fG $=$ AB : Ff. Nun ist aber (Constr.) AB : Ff $= 2 : 3$; Folglich TL : fG $= 2 : 3$. Da TL der Sinus des Neigungswinkels ist, so muß fG nothwendig der Sinus des gebrochenen Winkels seyn, und folglich muß der Winkel GMf dieser gebrochene Winkel selbst seyn. Indem nun der Lichtstrahl TM oder ein jeder anderer Lichtstrahl die Richtungslinie Mf nimmt, so wird er so gebrochen, wie er es nach den Gesetzen der Refraction seyn soll. Folglich suchen sich alle mit der Axe AB parallellaufende Strahlen nach ihrem Durchgange, durch ein solches Glas in dem Brennpunkt f zu vereinigen. Man erhält also hierdurch ein vortrefliches Brennglas.

§. 114.

Es werden hingegen alle Lichtstrahlen eines leuchtenden Körpers, der in dem Brennpunkt f in der Luft stehet, nach ihrem Durchgang durch den Glaskörper PBZ, mit der Axe

parallellaufend gemacht. Denn es wird der Lichtstrahl fM, indem er auf die erhabene Seite des Glases PBZ fällt die Linie MV verlassen und sich der perpendiculairen Linie GML solchergestalt nähern, daß nach den Gesetzen der Refraction, die ein Strahl, der aus der Luft in Glas fährt, beobachten muß, folgendes Verhältniß entstehe: $fG : TL = 3 : 2$ oder $TL : fG = 2 : 3$. Es verhält sich aber auch (Constr.) $AB : Ff = 2 : 3$. Folglich verhält sich $TL : fG = AB : Ff$. Unter diesen Umständen ist aber der gebrochene Lichtstrahl MT mit der Axe AB parallel (§. 97).

§. 115.

Erster Zusatz. Setzet man hingegen, daß dieser Lichtstrahl von der Seite f auf die erhabene Seite der Hyperbel PBZ (Fig. 88) mit der Axe parallel auffalle, so behaupte ich, daß, wenn man OT in einer Entfernung von 2 oder 3 Linien von dem Scheitelpunkt B gegen die Axe perpendiculair ziehet, und wenn man die Linien OP und TZ mit dieser nämlichen Axe parallel ziehet, und wenn man darauf die Figur OPBZT sich um die Axe Bf drehen läßt, so wird daraus ein Körper entstehen, welcher aus Glas gemacht seinen Eigenschaften nach alle parallel einfallende Lichtstrahlen nach ihrem Durchgange eine solche Richtung geben wird, als wenn sie aus dem Brennpunkt f der entgegengesetzten Hyperbel ansliefen.

Beweis. Man setze nach der 87sten Figur daß SM mit Bf parallel sey und in dem Punkt M aus Glas in Luft übergehe, so wird dieser Strahl nach dem Gesetze der Refraction in dem Punkt M seine Richtungslinie MT verändern und sich von der Perpendiculairlinie ML eben so entfernen, als wenn er von T gegen S liefe. Damals machte er aber den Winkel SMf. Wenn er folglich von S gegen T geht, so wird er bey seinem Uebergehen in die Luft in dem Punkt M einen Winkel TMV machen, der dem Winkel SMf gleich ist. Es ist

aber

aber TMf + SMf = 2 rechten Winkeln. Folglich ist TMf + TMV auch so groß als 2 rechte Winkel. Folglich ist MV in derselbigen Linie mit Mf, welche durch den Brennpunkt f gehet, (Geometr.). Folglich werden die Lichtstrahlen SM, die auf der erhabenen Seite dieses hyperbolischen Glases fallen, nachdem sie durch dasselbe mit ihrer Axe parallel durchgegangen sind, bey ihrem Herausfahren in dem Punkt M in die Luft so divergirend werden, als wenn sie aus dem Brennpunkt f kämen. Folglich werden (Fig. 88) die Lichtstrahlen SM, indem sie aus der Luft in Glas gehen und bey ihrem Durchgehen in L auf die ebene Fläche OT dieses Glases perpendiculair fallen, keine Brechung leiden. Folglich werden sie bis in M die nämliche parallele Lage behalten, daselbst aber auf die erhabene Seite der Hyperboloide mit der Axe dieses Körpers parallel fallen, und bey ihrem Uebergange in die Luft, so auseinander fahren, als wenn sie grade aus dem Brennpunkt f herkämen. W. z. E. W.

§. 116.

Zweyter Zusatz. Wenn folglich ein Auge K (Fig. 89) so beschaffen ist, daß es zwar den Punkt F vollkommen, nicht aber, wie es bey alten Leuten geschiehet, den nähern Punkt A erkennet, oder wenn es in einer gewissen Weite die Objecte besser als in der Nähe sehen kann, so darf man nur, damit es den Punkt A gehörig sehen könne, zwischen dem Auge und dem Punkt A ein Glas PBZL setzen, welches von 2 Hyperbeln erzeugt ist, wovon der Brennpunkt der gegen das Auge gerichteten und der Hyperbel PLZL entgegengesetzten Hyperbel CDE in dem Punkt F und wo der Brennpunkt der gegen das Object gerichteten Hyperbel in A ist (*a*).

Beweis. Die Lichtstrahlen Ax und Ay, die aus dem

(*a*) Es ist im §. 113 gezeigt worden, wie man solche Hyperbeln beschreiben könne.

Brennpunkt A kommen und auf die erhabene Seite der Hyperbel PBZ auffallen, werden bey ihrem Eingange ins Glas mit der Linie FK, in welcher der Bedingung nach die Axen der Hyperbeln liegen, parallel gemacht (§. 114). Folglich werden die gebrochenem Lichtstrahlen *xs* und *yt* auf die erhabene Seite der Hyperbel PLZ mit ihrer Axe parallel fallen. Sie werden also bey ihrem Uebergange aus diesem Glas in die Luft in den Punkten *s* und *t* so divergiren, als wenn sie alle aus dem Brennpunkt F von der entgegengesetzten Hyperbel CDE kämen (§. 115). Folglich wird das Auge eine solche Lage gegen diese Strahlen haben, daß es den Punkt A deutlich sehen kan. Denn der Punkt fällt so ins Auge, als wenn er in F oder in derjenigen Entfernung wäre, in welcher das Auge nach unserer Voraussetzung das Object aufs leichteste erkennen kann. W z. E. W.

§. 117.

Dritter Zusatz. Wenn hingegen ein Auge K den nähern Punkt A besser sehen kann, den entfernten Punkt F aber nicht so deutlich zu erkennen vermag, so muß die Hyperbel die der gegen das Auge gewendeten Hyperbel PLZ entgegengesetzt ist, den Punkt A zum Brennpunkt haben und der Punkt F muß der Brennpunkt derjenigen Hyperbel seyn, die der beschreibenden Hyperbel PBZ entgegen gesetzet und gegen das Object gerichtet ist (*a*). So wird das Glas PBZL die aus F kommende Strahlen so determiniren, daß sie dergestalt ins Auge K treffen, als kämen sie aus dem nähern Punkt A, wo unserer Annahme nach das Object liegen muß, wenn es durch das Auge sehr deutlich gesehen werden soll. Folglich würde das Auge vermittelst eines solchen Instruments das Vermögen bekommen

(*a*) Ob die Figur 89 eigentlich nur zum §. 116 gehört, so kann man sie doch leicht auf den §. 117 anwenden, wenn man annimmt, daß das Objectivglas PBZ das Ocularglas PLZ und das Aug-glas PLZ das Objectivglas PBZ werde.

men, ein Object in einer sehr weiten Entfernung zu erkennen, welches es ohne dieses Hülfsmittel nicht konnte.

Beweis. Schliesset eben so, wie im §. 116. Weil die Strahlen Fx und Fy, die von dem Brennpunkt F derjenigen Hyperbel kommen, die der erzeugenden FBZ entgegengesetzt ist, nach ihrem Auffallen auf die erhabene Seite dieser krummen Linie parallel werden (§. 114), so gehen sie also in das Glas nach einer Richtung xs und yt die mit dessen Axe parallel ist. Folglich werden sie auf die erhabene Seite der Hyperbel PLZ parallel fallen, und dadurch bey ihrem Uebergange aus Glas in die Luft so aus einander fahren, als wenn sie aus dem Brennpunkt A derjenigen Hyperbel kämen, die der erzeugenden entgegengesezt ist (§. 115). Folglich werden die Strahlen, die ins Auge fallen, als kämen sie aus dem Punkt A, dasselbe in der Lage finden, daß es den Punkt F deutlich erkennen kann. Denn es ist in diesem Betracht kein Unterschied zwischen dem Punkt A und F. Es bleibt nämlich einmal vorausgesetzt, daß das Licht durch die Entfernung nicht zu sehr geschwächt sey. W. z. E. W.

Wichtige Bemerkung in Ansehung der Anwendung dieser Theorie auf die Ausübung.

Dennoch hat die Gewohnheit die Augengläser sphaerisch zu schleifen in der Ausübung ohne Zweifel deswegen den Vorzug behalten, weil deren Verfertigung viel leichter ist. Es wäre daher sehr zu wünschen, daß, da die Künstler von Profeßion nicht so leicht Gelehrte werden können, die Gelehrten sich bemühen mögten Künstler zu werden. Es würde alsdenn die Vollkommenheit der Künste und des Genies, den theoretischen Entdeckungen, die gleichsam das Licht derselben sind,

sind, auf dem Fusse nachfolgen. Wie viel hat die Uhrmacherkunst dem vortreflichen Geometer dem Hygens zu danken. Aber waren seine Hände nicht eben so geschickt und fleissig, als sein Verstand sinnreich? Zur Zeit des Cartes, oder um das Jahr 1627. 28. lebte Mydorge sein Freund, der ein sehr guter Mathematicker war und der eine so feine und delicate Hand als feinen und scharfen Verstand besaß. Dieser zeichnete die mathematischen Figuren, die ihm zum Muster dienen solten, selbst, und ließ parabolische, hyperbolische, ovale und ellyptische Gläser mit gutem Erfolg verfertigen.

Dieses ermunterte den Cartes und in kurzer Zeit war er selbst ein grosser Meister im Glasschleiffen; und da er überzeugt war, daß der Fleiß des Mathematickers öfters durch Versehen des Künstlers, dessen Geschicklichkeit nicht allemal so groß, ist als der Verstand des Mannes, der ihm Arbeiten giebt, ohne Nutzen bleibt, so gab er sich insonderheit Mühe die Hand einiger der erfahrensten und zu dieser Arbeit geschicktesten Dreher zu bilden. Er war vorzüglich so glücklich einen solchen gewünschten Mann im Ferrier, der mathematische Instrumente zu Paris verfertigte, zu finden. Dieser Künstler war kein simpler Handwerker, der nur seine Hände bewegen konnte. Er besaß auch die Theorie seiner Profession und verstand die Optick und Mathematick so gut als ein Professor des Königl. Collegiums. Er war sogar in den übrigen Theilen der Mathematick nicht unerfahren. Eines von den vortreflichsten Stücken, welche Cartes durch ihn verfertigen ließ, war ein neuerfundenes Fernglaß, welches aus Hyperbolischen Gläsern bestand, dergleichen man nie gesehen hatte. Herr de Ville-Bressieux, welcher es gesehen hat und in der Werkstätte selbst gegenwärtig war, versichert, daß dadurch die Blätter der Bäume auf 3 Stunden weit deutlich erkannt worden wären.

Allein Cartes hielte bey dem ersten Anfange und bey der ersten Grundlage einer ganz neuen Kunst seine Gegenwart für

durch-

durchaus nothwendig, um die Hände des Künstlers im Schleifen zu regieren und ihm von Zeit zu Zeit, so wie er weiter in der Kunst kam oder etwa fehlte neuen Unterricht zu ertheilen. Deswegen konnte er den Bemühungen seiner Freunde, die sie ihm in den Jahren 1637. 38 bey dem Kardinal Richelieu in Ansehung seiner schönen dioptrischen Erfindungen widmeten, unmöglich seinen Beyfall schenken.

Man war so glücklich gewesen, dem Kardinal einen Geschmack an dem Vorschlage beyzubringen, Gläser nach den vom Cartes in seiner Dioptrick gegebenen Regeln verfertigen zu lassen. Diese Nachricht erfuhr der französische Philosoph, da er noch in Holland war. Er schrieb an seine Freunde in Paris um ihnen für ihre freundschaftliche Dienste zu danken. Doch zeigte er ihnen sogleich, wie weit die Ausführung dieses Projects noch entfernet sey. Er besorgte, man mögte in seiner Abwesenheit nicht glücklich darin seyn und es mögten hernach ihm die Fehler der Arbeiter beygemessen werden (*a*).

Die Sache gieng so, wie Cartes sie voraus gesehen hatte. Und man sahe gegen das Ende seines Lebens ihn nicht weiter mit dem Glasschleifen sich beschäftigen. Ja man scheint selbst bis auf unsre Zeiten keine ansehnliche Versuche gemacht zu haben, durch Grundsätze die Kunst zur Vollkommenheit zu bringen, ohngeachtet man von einer so streng bewiesenen Theorie *allen* glücklichen Fortgang erwarten konnte. Würklich finde ich in dem *Mercur de france* vom Monat September 1749, daß ein Engländer sehr glücklich die cartesianische Anweisung zur Verfertigung der Ferngläser in Ausübung gebracht habe. Es ist dieses ein Stück aus einem Briefe an Herrn Folkes Präsidenten der Königlichen Societät zu London. So heißt es daselbst: Herr Short, Mitglied der Königlichen Gesellschaft zu London setzte im Jahr 1747 in dem Garten des Pallasts von Malborough ein 12 Schuh langes reflectirendes Tele-

(*a*) Man sehe hierüber das Leben des Cartes vom Baillet.

Teleskop, dessen Spiegel von Metall war. Dieses übertraf durch seine Würkung alles, was man jemals in dieser Art gesehen hatte. Es verdient hauptsächlich alle Aufmerksamkeit, daß Herr **Short** dem grossen Spiegel eine parabolische Figur und dem kleinen eine ellyptische Gestalt gab, wenn er den grossen Spiegel nach der Methode des Gregory durchbohrte.

Die Verfertigung der Spiegel oder Gläser nach Kegelschnitten ist also nicht unmöglich, wie Herr **Deschales** und **Wolf** in ihrer Dioptrick glauben (*), und unsre größten Künst-

(*) Herr von Wolf sagt nicht, daß solche Arten von Gläser ganz impracticabel sind, sondern er hält ihre Verfertigung in dem §. 325 seiner lateinischen Elemente der Dioptrick nur für etwas sehr schweres. „*Cum difficillimum sit Lentes istiusmodi satis exactas parare &c.*" Dieses sind seine eigenen Worte. Wenn sie aber auch zu erhalten sind, so ziehet er mit Einstimmung des Newtons und des Deschals dennoch die sphaerisch geschliffenen Gläser jenen vor. Und er hat Grund darzu. Denn es ist zwar wahr, daß die ellyptischen und hyperbolischen Gläser die Strahlen, die mit ihrer Axe parallel laufen, genauer vereinigen als Gläser die sphaerische Segmente sind. Diese letzteren behalten aber insgemein den Vorzug, wenn die einfallenden Lichtstrahlen mit der Axe einen merklichen Winkel machen. Denn die Cirkelkrümme ist von allen Seiten gleichförmig gebogen, worinn die ellyptischen und hyperbolischen Krümmungen sehr verschieden sind. Doch ausser diesem allem macht die neuere Entdeckung der verschiedenen Brechbarkeit des Lichts, sie gänzlich unnütz. Diese verursacht eine Haupthinderniß in Ansehung der Deutlichkeit des Objects und die Abweichung, die dadurch entstehet, ist sehr viel grösser als diejenige, die von der sphaerischen Figur entspringt. Wenn man also auch den Gläsern eine noch so vortheilhafte Gestalt gäbe, so würde die Deutlichkeit dennoch nicht viel grösser seyn. Vergebens suchte demnach Cartes und viele andere Künstler durch Hülfe solcher Gläser die kleinsten Objecte in den Gestirnen zu entdecken. Die Vorsehung hat uns einen Vorhang vor unsre Augen gezogen, wodurch wir zwar wie durch einen Flor manches schöne und prächtige der Natur ablauren können, den wir aber niemals gänzlich vor unsern Augen

Künstler solten sich billig nach ihrem Muthe und Geschicklichkeit in dem Besitze der Ehre setzen, die Carres ehedem für Frankreich auf eine so richtige Art erworben hat.

Gebrauch der Hyperbel in der Catoptrick.

§. 118.

Es kann auch der durch die Herumwälzung einer Hyperbel um ihre Axe erzeugte Afterkegel erhaben und hohl zugleich seyn (Fig. 90). Man mag aber die hohle oder die erhabene Seite betrachten, so findet man, daß er die Lichtstrahlen, die von seiner Oberfläche abspringen, vereinigen kann.

Beweis. 1) Es werde demnach durch die Hyperbel RR eine convexo-concave Hyperboloide erzeuget, und man setze, daß der Lichtstrahl DR auf die erhabene Seite oder äussere hyperbolische Krümmung nach einer gegen den Brennpunkt F dieses Afterkegels gerichteten Neigung auffalle, so behaupte ich, daß alle diese Lichtstrahlen in dem Brennpunkte f der entgegengesetzten Hyperbel sich vereinigen werden. Denn wenn man an einem Punkt R die Tangente MRl ziehet und den Strahl DR nach RF verlängert, so ist nach dem im §. 93 gegebenen Beweise der Winkel fRL = lRF. Es ist aber lRF = DRM. Folglich wird sich der Lichtstrahl DR nach der Linie Rf, die nach dem andern Brennpunkt f gehet, reflectiren und folglich werden alle Lichtstrahlen DR, die auf die erhabene Seite dieser Hyperbel solchergestalt auffallen, daß sie nach dem Brennpunkt F gerichtet sind, sich in dem Brennpunkt

gen wegreissen werden. Ihr Colossen im Saturn und ihr kleinen Caclogallinier im freundschaftlichen Monde, seyd immerhin ruhig; wir werden eure Wohnungen nicht entdecken, und unser vorwitziges Auge wird eure Beschäftigungen nicht ausspühren; Es sey denn, daß man unter der Begleitung eines Kindermanns euch persönlich die Visite mache. B.

punkt f der entgegengesezten Hyperboloide vereinigen. Nimmt man diesen letztern Körper weg, so hat man einen Punkt f in der Luft, in welchem die Strahlen DR sich vereinigen können.

2) Man setze izt, daß die Strahlen PR, die gegen den Brennpunkt f gerichtet sind, auf die hohle oder innere Fläche der Hyperbel fallen, so werden die reflectirten Strahlen PR sich insgesammt in dem Brennpunkt F des Afterkegels RR vereinigen. Denn, wenn man wie vorhin die Tangente MRl, die Linie RF und das Verlängerungsstück Rf des Lichtstrahls PR ausziehet, so ist leicht zu erkennen, daß der Winkel PRM $= f$R$l = l$RF sey (§. 93); Folglich ist PRM $= l$RF. Folglich wird sich der Lichtstrahl PR nach dem Brennpunkt F reflectiren. Eben dieses gilt von allen übrigen. W. z. E. W.

Gebrauch der Hyperbel bey der Trisection des Winkels.

---

* §. 119.

Vorbereitungs-Aufgabe. Man soll aus 2 für die Asymptoten gegebenen Linien BA und BC und einem Punkt D diese krumme Linie construiren (Fig. 91).

Auflösung. Ziehet durch den Punkt D zwischen den Schenkeln des Winkels ABC, eine grosse Anzahl grader Linien ADM, FDN und GDC, u. s. w. Machet ML = AD; NO = FD; CR = GD u. s. w.; so sind die Punkte L. O. R. u. s. w. in einer Hyperbel, welche die Linien BA und BC zu Asymptoten hat.

Beweis. 1) Daß diese krumme Linie eine Hyperbel sey erhellet aus § 59.

2) Wenn man auf BA eine perpendiculaire Linie DH ziehet,

ziehet, so siehet man, daß AD > FD und FD > GD sey. Weil folglich (Constr.) ML = AD, und FD = NO und GD = CR ist, so ist ML > NO und NO > CR. u. s. w. So wie sich demnach die Punkte L, O und R von dem Scheitel-Punkt B entfernen, so nähern sie sich beständig der graden Linie BC, und zwar um so viel mehr, als die Winkel M,N,C u. s. w. immer kleiner werden. Es wird daher kein Punkt dieser krummen Linie mit der graden Linie BC zusammen fallen. Denn, welche Neigung auch die Linie DGC hat, so ist doch der Punkt R derselben allemal unterwärts der Linie BC (Constr.); folglich ist BC eine Asymptote von den Arme KLOR (§. 47); und wenn man an einem beliebigen Punkt L dieses Arms die nämliche Construction vornimt, wie bey D, so bekommt man den andern Arm KDS dieser krummen Linie, deren Asymptote BA ist. Es läßt sich dieses eben so, wie von BC beweisen. Folglich u. s. w. W. z. E. W.

* §. 120.

Aufgabe. Es sey jeßt (Fig. 92) der gegebene Winkel CO*b* in 3 gleiche Theil zu theilen.

Auflösung. Man beschreibe zuerst aus dem Punkt O mit dem Radius OC oder O*b* einen Cirkel, damit man den Bogen *b*AC, als das Maaß des gegebenen Winkels bekomme. Man ziehe die Sehne *b*C dieses Bogens, deren Länge bekannt ist, und den Radius ODA auf B*c* Perpendiculair. Diesen Radius verlängere man nach L und mache $OD = \frac{OD}{2}$. Man richte auf LA die Perpendiculairlinie $LM = \frac{DC}{2}$ oder $\frac{Db}{2}$ auf. Darauf ziehe man mit LA die Linie MV parallel. Diese theilet DC in G in 2 gleiche Theile. Denn es ist DG = LM und $LM = \frac{DC}{2}$ (Constr.) Man beschreibe durch den gegebenen Punkt O die Hyperbel OTZ, deren

 Asympto-

Asymptoten die grade Linien ML und MV sind (§. 119), so wird diese Hyperbel den Bogen bAC nothwendig in einem Punkt T durchschneiden; denn es ist diese krumme Linie (auch ins unendliche verlängert) beständig in dem Asymptoten Winkel LMV eingeschlossen (§. 47). Ziehet man jetzt aus der Spitze O des gegebenen Winkels den Radius OT, so ist der Winkel COT der dritte Theil des gegebenen Winkels COb.

Beweis. Machet $DI=DS$ und ziehet den Radius OIQ; so ist augenscheinlich $bOQ=COT$. Es ist also noch zu erweisen, daß der Winkel $TOQ=COT$. Nun ist aber

1) Die Sehne TQ mit bC parallel und folglich in dem Punkt N durch ODA, die auf bC Perpendiculair stehet, in 2 gleiche Theile getheilet;

2) Ziehet itzt durch den Durchschnitts Punkt T die Linie TK mit der Asymptote MV, und durch den Scheitelpunkt O den Diameter HB mit der andern Asymptote ML parallel, so ist $OL\times LM=TK\times KM$. (§. 56) $=TP+PK$ oder $(TP+OL)\times Pd$ (weil $PK=OL$ und $KM=Pd$) $=Od\times OL$ (§. 56) $=(OP+Pd)\times QL$; Folglich ist $(TP+OL)\times Pd$ $=(OP+Pd)\times OL$. Nun ist $(TP+OL)\times Pd=TP\times Pd$ $+OL+Pd$; und $(OP+Pd)+OL=OP\times OL+Pd\times OL$; Folglich ist $TP\times Pd=OP\times OL$; Folglich verhält sich $TP:OP:OL:Pd$. Es sind aber die Triangel TPO und ODS offenbar sich ähnlich; Folglich verhält sich $TP:OP=OD:DS$: Folglich $OL:Pd=OD:DS$. Es ist aber $OD=2OL$. (Constr.); Folglich ist $DS=2Pd$ oder $2rG$; Folglich ist Dr $=DS+Sr=2Pd+Sr$. Allein $Dr=TN$ und $TQ=2TN$. (Constr.); Folglich ist $TQ=2Dr$ und weil $Dr=2Pd+Sr$, so ist folglich $TQ=4Pd+2Sr$.

3) Itzt ist $DG=Dr+rG=Dr+Pd$. Es ist aber, wie wir eben gesehen haben, $Dr=2Pd+Sr$: Folglich ist $DG=$ $3Pd+Sr=CG$ (denn $DG=CG$ (Art. 1)). Folglich ist CG

$CG+rG+Sr$ oder nach der Construction $DG+Pd+Sr=4Pd\times 2Sr$; das heißt, $CS=4Pd+2Sr$. Es ist aber (Art. 2) $TQ=4Pd+2Sr$. Folglich ist $CS=TQ$.

4) Allein in den Triangeln OJS und OQT verhält sich $OJ : OQ=JS : TQ$ oder $OJ : OC=JC : CS$ (weil $OC=OQ$ und $CS=TQ$ (Art. 3)); Folglich ist der Winkel COJ oder COQ durch die Linie OST in 2 gleiche Theile getheilet (Geometrie); Folglich ist der Winkel $COT=TOQ$ und da der Winkel $COT=bOQ$ (Nr. 1), so sind also die 3 Winkel COT, TOQ und bOQ sich gleich und folglich ist der Winkel COB in 3 gleiche Theile getheilet worden. W. z. Th. und z. E. W.

* §. 121.

Gebrauch der Hyperbel bey der Verdoppelung des Würfels. (Fig. 93). Es sey AB die Seite des gegebenen Würfels und BC doppelt so groß, als AB. Nun muß man bekanntermassen, um die Seite des gesuchten Würfels zu bekommen, 2 mitlere Proportionallinien zwischen AB und BC suchen, so wird die erste dieser 2 Linien die Seite des verlangten Würfels seyn (a).

Auflösung. Man construire aus den 2 Linien AB und BC ein Rechteck und nehme die beyden nach Belieben verlängerten Seiten BA und BC für die Asymptoten der durch den Punkt D zu beschreibenden Hyperbel an. Man beschreibe diese krumme Linie (§. 119) und um das Rechteck BD einen Cirkel BSC. Nun wird dieser Cirkel nothwendig

1) Die Hyperbel in einem andern Punct S durchschneiden.

(a) Man erinnere sich an die Anmerkung zum §. 167. der Parabel.

2) Wenn man von diesem Punct auf BC die Perpendiculairlinie ST fallen läßt, so werden die beyden Linien BT und TS die 2 gesuchten mitlern Proportionallinien seyn.

Beweis des ersten Theils. Es muß, wie bekannt ist, der Scheitelpunct der Hyperbel in der Sehne BR seyn, welche den Asymptotenwinkel ABC in 2 gleiche Theile theilet. Er muß ferner der Endpunct der halben ersten Axe dieser krummen Linie seyn (§. 57). Es muß aber diese erste halbe Axe auch nothwendig kleiner, als diese Sehne, seyn.

Um sich davon zu überzeugen, sey diese halbe Axe $= A$; $AB = CD = b$; $BC = AD = 2b$. Nun ist (§. 57) $CD \times BC = 2bb$, die Potenz der Hyperbel und folglich $4bb$ das Zweyfache dieser Potenz. Folglich ist die erste halbe Axe $= \surd(4bb) = 2b$. (§. 57) und folglich $A^2 = 4bb$.

Man suche itzt den Werth von $\overline{BR}^2$. Da der Winkel ABO die Helfte eines rechten Winkels ist (Constr.), so ist der Winkel AOB auch die Hälfte; Folglich ist $AO = AB = b$; Folglich ist $OD = AD - AO = 2b - b = b$. und $OD^2 = bb$. Da nun der Winkel BRD ein rechter Winkel und der Winkel $ROD = AOB$ ist, so ist auch der Winkel RDO so groß, als die Helfte eines rechten Winkels; Folglich ist $RD^2 = OR^2$; Folglich ist $\overline{OD}^2 = 2\overline{RD}^2$ und $\overline{RD}^2 = \frac{\overline{OD}^2}{2} = \frac{bb}{2}$; allein $\overline{BR}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{RD}^2$ und $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 4bb + bb = 5bb$; Folglich ist $\overline{BR}^2 = 5bb - \frac{bb}{2} = \frac{9bb}{2}$.

Nun ist aber (Nr. 1) $A^2 = 4bb$. Um also zu beweisen, daß $A^2 < \overline{BR}^2$, so muß man zeigen, daß $4bb < \frac{9bb}{2}$

oder

oder daß $8bb < 9bb$. Dieses ist aber evident. Folglich ist $A^2 < \overline{BR}^2$ oder $A < BR$. Folglich ist die erste halbe Axe dieser Hyperbel kleiner als die Sehne BR, auf welcher sie genommen werden muß. Folglich ist der Scheitelpunkt dieser Hyperbel, welcher der Endpunkt dieser halben Axe ist, innerhalb dem Cirkel. Weil aber die Hyperbel, die durch D geget, in den Cirkel hinein gehet, so muß sie auch durch einen Punkt S wieder heraus gehen und folglich muß sie auch den Cirkel in 2 Puncten durchschneiden. W. D. 1te z. E. W.

Beweis des zweyten Theils. Es ist folglich nur noch dieses Verhältniß als richtig zu beweisen: $AB : BT = BT : TS = TS : BC$.

Man verbinde deswegen die beyden Punkte D und S durch die Sehne DS mit einander und verlängere sie auf beyden Seiten biß sie die Asymptoten in den Punkten H und L durchschneidet. Man ziehe die Perpendicularlinie SK und die Sehne BS, so ist, nach den im §. 58. bestimmten Eigenschaften der Hyperbel $DL = SH$: da sich folglich die Triangel DCL und *H*KS ähnlich sind, so ist $HK = DC = AB$ und $CL = KS = BT$. Folglich ist $TL = BC$. Hieraus erhellet, daß die Winkel BSL und BSH rechte Winkel sind und folglich ist wegen des rechtwinklichten Triangels HSB, $HK : KS = KS : KB$ oder TS, das heißt, $AB : BT = BT : TS$ und wegen des rechtwinklichten Triangels BSL verhält sich $BT : TS = TS : TL$ oder BC. Folglich verhält sich endlich $AB : BT = BT : TS = TS : BC$. W. z. E. W.

Zusatz. Wenn folglich die 2 Linien BF und TS die mitlern Proportionallinien zwischen AB und BC sind, so verhält sich $\overline{AB}^3 : \overline{BT}^3 = AB : BC$ (*a*). Nun ist BC das Zwey-

(*a*) Man sehe die Anmerkung zum §. 168 der Parabel B.

Zweyfache von AB (Beding.). Folglich ist der Würfel von BT das Zweyfache von dem Würfel AB W. z. E. W.

Abhandlung über die Brennspiegel des Archimeds und Proclus.

§. 122.

Ich habe es biß hieher aufgeschoben von diesen bey den Alten so berühmten Spiegeln zu reden, deren Würklichkeit von den neuern Gelehrten so sehr geläugnet wird. Die Leser dieses Werks sind ohne Zweifel hierinn die natürlichen Richter. Um aber berechtigt zu seyn über diese itzt zu bestimmende Meinung urtheilen zu dürfen, muß man wenigstens eine allgemeine Erkenntniß von allen vorigen Wahrheiten besitzen. Die Kegelschnitte waren zu den Zeiten des Archimeds und Proclus bekannt. Es ist auch bewiesen worden, daß diese so wohl durch die Brechung als durch die Zurückwerfung etwas entzünden können. Solten diese 2 berühmten Mathematiker sich derselben nicht bedienet haben. Wir haben 2 Wege hierüber ein Urtheil zu fällen: Die Historie und die Geometrie. Durch die Historie lernen wir, was geschehen seyn soll, und durch die Geometrie können wir diese Erzählungen schätzen.

Tzetzes sagt ausdrücklich (*a*), Archimedes habe mit einem 6 eckigten Spiegel und verschiedenen andern kleinen 4 eckigten Spiegeln, Feuer in einige Schiffe von der Flotte des römischen Generals Marcellus, der Syrakus in Sicilien

(*a*) Histor. 35. Chilias 2. Allein Plutarch, der mit einer gewissen Gefälligkeit die wunderbaren Erfindungen des Archimeds beschreibt, sagt in dem Leben des Marcellus kein Wort von diesen Spiegeln.

cilien belagerte, gebracht, ohngeachtet die Schiffe einen Bogenschuß oder auf 200 Schritt weit von den Mauren der Stadt entfernt waren. Diodorus sagt, es sey diese Entfernung 3 Stadien gewesen: Und Cluver versichert, daß die Entfernung 3000 Schritt groß sey. Allein da der Vater Kircher im Jahr 1636 durch Syrakus ging, so untersuchte er diese Sache mit der größten Sorgfalt und fand, daß die Schriftsteller diese Entfernung sehr vergrössert hätten.

Ohne auf diese Untersuchung zu gehen, redet die Sache schon für sich selbst. Es ist aus der Geschichte bekannt, daß die Schiffe des Marcellus sich sehr nahe an die Mauren der Stadt machten, die man in den alten Zeiten Acradine nennte (*a*), und daß die Wellen des Meers an den Fuß derselben schlugen. Denn Archimedes konnte durch eine Art von Krahn, der mit Ketten versehen war, die Schiffe der Römer in die Luft heben und sie auf einmal wieder ins Wasser stürzen. Folglich konnten die Schiffe des Marcellus nicht weit von dem Orte, wo Archimed seine Maschinen spielen ließ, entfernet seyn. Nach einer genauen Abmessung fand Kircher diese Entfernung nicht weiter, als 30 Schritt oder 150 Schuh, wenn man den geometrischen Schritt zu 5 Schuh rechnet. (*b*)

Ohngeachtet dieser Beobachtungen des Vater Kirchers sind doch noch immer Zweifel wegen der Art von Brennspiegeln übrig, deren sich Archimed bey dieser Gelegenheit habe bedienen können (*c*). Hätte er die Schiffe des Marcellus

 durch

(*a*) Dieses war eine von den 4 Städten aus welchen Syrakus bestand.

(*b*) Kircher p. 875. 876. Art. Magn. Luc. & Vmbr. fol. Rom. 1646.

(*c*) Wir wollen hier die Sache als wahr annehmen, ob man gleich dieselbe vernünftiger Weise laugnen könnte.

durch den Brennpunkt eines parabolischen Spiegels angezündet, so müßte der Parameter dieser Parabel 4 mal 150 Schuh oder 600 Schuh groß gewesen seyn, weil die Entfernung des Brennpunktes einer Parabel von dem Scheitelpunkt der krummen Linie jederzeit dem 4ten Theil des Parameters gleich ist. (§. 78. 81. Parabel). Ist es aber wohl möglich eine solche ungeheure krumme Linie oder Fläche durch die Kunst zu verfertigen? Es scheinet nicht, daß die Vertheidiger dieser Meinung sehr darauf gezählet haben. Deswegen hat ihre Einbildungskraft andere Verbindungen erfunden, die sich auf die Eigenschaften der Parabel gründen und durch welche man ihrer Meinung nach auf eine ungleich weitere Entfernung etwas in Brandt stecken könne.

Man erinnere sich nach Fig. 38 an den §. 160 der Parabel, in welchem man zeigte, daß man einen Brennpunkt in eine brennende Linie von unbestimter Länge verwandeln könne. Es scheint daher keine Entfernung zu groß, in welcher man nicht durch parabolische Spiegeln verbrennliche Sachen anzünden könne. Da wir aber auf diesen Einwurf in dem angeführten § geantwortet haben, so siehet man, daß diese Ausflucht unbedeutend sey.

Es scheinet folglich nicht, daß **Archimed** die Schiffe des **Marcellus** mit parabolischen Brennspiegeln habe verbrennen können und man begreift leichtlich, daß die **ellyptischen** und **heperbolischen** Spiegel noch weniger zur Hervorbringung dieses Effects geschickt sind.

§. 123.

Lasset uns izt untersuchen, ob dieses durch hohle sphärische Spiegel geschehen könne. Man setze daß der Bogen oder Abschnitt SAB von 120 Graden (Fig. 94) durch sein herumdrehen um seine Axe AM einen hohlen sphärischen Spiegel beschrie-

beschrieben habe und daß ein Lichtstrahl QS mit der Axe parallel auf den Endpunkt S dieses Abschnitts falle. Ziehet man nur den Radius CS und die Sehne SA und an den Punkt S die Tangente PG, so wird offenbar der Winkel $r = x$ seyn; denn die Winkel CSP und CSG sind rechte Winkel, und wenn man nun von dem Winkel CSP den Einfallswinkel QSP und von dem Winkel CSG den Reflexionswinkel ASG = QSP abziehet, so ist der beyderseitige Ueberrest $r = x$. Es ist aber $r = u$, als Wechselwinkel (Constr.) und u ist = 60 Graden (Constr.); Folglich ist $x = 60$ Grad, folglich ist auch der Winkel CAS = 60°. Folglich ist der Triangel CSA gleichseitig. Folglich wird der Lichtstrahl QS in eine Linie reflectirt, die die Axe in dem Scheitelpunkt A durchschneiden wird.

Es sey itzt ein anderer Lichtstrahl LD mit der Axe AM parallel, der aber näher an derselben liegt, als der Lichtstrahl QS, so ist, wenn man die Linie DC und die reflectirte Linie Df ziehet, der Einfallswinkel h = dem Reflexions Winkel y. Nun ist aber $h = f$CD als Wechselwinkel (Constr.); Folglich ist der Winkel fCD = y; Folglich ist Cf = Df; Folglich wird in dem Triangel CfD, da der Winkel fCD und y nicht 60° haben. (Constr.) Der Winkel CfD mehr als 60° haben; Folglich ist CD > Cf oder Df. Es ist aber CD = CA; Folglich ist CA > Cf oder die reflectirte Linie Df stößt mit der Axe in den Punkt f unterhalb dem Scheitelpunct A zusammen.

§. 124.

Zusatz. Daraus erkennet man schon, daß ein hohler sphärischer Brennspiegel, die Lichtstrahlen, die mit seiner Axe parallel einfallen, nicht in einen Punkt reflectire, und daß also eigentlich zu reden, diese Art von Spiegel keinen Brennpunkt haben. Dieses hindert aber nicht, daß sie nicht die

Kraft haben solten zu brennen. Denn die reflectirten Lichtstrahlen Df nehmen zusammen einen so kleinen Raum auf der Axe ein, daß sie daselbst ausserordentlich verdicht werden und sich mit einer so großen Stärke bewegen, wodurch sie verbrennlich Sachen entzünden können. Jedoch man muß die vollkommene Uebereinstimmung zwischen der Theorie und den Versuchen zeigen.

§. 125.

Wenn das Segment BAS kleiner ist, als von 120°, so werden die reflectirten Lichtstrahlen jederzeit mit der Axe unterhalb dem Scheitelpunkt A so sich vereinigen, daß keiner von ihnen biß zur Helfte O des Radius komme. Denn es ist immer $Cf + fD > CD$ oder CA oder $Cf + fA$. Es ist aber (§. 123) $fD = Cf$. Folglich ist $Cf > fA$. Folglich gehet der Punkt f nicht biß zur Mitte O des Radius CA.

§. 126.

Je mehr Lichthstralen inzwischen mit der Axe parallel einfallen, und je näher sie bey der Axe einfallen, um destomehr Durchschnitts Punkte zwischen den reflectirten Linien und der Axe sind in der Nähe des Punkts O. Denn ziehet man den Lichtstrahl HK mit der Axe AM parallel und ziehet ferner den reflectirten Lichtstrahl Ki und den Radius CK des Spiegels, so ist, wie vorhin, da der Reflexionswinkel CKi so groß, als der Einfallswinkel $CKH = iCK$ ist, es ist, sage ich, $iC = iK$. Man hat hier folglich 2 gleichschenklichte Triangel CfD und CiK, deren Grundlinien CD und CK sich gleich sind. Folglich hat der Triangel Cfd, dessen Winkel an der Grundlinie CD größer sind, als die Winkel an der Basis CK des Triangels CiK (Constr.), 2 Seiten Cf und fD, die größer sind, als die Seiten Ci und iK des Triangels CiK, und folglich ist $Cf > Ci$. Folglich durchschneidet der reflectirte Lichtstrahl Ki die Axe in einem Punkt, der näher bey O liegt als der reflectirte Strahl df.

§. 127.

Man nehme itzt ein Segment von 18° (Fig. 95) z. E. DAS, dessen Mittelpunkt C ist, und sehe, was für einen Theil der Axe alle Durchschnittspunkte aus den reflectirten Lichtstrahlen und der Axe, einnehmen können. Es sey folglich ein Lichtstrahl LD mit der Axe AC, welche das Segment DAS in dem Punkt A in 2 gleiche Theile theilet, parallel. Df sey der reflectirte Lichtstrahl und der Punkt O die Mitte von dem Radius CA.

Nun haben wir so eben gezeiget (§. 126), daß alle Lichtstrahlen, die mit der Axe AC parallel laufen, und die das Segment DAS in Punkten berühren, die zwischen den Endpunkten D und S dieses Segments liegen, so beschaffen sind, daß sie nach ihrer Reflexion die Axe in Punkten durchschneiden, die näher bey der Mitte O, als der Punkt f sich befinden, dennoch aber niemals die Helfte selbst erreichen. (§. 121) Folglich sind alle reflectirte Strahlen in der Axe innerhalb eines Raums befindlich, der sich von f biß gegen C erstreckt, und kleiner ist, als fO. Es ist also zu bestimmen, was für ein Theil fO von dem Radius CA ist?

Man lasse deswegen von dem Punkt f auf den Radius CD Perpendiculairlinie fx fallen. Da nun Cf=fD (§. 123), so fällt fx auf die Mitte von CD; Folglich ist Cx=xD. Nehmen wir itzt in dem rechtwinklichten Triangel Cfx, fC für den Sinus Totus an und beschreiben aus dem Punkt f durch C den Bogen CG, der das Maaß des Winkels Cfx oder CfG ist, so ist die Perpendiculairlinie Cx offenbar der Sinus des Winkels Cfx. Da aber der Winkel Cfx ein rechter Winkel ist, und der Winkel fCx 9 Grade hat (Constr.), so ist der Winkel Cfx ein Winkel von 81° Nimmt man folglich an, daß der Sinus Totus fC in 10000000 Theile getheilet ist, so enthält der Sinus Cx des Winkels Cfx

von

von 81° nach den Tabellen der Sinus und Tangenten 9876883 solcher Theile und folglich CD oder CA doppelt so viel, als Cx oder 19753766. Nun ist CO=Cx. Folglich ist fC —CO oder fO=fC—Cx=10000000—9876883= 1223117; und dieses zeiget an, daß fO 123117 solcher Theile habe, wovon 19753766 auf den Radius CA gehen.

Um also das Verhältniß von fO gegen CA zu bekommen, darf man nur 19753766 durch 123117 dividiren, so ist es etwas mehr als 160 oder der Raum fO ist ein wenig kleiner, als der 160te Theil des Radius CA. Nimmt man folglich diesen Radius 3 Schuh oder 36 Zoll oder 432 Linien groß an, so ist fO ein wenig kleiner als der 160te Theil von 432 Linien =$2\frac{7}{10}$ Linie.

Folglich werden alle Lichtstrahlen, die mit der Axe eines Segments von 18° parallel einfallen, nach ihrer Reflexion auf die Axe einen Raum einnehmen, welcher nicht mehr, als $2\frac{7}{10}$ Linien in der Breite hat. Folglich werden alle Lichtstrahlen daselbst ungemein verdichtet werden, und also daselbst brennbare Körper anzünden können. Dieses lehrt auch die Erfahrung.

§. 128.

Dennoch scheint es mir nicht möglich zu seyn, daß Archimed die Schiffe des Marcellus mit hohlen sphaerischen Spiegeln angezündet habe. Es müßten diese Spiegel wenigstens einen Radius von 300 Schuh gehabt haben. Denn gesetzt es sey ihre Entfernung von den römischen Schiffen 150 Schuh (§. 122); Solte nun der Brennpunkt dieser Spiegel sich biß dahin haben erstrecken können, so hätte der Radius dieser Spiegel wenigstens doppelt so groß als 150' seyn müssen, weil der Brennpunkt vom Scheitelpunkt nicht um die Helfte des Radius entfernt ist. (§. 125) Allein, wenn man auch nur etwas weniges von der Verfertigung solcher Spiegel

weiß,

weiß, so siehet man leicht, daß die Verfertigung eines Spiegels von 300' im Radius über die menschliche Geschicklichkeit sey.

§. 129.

Ich mögte aber dem ohngeachtet noch nicht läugnen, daß **Archimed** die Flotte des **Marcellus** mit Brennspiegeln habe entzünden können, wenn es anders wahr ist, daß **Proclus** ein ähnliches Kunststück 7 oder 800 Jahr nach dem Tode jenes vortreflichen Mathematikers verrichtet habe. Es erzählt aber diese Geschichte in sehr deutlichen und richtigen Ausdrücken **Zonaras**. (*a*) Er sagt, daß **Anastasius** bey der Belagerung, die er in **Constantinopel** von dem **Vitellius** erlitt, es vornemlich dem Genie des Proclus zu verdanken gehabt habe, daß **Vitellius** sich zurück gezogen habe. Es war dieser **Proclus** ein durch seine Kenntnisse in der Philosophie und Mechanik sehr berühmter Mann. Er verstand die Kunst, metallene Hohlspiegel so zu verfertigen und zu stellen, daß er dadurch die Flotte des Vitellius in Brand steckte und dessen Schiffe und Schifleute wie durch den Bliz verbrannte.

§. 130.

Anmerkung. Ich glaube nicht, daß ich von den erhabenen sphaerischen Spiegeln etwas sagen darf, weil diese, anstatt die Strahlen zu vereinigen, dieselben zerstreuen. Es ist also, nach dem, was wir von den Würkungen der Hohlspiegel ausgeführet haben, nur noch dieses zu untersuchen, ob sich Archimed oder Proclus der Planspiegel habe bedienen können, um solche wunderbare Würkungen hervorzubringen. Der Vater **Kircher**, ein Mann von Genie und einer sehr ausgebreiteten Gelehrsamkeit in den verborgensten Wissenschaften, hat zur Auflösung dieser Aufgabe Versuche angestellet; das, was er

---

(*a*) In dem 3ten Bande seiner Geschichte.

er über diese Materie saget, ist sehr gründlich; und damit man mich keiner Vergrösserung beschuldige, so führe ich seine eigenen Worte an und zeichne die Figuren vor den Augen. Ich nehme dieses aus dem 8ten und 10ten Buche seines grossen Werks, welches den Tittel hat, *ars magna lucis & vmbrae.* Seite 887. 888. Rom 1646. Seine Worte selbst sind diese:

Problema. IV.

Machinam ex speculis planis construere ad centum pedes & vltra vrentem, das heißt, eine Maschine, aus Planspiegeln zu verfertigen, womit man auf eine Entfernung von mehr als 100 Schuh brennen kann.

Nachdem er angemerket hat, daß, wenn man eine grosse Anzahl reflectirter Lichtstrahlen durch Planspiegel auf einen Ort fallen läßt, man daselbst einen sehr hohen Grad der Hitze hervorbringen könne, so fährt er also fort. *Ego certe hujus rei in quinque speculis experimentum sumpsi & prima quidem lux a luce directa diuersum calorem habebat; duplicata lux notabile caloris augmentum jam suscipiebat; triplicata calorem ignis praeferebat; quadruplicata calorem vtcumque adhuc tolerabilem praestabat; quintuplicata pene intolerabilem. Vnde certo & indubitate conclusi, multiplicatis speculis planis & ea ratione collocatis, vt omnia reflexam solis lucem in vnum spatium cogant, futurum, vt non tantum majorem vstionis effectum, quam quaelibet vstoria parabo lica, hyperbolica, ellyptica praestent, sed in multo majus spatium radiosam lucem reflectant; quemadmodum me in quinque speculis ad spatium centum & amplius pedum experientia docuit.* Das heißt, ich bezeuge, daß ich mit 5 Spiegeln den Versuch gemacht und bemerket habe, daß das reflectirte Licht von dem ersten Spiegel, welcher grade gegen das Sonnenlicht gehalten ward,

eine

eine von der simplen Sonnenhitze unterschiedene Wärme hatte. Die Hitze vermehrte sich merklich, wenn ich das reflectirte Licht des 2ten Spiegels damit verband. Nahm ich den dritten Spiegel darzu, so näherte sich die Wärme derjenigen, die man empfindet, wenn man sich an einem mäßigen Feuer erwärmet. Noch konnte man die Hitze ertragen, wenn man den 4ten Spiegel gebrauchte. Setzte man aber noch das reflectirte Licht von dem 5ten Spiegel hinzu, so war sie nicht mehr auszustehen.

Ich schliesse daraus mit Gewißheit, daß wenn man die Anzahl der Planspiegel vermehret, und sie so setzt, daß sie in einem und dem nämlichen Raum das auf sie fallende Sonnenlicht zurück werfen, so schliesse ich, sage ich, daß sie nicht nur einen grössern Effect, als alle parabolische, hyperbolische und elliptische Spiegel hervorbringen werden, sondern daß auch diese vereinigten und von den Spiegeln reflectirten Lichtstrahlen einen grössern Raum einnehmen werden: Ich bin davon durch 5 Spiegel überzeugt, mit welchen ich eine merkliche Hitze auf einer Entfernung von mehr als 100 Schuh hervorgebracht habe.

Si quis igitur mille. v.gr. specula disponeret, vt omnia in vnum punctum reflecterent - - - non est dubium, quia tanta superficierum lucidarum constipatio idem praestaret & multo efficacius, quam parabolica constipatio prope focum; vt vel hinc machinamentum PROCLI, *quo naves bysantinas combussisse* ZONARAS *refert, hujusmodi speculorum dispositione effectum omnino credam.* Wenn folglich jemand z. E. 1000 Spiegel so stellte, daß sie insgesammt die Sonnenstrahlen in einem einzigen Punkt versammleten, so ist nicht zu zweyfeln, daß eine so grosse Verdichtung von leuchtenden Flächen nicht eben den Effect und mit noch mehrere Lebhaftigkeit thun solte, als die Vereinigung der Lichtstrahlen im Brennpunkte oder nahe bey dem Brennpunkt

einer

einer Parabel. Deswegen glaube ich ohne alles Bedenken dem Zanaras in dem, was er vom Proclus erzählt, wenn er sagt, daß dieser Mathematiker Spiegel von Ertzt so künstlich gestellet habe, daß er dadurch die Flotte des Vitellius habe anzünden können. Man hat hierzu nur eine der vorigen ähnliche Stellung nöthig.

Sint enim specula plana A, B, C, D, E; Sol G. murus F (Fig. 96); *quae ita disponantur vt solis radii ex singulis speculis reflexi coëant in Puncto F: certum est, & experientia constat, uti lucem, ita calorem in F coactum, quintuplo majorem esse & intensiorem, quam lucem & calorem unico speculo illuc reflexum; ita vt in F manus vix, ob intensum calorem, firmari possit: si itaque quinque specula tantum possunt, quid non centum aut mille specula hoc ingenio disposita? Certum est calorem tam intensum fore, vt omnia adurere possit & in cineres redigere; Cum Focus hic major sit, & luce constipatior, quam in vllis aliis parabolicis speculis: Rogo hic obnixe catoptricos Mathematicos, vt hujus rei experimentum summa diligentia suscipiant & invenient id, quod supra quoque insinuavi, nullum aliud machinamentum catoptricum esse, quod & majorem in vrendo vim & in majorem distantiam obtineat.* Denn es mögen die Planspiegel A, B, C, D, E seyn. Es sey die Sonne G, die Mauer F. Und die Spiegel seyn so gestellet, daß die Sonnenstrahlen, die durch jeden Spiegel reflectirt werden, sich in F vereinigen, so wird man durch die Erfahrung finden, daß das Licht und die Wärme nach ihrer Vereinigung 5 mal grösser oder stärker sey, als diejenige, die durch einen einzigen Spiegel nach diesem nämlichen Orte geworfen wird. Der Grad der Hitze ist so sehr erhöhet, daß man kaum die Hände daselbst halten kann.

Weil

Weil folglich 5 Spiegel schon eine solche Kraft haben, was würde man nicht mit 100 oder 1000 derselben ausrichten, wenn sie in einer gehörigen Ordnung gestellet wären? Es würde gewiß dadurch eine so heftige Hitze hervorgebracht werden, daß alle verbrennliche Körper dadurch entzündet und in Asche verwandelt werden würden. Denn der Brennpunkt dieser Spiegel ist groß und die Lichtstrahlen dichter, als in jedem parabolischen Spiegel.

Ich ersuche daher die Mathematiker, die sich auf die Catoptrick legen, nachdrücklich, mit der größten und möglichsten Genauigkeit und Sorgfalt hierüber Versuche anzustellen. Sie werden alsdenn das finden, was ich schon vorhin angeführt habe, nämlich, daß keine andere catoptrische Maschine die Körper heftiger und in einer grössern Entfernung entzünden könne.

Vor einigen Jahren laß Hr. Büffon, Aufseher der königlichen Garten und Mitglied der Akademie der Wissenschaften öffentlich eine Abhandlung ab, worinnen diese Materie meiner Meinung nach sehr gelehrt abgehandelt war. Ich glaubte darinn eine Reihe so neuer Aussichten zu bemerken, daß ich nicht bey mir anstand, derselben alle die Ehre, die man der ersten Empfindung schuldig ist, beyzulegen. Allein da er seine Abhandlung von den Brennspiegeln noch nicht öffentlich bekannt gemacht hat, (*) und da ich mich nicht unterstehe,

 aus

(*) Diese Abhandlung findet man in den Schriften der Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1747. Er hat sich bey Verfertigung dieser Spiegel des berühmten Hr. Passements, der vor wenigen Monaten zu Paris verstorben ist, bedienet. Dieser Brennspiegel entzündet auf 200 Schuh weit Holz; Zinn wird durch denselben auf 150 Schuh weit und Bley auf 140 Schuh weit geschmolzen. In folgenden Schriften wird man von dieser Materie zu seinem Vergnügen und Nutzen einen weitern

aus meinem Gedächtniß etwas davon zu erzählen, so unterdrücke ich die Entwickelung, die ich mir vorgenommen hatte, davon zu geben. Dieses ist die Erfüllung der Vorhersagung des Vater **Kirchers**: Es sind nämlich nicht nur die Brennspiegel des Archimeds und Proclus möglich, sondern man kann heut zu Tage Effecte davon sehen, die wenigstens eben so stark sind, als alles, was man von diesen berühmten Mathematikern erzählet. Die Maschine des Hrn. v. Büffons, die aus platten Spiegeln zusammengesetzet ist, zündet in einer Entfernung von 200 Schuh. Dieses haben öffentliche Versuche gelehrt, die dieses berühmte Mitglied der Akademie im königlichen Garten angestellet hat.

Bemerkungen über die Gleichungen für die Kegelschnitte.

§. †.

Vor einigen Monaten kamen zu Straßburg drey geometrische Versuche heraus: Ihr Verfasser ist Hr. **Maesson** ein Mann von guter Geschicklichkeit und der mit Beyfall Unterweisungen in der Mathematick gibt. Man findet in diesem Werke verschiedene artige Gedanken und unter andern auch folgende **Beobachtungen über die Gleichungen für** die

---

weitern Unterricht finden: Nämlich in Bülfingers Dissertation *de speculo Archimedis;* in Hr. Geheimenraths von Segners Streitschriften von dem nämlichen Innhalt. In des Saverien Diction. Math. Artik. *Mirois;* in dem *Dictionair Encycloped: Artic. Ardent, Miroir per Reflex. &c.* In den Abhandl. der Akad. der Wissensch. zu Paris vom Jahr 1726. Im kleinen hat auch der berühmte Hr. Silberschlag diese Versuche gemacht. Siehe seine klosterbergisch. Versuche.

die Kegelschnitte. Ich habe geglaubt, daß sie sich nicht übel zu diesem Werke schicken würden, und da sie nicht viele Seiten einnehmen, so erlaube ich mir die Freiheit, sie aus dem französischen Originale einigen von den teutschen Lesern hier zu überliefern. Wegen des wenigen vom differential und integral Calcul, welches man am Ende dieser Bemerkungen finden wird, werden auch diejenigen, die diese Zeilen nicht verstehen können, mich nicht unfreundlich ansehen. Ich lasse itzund den Hrn. Verfasser selbst reden. B.

§. † 1.

Ich habe noch keine Abhandlung von Kegelschnitten gesehen, in welchen man dieses bewiesen hätte, daß die Gleichungen dieser 3 krummen Linien in einem arithmetischen zusammenhängenden Verhältnisse stehen. Ohne Zweifel sind die Geometer dadurch gehindert worden diese Eigenschaft zu entdecken, weil in der Gleichung für die Parabel nur eine beständige Linie in der Ellypse und Hyperbel aber **zwo** beständige Linien vorkommen. Dennoch ist es gewiß, daß, wenn man die zwo Axen der Ellypse so groß, als die zwo Axen der Hyperbel angenommen und ausserdem vorausgesetzt hätte, daß alle 3 krumme Linien, folglich auch die Parabel einerley Parameter hätten; es ist gewiß, daß man alsdenn auch dieses würde bemerkt haben, daß die Gleichungen dieser 3 krummen Linien in einer zusammenhangenden arithmetischen Proportion stünden.

Es ist wahr; dieses hätte leicht geschehen können. Allein man siehet nicht allemal, was man sehen könnte. Die wichtigsten Dinge sind öfters vor unsern Augen, ohne daß wir durch unser Nachdenken dahin dringen können. Deswegen geschehen die Entdeckungen ordentlicher Weise durch die verwickeltsten Wege, und die Erfinder überlassen andern die Sorge, sie einfacher zu machen. Findet dahero jemand, eine Entdeckung

leicht und folglich nicht von grossem Werthe, so können wir ihm antworten: Ey! warum haben Sie sie denn nicht selbst erfunden!

§. † 2.

Man nehme itzt die 3 Gleichungen: $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $yy = px$, und $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$. Die erste derselben ist die Gleichung für die Ellypse, die 2te für die Parabel und die dritte für die Hyperbel. (*) In diesen Gleichungen bedeutet sowohl für die Ellypse als die Hyperbel a die grosse und b die kleine Axe. Nun nehme man für den Parameter der Parabel eine dritte geometrische Proportionalgrösse zu den beyden Axen a und b, so ist $a : b = b : p = \frac{bb}{a}$. Diesen Werth von p setze man in der Gleichung der Parabel

Nach dieser Veränderung bekommen wir folgendes arithmetisches zusammenhängendes Verhältniß $\frac{bb}{aa}(ax - xx) - \frac{bbx}{a} = \frac{bbx}{a} - \frac{bb}{aa}(ax + xx)$. Daß aber diese Grössen in einem solchen Verhältnisse stehen, erhellet daher, weil die Summe der beyden mittelsten Glieder der Summe der beyden äussersten Glieder gleich ist.

§. † 3.

Nehmen wir itzt in diesen 3 krummen Linien gleiche Abcissen, und setzen voraus, daß die Ellypse und Hyperbel einerley Axen haben und daß der Parameter der Hyperbel so groß ist, als der

(*) Man sehe den §. 12 der Ellypse, den §. 20. der Parabel und §. 15 der Hyperbel, so wird man die Richtigkeit dieser Gleichungen erkennen. B.

der Parameter der ersten Axe der beyden andern krummen Linien, so stehen gewiß die Quadrate der correspondirenden Ordinaten der Ellypse, Parabel und Hyperbel in einer zusammenhängenden arithmetischen Proportion.

§. † 4.

Man erkennt aus den drey Gleichungen $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $yy = \frac{bbx}{a}$ und $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, daß wenn die Abscissen einander gleich sind, die Ordinate der Hyperbel grösser sey, als die Ordinate der Parabel, und daß diese grösser sey, als die Ordinate der Abscisse. Auch verhalten sich diese 3 Ordinaten zu einander wie die Quadratwurzeln aus den Gliedern der arithmetischen zusammenhängenden Proportion $\frac{bb}{aa}(ax - xx) - \frac{bbx}{a} = \frac{bbx}{a} - \frac{bb}{a}(ax - xx)$.

Setzet man $b = a$, so bekommen wir folgendes Verhältniß: $(ax - xx) - ax = ax - (ax + xx)$. Hier ist das erste Glied die Gleichung für den Cirkel, dessen Diameter a ist, das 2te und 3te Glied sind Gleichungen der Parabel und das 4te ist eine Gleichung für die gleichseitige Hyperbel, (*) deren beyde Axen der Linie a gleich sind. Hier siehet man deutlicher als vorhin, daß diese Grössen in einem zusammenhangendem arithmetischen Verhältnisse stehen.

§. † 5.

Von dieser letzten höchst einfachen arithmetischen zusammenhangenden Proportion könnte man eine analytische Abhandlung für die Kegelschnitte anfangen, in welcher alle ihre Ei-

(*) Nach §. 14 der Ellypse und §. 18 der Hyperbel. B.

Eigenschaften unmittelbar aus ihren Gleichungen gezogen wären. Und da diese Gleichungen aus einerley Grössen zusammengesetzet sind, so würde es auch leicht seyn die Formeln für ihre ähnlichen Eigenschaften, z. E. die Formeln für ihre Tangenten, Secanten, Normal und Subnormallinien mit einander zu vergleichen. Durch diese sehr leichten Vergleichungen würde man Eigenschaften entdecken können, die man bisher nicht vermuthet hätte.

Vielleicht hält man dieses für eine ungegründete Behauptung. Wir müssen daher durch ein frappantes Beyspiel zeigen, daß man aus den angeführten 3 Gleichungen eine unbekannte und wichtige Wahrheit herleiten könne.

§. † 6.

Man setze deswegen folgende Gleichungen: $yy = ax - xx$, $yy = ax$ und $yy = ax + xx$, wovon die erste für den Cirkel, die 2te für die Parabel und die 3te für die Hyperbel ist. Die Abscissen sollen in allen von einerley Grösse seyn. Da nun die letzten Helften dieser Gleichung eine arithmetische zusammenhangende Proportion ausmachen, so sind auch die ersten Helften dieser Gleichungen in dem nämlichen Verhältniß. **Folglich stehen die correspondirenden Ordinaten in einer zusammenhangenden arithmethischen Proportion, und die Ordinaten verhalten sich untereinander wie die Quadratwurzeln aus den Gliedern dieses Verhältnisses.**

§. † 7.

Diese simpeln und klaren Bemerkungen wären noch nicht von vieler Erheblichkeit. Man muß wichtigere anführen, die den ganzen Werth der angegebenen Vergleichungen zeigen können.

Man erkennt sehr leicht, daß wenn man in den 3 Grossen $ax-xx$, ax und $ax+xx$ für x nach und nach die Reihe der natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4. 5 . . . . setzet, man alsdenn die Reihe aller zusammenhangenden Proportionen haben würde, die die Quadräte der correspondirenden Ordinaten am Cirkel, an der Parabel und gleichseitigen Hyperbel mit einander machen.

Nun bilde man sich ein, daß eine jede von diesen 3 krummen Linien vollkommen sich um ihre Abscisse als um ihre Axe drehen, so werden sie offenbar drey Körper von einerley Höhe beschreiben, weil ihre Abscissen, als gleich angenommen sind, und ihre correspondirende Ordinaten werden correspondirende Cirkenflächen beschreiben.

Da sich aber die Cirkelflächen wie die Quadrate ihrem Halbmesser verhalten, so verhalten sich die correspondirenden Cirkel dieser 3 Körper unter einander wie die Quadrate der correspondirenden Ordinaten. Diese Quadrate sind aber in einer zusammenhängenden arithmetischen Proportion, folglich sind auch die correspondirenden Cirkel dieser 3 Körper in einem zusammenhängenden arithmetischen Verhältniß.

Da aber diese 3 Körper nach der Bedingung gleiche Höhen haben, so sind sie nothwendig aus einer gleichen Anzahl correspondirender cylindrischer Elemente von gleichen Höhen zusammengesetzt. Folglich verhalten sie sich zu einander wie ihre cirkelförmigen Grundflächen. Da nun diese Cirkelflächen in einer zusammenhängenden arithmetischen Proportion stehen, so stehen auch die cylindrischen Elemente dieser 3 Körper in einem solchen Verhältniß.

Es ist aber bekannt, oder man kann sich leicht davon überzeugen, daß, wenn man die correspondirende Glieder von einer beliebigen Anzahl von zusammenhangenden arithmetischen

Proportionen zusammen addirt, daß auch die Summen noch in einem solchen Verhältnisse stehen werden. Folglich machet in unserer arithmetischen zusammenhangenden Proportion $(ax - xx) - ax = ax - (ax + xx)$, die alle arithmetische zusammenhängende Verhältnisse aller Elemente vorstellet, die Summe der elementarischen Theile aller ersten Glieder, den körperlichen Innhalt der Kugel; die Summe aber aller mittleren Glieder gibt den Innhalt der Paraboloide, und die Summe aller dritten Glieder den Innhalt der Hyperboloide. Wir können also mit Recht schliessen, daß die Kugel, die Paraboloide und gleichseitige Hyperboloide in einem zusammenhängenden arithmetischen Verhältniß stehen. Dennoch ist dieses immer unter der Bedingung zu verstehen, wenn ihre Höhen sich gleich sind, und wenn in den Gleichungen aller 3 erzeugenden krummen Linien einerley beständige Linie ist.

§. † 8.

Man kann eben so beweisen, daß die Ellypsoide, Paraboloide und Hyperboloide in einem arithmethischen zusammenhangendem Verhältnisse stehen, wenn sie gleiche Höhen haben und die Gleichungen der krummen Linien, woraus sie entstanden sind, folgende Proportion ausmachen $\frac{bb}{aa}(ax - xx) - \frac{bbx}{a} - \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, oder welches einerley ist, wenn die Ellypse und Hyperbel einerley Axen haben und wenn der Parameter der Parabel dem Parameter von jener ihrer ersten Axe gleich ist.

§. † 9.

Wenn man dieses Verhältniß dieser Körper in Zahlen ausdrücken wolte, so müßte man die Summen der unendlichen Reihen bestimmen, die ein jedes Glied in folgender Proportion

portion $\frac{bb}{aa}(ax-xx)-\frac{bbx}{a}-\frac{bb}{aa}(ax+xx)$ man indem in jedem dieser Glieder für x nach und nach die Reihe der natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4. 5 .... setzte. Man könnte seinen Endzweck auch durch die Integral Rechnung erreichen, welche ein abgekürztes Mittel ist die Summen unendlicher Reihen zu finden. Wir wollen itzt durch diesen Weg die gesuchte Proportion bestimmen.

§. † 10.

Es sey die generale Formel für die sämtlichen Elemente eines jeden Körpers $\frac{pyydx}{2r}$ (*). Nimt man itzt für yy dessen besondern Werth aus der Gleichung der erzeugenden krummen Linie, so bekommt man folgende 3 Differentialgrössen $\frac{bbp}{2aar}(ax-xx)dx$, $\frac{bbpx}{2ar}dx$, und $\frac{bbp}{2aar}(ax+xx)dx$ oder, welches einerley ist, folgende $\frac{bbp}{2aar}(axdx-xxdx)$, $\frac{bbpxdx}{2ar}$, und $\frac{bbp}{2aar}(axdx+xxdx)$. Integrirt man diese, so bekommt man für den Innhalt der 3 Körper nachfolgende Grössen $\frac{bbp}{2aar}\left(\frac{axx}{2}-\frac{xxx}{3}\right)$, $\frac{bbpxx}{4ar}$ und $\frac{bbp}{2aar}\left(\frac{axx}{2}+\frac{xxx}{3}\right)$. Wollen wir nun den Innhalt dieser 3 Körper unter der Voraussetzung haben, daß eines jeden Höhe der ersten Axe a gleich ist, so muß man in den Integralen für x die Grösse a setzen. So wird daraus $\frac{bbp}{2aar}\times\frac{aaa}{6}$, $\frac{aabbp}{4ar}$ und $\frac{bbp}{5aar}\times\frac{5aaa}{6}$ oder vielmehr: $\frac{abbp}{12r}$, $\frac{abbp}{4r}$ und $\frac{5abbp}{12r}$. Bringen wir die Mitlere

(*) Man sehe die *Elem. Analys.* Hr. v. Wolfs II Th. §. 10[illegible] B.

von diesen 3 Grössen mit den 2 übrigen unter einerley Benennung, das heißt, multipliciren wie deren Zähler und Nenner durch 3, so bekommen wir $\frac{abbp}{12r}$, $\frac{3abbp}{12r}$ und $\frac{5abbp}{12r}$. Da diese Grössen nun einerley Nenner haben, so verhalten sie sich wie ihre Zähler, die in der arithmetischen zusammenhängenden Proportion 1. 3. 5. . . . . stehen. Und da diese Integrale den Innhalt der Ellypsoide, Paraboloide und Hyperboloide anzeigen, so stehet auch der Innhalt dieser Körper in einem solchen Verhältniß.

Von der Cissoide.

Nachricht. Die 4 folgenden krummen Linien wurden von den Alten zur Auflösung der berühmten Aufgaben der Verdoppelung des Würfels und der Dreytheilung des Würfels und der Quadratur des Cirkels erfunden. Wir werden sie hier auch nur in dieser Absicht betrachten. Ihr Nutzen in den Künsten ist nicht von Wichtigkeit.

§. 1.

Es sey in der 97ten Figur AOBA ein Cirkel; AB einer seiner Diameter; BK eine Tangente von ihm und von beliebiger Länge; *Ao*, *Ao* . . . . so viele Sehnen als man ohne Verwirrung in dem halben Cirkel AOB ziehen kann. Man verlängere diese Sehnen, biß sie mit BK zusammenstossen. Nimmt man nun auf eine dieser verlängerten Sehnen ATK die Sehne AO und trägt sie von K in H und macht das nämliche mit allen übrigen Linien, z. E. ALK, so entstehet dadurch

durch eine Reihe von Punkten AHHCHH, welche die krumme Linie ausmachen, die man Cissoide nennet (*a*)

§. 2.

Zusatz. Aus dieser Entstehung derselben folgt:

1) Daß der äusserste Punkt C im Quadranten AC in der Cissoide liege. Denn ziehet man den Diameter CD, so ist dieser offenbar mit BK parallel und man hat daher folgendes Verhältniß AR : RB=AC : KC. Nun ist aber RB =AR; Folglich KC=AC; Folglich ist der Punkt C in der Cissoide (§. 1).

2) Daß BK die Asymptote der krummen Linie ACH sey. Um dieses einzusehen wollen wir nach Belieben zwo Linien ALK und ACK unmittelbar neben einander annehmen, so ist AO=KH (Constr.) und AC=KC (Nr. 1). Es ist aber AO>AC; Folglich ist KH>KC. Hätten nun KC und KH eine gleiche Neigung, so würde, weil KC<KH ist, der Punkt C der Cissoide näher bey BK seyn als der Punkt H in der Linie KLH. Da nun KCA eine noch grössere Neigung hat, als KLA, so muß sich die Cissoide in dem Punkt C der Linie BK noch viel mehr nähern, als der Punkt H in der Linie KLA. In Ansehung ASK, welche unmittelbar nach ACK kommt, kann man eben so beweisen, daß der Punkt H der krummen Linie in ASK näher bey BK sey, als der Punkt C. Denn da AO=KH ist, (Constr.) und AC=KC, und weil nun AO<AC ist, so ist auch KH<KC. Folglich wird aus der vorigen Ursache, H näher bey BK seyn, als

(*a*) Diese krumme Linie, deren Alter über 1400 Jahr hinausgeht, ist von der Erfindung des Diocles. Sie wird deswegen gemeiniglich die Cissoide des Diocles genennet. Man lese *Voss. de script. Math.*

als der Punkt C ꝛc. So wie sich also die Cissoide von ihrem anfange A entfernet, so nähert sie sich beständig der Tangente BK. Nichts destoweniger können diese Linien niemals zusammenstossen; weil nämlich alle Linien AK immer mit dem Diameter AB einen Winkel machen müssen (Constr.), so kann keiner von den Punkten O mit A zusammen fallen. Folglich werden die Sehnen AO immer eine gewisse Länge behalten; Folglich auch KH. Folglich wird H niemals mit K zusammenstossen; Folglich ist BK die Asymtote der Cissoide.

3) Daß alle Linien KO immer den ihnen correspondirenden Linien AH gleich sind. z. E. Da KLH=ALO, so ist, wenn man von beyden Seiten OH wegnimmt, auch der Rest KO=AH.

4) Daß die Linien HO beständig durch CD in 2 gleiche Theile getheilet werden, oder daß z. E. HL=OL. Man erinnere sich deswegen, daß, da AR=RB, auch AL=KL× oder AH+HL=KO+OL sey. Es ist aber AH=KO (Nr. 3); Folglich ist KL=OL.

* §. 3.

Erster Hauptsatz. Man ziehe von einem beliebigen Punkt H der Cissoide die Linie HM mit BK parallel, und aus dem correspondirenden Punkt O durch das Centrum R des beschreibenden Cirkels den Radius OR und verlängere ihn so lange, biß er mit HM zusammenstößt, so behaupte ich, daß der Berührungspunkt M genau in der Peripherie des beschreibenden Cirkels liege.

Beweis. Da HM mit CD parallel ist (Constr.), so verhält sich OL : HL=OR : RM. Es ist aber OL=HL (§. 2); Folglich ist OR=RM; Folglich ist RM ein Radius. Folglich ist der Punkt M in der Peripherie des Cirkels. W. z. E. W.

* §. 4.

*§. 4.

Zweyter Hauptsatz. Die 4 Linien BF, FM, FA und FH stehen in einem zusammenhängendem Verhältniß oder BF : FM = FM : FA = FA : FH. Dieses findet man immer von welchem Punkt H der Cissoide man die Parallellinie HM ziehet.

Beweis. Man ziehe die Linien BM und AM und bemerke, daß der Winkel *o*RB = ARM; So ist auch der Bogen OB = AM; Folglich ist der Winkel OAB oder *H*AF = ABM; und da auch die Triangel AFH und BFM so wohl unter sich, als auch dem Triangel AFM ähnlich sind, so verhält sich BF : FM = FM : FA = FA : FH. W. z. E. W.

§. 5.

Gybrauch der Cissoide bey der Verdoppelung des Würfels. Wir haben schon mehr als einmal erinnert, daß diese Aufgabe aufgelöset seyn werde, wenn man zwischen 2 gegebenen Linien CR und RT 2 mitlere Proportionallinie finden könnte. Hierzu kann man sich aber der Cissoide bedienen (Fig. 97).

Auflösung. Mit der größten der beyden gegebenen Linien CR beschreibe man einen Cirkel. Man durchschneide dessen Diameter CD perpendiculair durch den Diameter AB. Durch die Helfte dieses Cirkels beschreibe man eine Cissoide (§. 1), deren Anfang in A sey. Man trage die kleinste der gegebenen Linien RT von dem Centrum R in T auf die Linie CR. Man ziehe aus dem Punkt B durch T eine Linie BT, biß sie die Cissoide in einem Punkt H durchschneidet. Man ziehe von dem Punkt A durch H die Sehne AO. Diese wird CR in einem Punkt L durchschneiden. Es

ist

ist alsdenn RL die erste von den 2 gesuchten mitlern Proportionallinien. Folglich ist die Aufgabe aufgelößt.

Beweis. Man ziehe HM mit CD parallel, so verhält sich 1) $BF : FM = FM : FA = FA : FH$ (§. 4) Folglich 2) $\overline{BF}^3 : \overline{FM}^3 = BF : FH$ (*) 2) $BF : FM = FA : FH$. Nun verhält sich aber nach der Construction $FA : FH = AR$ oder $CR : RL$; Folglich $BF : FM = CR : RL$; Folglich $\overline{BF}^3$: 3) $\overline{FM}^3 = \overline{CR}^3 : \overline{RL}^3$. Folglich $\overline{CR}^3 : \overline{RL}^3 = BF : FH$. Es verhält sich aber $BF : FH = RB$ oder $RC : RT$. (Constr.) Folglich $\overline{CR}^3 : \overline{RL}^3 = CR : RT$. (A) Hieraus folgt, daß RL die erste von den 2 gesuchten mitlern Proportionallinien ist. Denn wenn man die 2te y nennet, und dieses Verhältniß ansetzt: $CR : RL = RL : y = y : RT$. (Woraus man y bestimmen kann), so ist $\overline{CR}^3 : \overline{RL}^3 = CR : RT$; Folglich kann das Verhältniß A aus einem zusammenhängenden Verhältniß von 4 Glieder hergeleitet werden, worinn RL die erste mitlere Proportionallinie zwischen 2 gegebenen Linien CR und RT ist. W. z. E. W.

Von der Muschellinie.

§. 1.

Von einem beliebigen Punkt P (Fig. 98) ziehe man auf eine Linie von willkührlicher Länge KM die Perpendiculairlinie PT. Man verlängere dieselbe nach Gefallen. Man ziehe von dem nämlichen Punkt P eine beliebige Anzahl schiefer Linien auf beyden Seiten dieser Perpendiculairlinie PA, PB . . . . PF und PG . . . . so, daß die Theile derselben,

---

(*) Man sehe, meine Anmerkung zum §. 168 der Parabel.

ben, wie xC, uB, rA, welche jenseits KM sind, alle der Linie TS gleich seyen. Wenn man die Endpunkte D. C. B. A. S . . . . dieser Verlängerungen durch eine Linie verbindet, so bekommt man eine krumme Linie, die die Alten eine **Conchoide** nannten (*a*); Der erste Punkt P ist der Pol derselben; S der Scheitelpunkt, und die Linien TS rA und uB sind **die beschreibenden Halbmesser.**

* §. 2.

Es ist auch leicht zu begreifen, daß KM die Asymptote derselben sey. Denn da $rA = TS$ ist (Constr.) und TS einen kleinern Winkel mit KM macht, als rA, so ist A nothwendig näher bey KM als der Punkt S. Eben deswegen ist auch B näher dabey, als A, und so immer fort. So wie sich also die Muschellinie DSL auf beyden Seiten von ihrem Scheitelpunkt S entfernet, so nähert sie sich immer der Linie KM. Sie wird mit derselben aber niemals zusammenstossen, weil (Constr.) die beschreibenden Halbmesser immer die Verlängerungen der schiefen Linien jenseits KM sind.

* §. 3.

Es mag daher eine Linie eine Neigung gegen die Asymptote einer Conchoide haben, welche sie will, wenn sie anders eine grade Linie ist, die gegen den Pol derselben gerichtet ist, so wird sie entweder würklich von der Conchoide durchschnitten werden oder wenigstens die Lage darzu haben.

Denn,

(*a*) Im lateinischen Conchilis. Man hat sie wegen der Aehnlichkeit mit der Schale eines Fisches sie also benennet. Gemeiniglich heißt sie auch Muschellinie des Nicomeds von ihrem Erfinder. Proclus, der ungefehr 500 Jahr nach Christi Geburt lebte, erwähnt dieses Geometer. Diese krumme Linie ist also sehr alt. *Voss. de script. Math.*

Denn, wenn man diese schiefe Linie gegen die krumme Linie verlängert, so wird sie sich beständig von der Asymtote entfernen. Die Conchoide aber nähert sich derselben immer. Es wird folglich diese Linie über die Conchoide hinausgehen und folglich werden sich diese beyden Linien durchschneiden.

* §. 4.

Gebrauch der Conchoide bey der Verdoppelung des Würfels. Es kommt darauf an, vermittelst dieser krummen Linie zwischen 2 gegebenen Linien eine mitlere Proportionallinie zufinden. Ehe wir aber zur Construction selbst gehen, ist es nützlich von folgenden Wahrheiten vorher überzeugt zu seyn.

* Lehnsatz. Wenn eine Linie AR in B in 2 unfeiche Theile getheilet wird (Fig. 99), und einer von diesen Theilen in der Mitte in H getheilet wird, so behaupte ich, daß das Quadrat von RH so groß sey, als das Rechteck aus $(BR \times RB) +$ dem Quadrat von HB, oder, daß $\overline{RH}^2 = (AR \times RB) + \overline{HB}^2$.

Beweis. 1) Weil $AH = HB$ (Constr.), so ist $RH = AR - AH = AR - HB$. Folglich ist $RH^2 = \overline{AR}^2 - (2HB \times AR) + \overline{HB}^2 = AR - (2HB \times AR) + \overline{HB}^2 = (RB \times AR + \overline{HB}^2$ (Weil offenbar $AR - 2HB = AR - AB = RB$. Folglich ist $\overline{RH}^2 = (AR \times RB) \times \overline{HB}^2$.

2) Wenn AE in ungleiche Theile in D und der Theil derselben AD in 2 gleiche Theile in F getheilt wird, so kann man eben, wie vorhin beweisen, daß $\overline{EF}^2 = (AE \times DE) \times \overline{DF}^2$.

* §. 5.

Aufgabe. Vermittelst einer Conchoide zwischen 2 gegebenen Linien AB und BC 2 mitlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung. Nachdem man diese beyden Linien rechtwinklicht zusammengesetzt hat, so macht man daraus das Rechteck BD. Durch die Mitte F der Linie DA ziehe man die Linie CF, biß sie mit der verlängerten Linie AB in G zusammenstößt. In der Mitte von AB richte man die Perpendiculairlinie HP von willkührlicher Länge auf. Durch den Punkt B beschreibe man mit DF oder AF einen Bogen, welcher diese Perpendiculairlinie in P durchschneidet. Man ziehe die Linien BP, GP und BK mit GP parallel. Aus dem Punkt P lasse man auf die verlängerte Linie BK eine Perpendiculairlinie PT fallen. Man mache deren Verlängerung TS=DF oder AF oder BP. Aus dem Pol P beschreibe man mit dem erzeugenden Halbmesser TS einen Theil SRL der Conchoide. (§. 1), in welcher S der Scheitelpunkt und TK die Asymptote ist. Diese krumme Linie muß nothwendig die verlängerte Linie AB in einem Punkt R durchschneiden. (§. 3). Wenn man darauf die Linie RC ausziehet, biß sie die in E verlängerte Linie AD durchschneidet, so werden die beyden Linien RB und DE die gesuchten 2 mitlern Proportionallinien seyn, oder man wird folgendes Verhältniß haben. BC : RB=RB : DE=DE : AB.

Beweis. 1) $\overline{RH}^2 = (AR \times RB) + \overline{HB}^2$ (§. 4). Folglich ist $\overline{RH}^2 + \overline{HP}^2 = (AR \times RB) + \overline{HB}^2 \times \overline{HP}^2$ (G). Wenn man aber die Linie PR ziehet, so ist der rechtwinklichten Triangel PHR und PHB wegen $\overline{RH}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{PR}^2$ und $\overline{HB}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{PB}^2$. Es verändert sich also die Gleichung G in folgende $\overline{PR}^2 = (AR \times RB) + \overline{PB}^2$.

2) Allein wegen der ähnlichen Triangel EDC und CBR ist $ED : CB$ oder $DA = DC$ oder $AB : BR$; Folglich verhält sich $ED : \frac{DA}{2}$ oder $DF = 2AB : BR$. (M). Da nun $DF = AF$ (Constr.) und die Triangel DFC und AFG sich ähnlich sind, so erhellet, daß $AG = DC = AB$ und folglich $2AB = BG$. Folglich verwandelt sich daß Verhältniß M in folgendes $ED : DF = BG : BR = PM : MR$. (Weil BM mit GP parallel ist). Folglich verhält sich $ED : DF = PM : MR$. Folglich auch $ED + DF : DF = PM + MR : MR$ oder $EF : DF = PR : MR$. Allein vermöge der Natur der Conchoide ist $MR = TS$ (§. 1) und $TS = DF$ (Constr.). Folglich $MR = DF$ und also $PR = EF$ oder $PR^2 = EF^2$. Man hat aber gesehen (Nr. 1), daß $\overline{PR}^2 = (AR \times RB) + \overline{PB}^2$. Folglich ist $AR \times RB + \overline{PB}^2 = \overline{EF}^2 = (AE \times DE) + DF$, oder $\overline{PB}^2$. (§.2.Nr.4.) Ziehet man folglich von beyden Seiten $\overline{PB}^2$ ab, so ist $AR \times RB = AE \times DE$ oder es verhält sich $RB : DE = AE : AR = BC : RB$. (Weil AE mit BC parallel ist). Folglich verhält sich $BC : RB : DE$. Da aber die Triangel CBR und EDC sich ähnlich sind, so verhält sich auch $BC : RB = DE : DC$. Folglich verhält sich endlich $BC : RB = RB : DE = DE$ oder $DC : AB$. W. z. E. W. (*a*)

Von

(*a*) Man lieset im 4ten Buche auf dem 56ten Blatte der Collect. *Math.* des Pappus, daß dieser Schriftsteller die Conchoide auch zur Theilung eines Winkels in 3 gleiche Theile gebraucht habe. (*)

(*) Nach der Meinung des Newtons in seiner *arith. univers.* soll Archimed sich dieser krummen Linie zur Construction der körperlichen Aufgaben bedienet haben. Er ziehet sie wegen ihrer Simplicität, und wegen ihrer leichten Construction bey der Construction der Gleichungen vom 3ten und 4ten Grade selbst den Kegelschnitten vor. Der größte Nutzen, den man von der

Con-

Von der Quadratrix.

§. 1.

Es sey ABH ein rechter Winkel (Fig. 100) und AH der Quadrant, als sein Maaß. Dieser sey in einer sehr grossen Anzahl gleicher Theile getheilet, als AC, CL . . . Dieses kann geometrisch durchs halbiren geschehen. Aus den Theilungspunkten C, L. . . . . ziehe man die Halbmesser BC, BL . . . ; Darauf theile man den Radius AB in eben so viele gleiche Theile, als den Bogen AH. Durch die Punkte M, O . . . . ziehe man mit BH die Parallellinien Mx, OR . . . . so werden die gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Parallellinien und der correspondirenden Halbmesser, das heißt, der Durchschnitt x der ersten Parallellinie Mx und des ersten Halbmesser BC; der Durchschnitt der 2ten Parallellinie und des 2ten Radius u. s. w. eine krumme Linie AxRF machen, die die Quadratrix heißt, (*a*) weil

 sie

Conchoide erhalten kann ist die schöne Erfindung des Hrn. Blondels, da er durch einen Zug auf die leichteste und schönste Weise durch eine Conchoide die Säulen verjünget. Diese Entdeckung hielt Perrault für so hoch, daß er den Verlust der vom Vitruv versprochenen Figur, den der berühmte Villalpandus für unersetzlich hielte, nicht mehr beklagte. Hr. Blondel bedient sich darzu des vom Nicomed erfundenen Instruments, eine Conchoide zu ziehen.

(*a*) Und zwar insbesondere die Quadratrix des Dinostrates von ihrem Erfinder. (*) Diese krumme Linie ist wohl schwerlich unter 1500 Jahr alt. Pappus von Alexandrien, welcher vor 1400 Jahren lebte, redet davon in seinem Werke, als einer Linie, die zu seiner Zeit sehr bekannt war, und die man schon unter den alten setzen könnte. Pappus *Collect. Math.* und *Voss. de script. Math.*

(*) Einige Geometer eignen sie dem Nicomedes zu. Man sehe *Weidleri Institut. Math. p.* 719. Hr. von Tschirnhausen hat eine andere krumme Linie erfunden, die er gleichfalls eine Quadratrix nennet. *Medic. Ment. Part. II. p,* 124. B.

sie die besondere Eigenschaft hat, daß sie sogleich eine Rectifi-
cation der Peripherie, die der wahren sich sehr nähert, und
also die Quadratur des Cirkels, wie wir sogleich sehen werden,
gibt.

§. 2.

Dieses ist also die Eigenschaft dieser krummen Linie,
wenn man durch einen ihrer Punkte R einen Radius BL von
dem beschriebenden Cirkelbogen AH ziehet, und von dem näm-
lichen Punkt die Perpendiculairlinie RO auf der Axe AB auf-
richtet, daß beständig AH : LH=AB : OB. Denn es
erhellet vermöge der Construction, wenn der Bogen A*H*
8 Theile und der Bogen LHB derselben hat, daß der Radi-
us AB gleichfals 8 solcher Theile habe, wovon 6 die Linie
OB ausmachen.

Ziehet man ferner BK und die Perpendiculairlinie *SQ*,
so verhält sich aus vorigen Gründen A*H* : K*H*=AB :
QB.

Anmerkung. Diese Eigenschaft würde zur absoluten
Rectification der Peripherie führen, wenn man den Punkt
F, als den Endpunkt der Grundlinie BF der Quadratrix so
genau, als die andern Punkte derselben, bestimmen könnte.
Dieses werde ich beweisen, wenn man sich vorher von den 2
folgenden Lehnsätzen überzeugt hat.

§. 4.

Erster Lehnsatz. Wenn man aus der Spitze B ei-
nes Winkels AB*H* (Fig. 101) verschiedene concentrische Bö-
gen A*H*, GM, DP zwischen den Schenkeln desselben be-
schreibet und wenn man ihn durch die Halbmesser BL und BK
theilet, so behaupte ich 1) daß sich der Bogen A*H* zum
Bogen *H*L verhalte, wie der Bogen GM zum Bogen GR,

2)

2) daß sich der Bogen AH zum Bogen HK verhalte, wie der Bogen DP zum Bogen DV.

Beweis. Da die Bögen AH und GM sich gleich sind, so verhält sich AH : GM = BH : BG und wegen der Aehnlichkeit der Bögen HL und GR verhält sich BH : BG = HL : GR (*); Folglich verhält sich AH : GM = HL : GR oder AH : HL = GM : GR. W. d. 1ste W.

2) AH : DP = BH : BD = HK : DV. Folglich AH : DP = HK : DV oder AH : HK = DP : DV. W. d. 2te W.

§. 5.

Zweyter Lehrsatz. Die Tangente DS. (Fig. 102) eines Bogens DV, der das Maaß eines Winkels DBS ist, ist grösser als dieser Bogen selbst.

Beweis. Machet den Bogen VT = DV und ziehet ST so erhält, daß ST = DS. Es ist aber DST augenscheinlich grösser, als DVT. Folglich ist DS, als die Helfte von DST grösser, als der Bogen DV oder als die Helfte von DVT.

§. 6.

Gebrauch der Quadratrix zur äusserst nahen Rectification der Peripherie des Cirkels. Wenn man voraussetzt, daß man den Punkt F (Fig. 101) wo die Quadratrix mit BH zusammenstößt, wisse, so sage ich, daß der Bogen AH die dritte Proportionallinie zu den 2 Linien BF und

(*) Dieses Verhältniß erkennt man leicht als richtig aus der Aehnlichkeit der Triangel, wenn man damit diese leichte geometrische Wahrheit verbindet, daß sich die Bögen wie ihre Sehnen verhalten. B.

und BH sey, oder daß BF : BH=BH : AH oder AH: BH=BH : BF.

Beweis. Es gibt ganz gewiß zwischen den 2 Linien AH und BH eine dritte Proportionallinie. Nun kann aber diese 3te Proportionallinie weder grösser noch kleiner seyn, als BF, z. E. sie können weder so groß, als BG oder BD seyn. Folglich muß nothwendig BF die dritte Proportionallinie selbst seyn. Man beschreibe deswegen

1) Aus dem Punkt B den Bogen GRM. Durch den Punkt R, wo er die krumme Linie durchschneidet, ziehe man BL. Man lasse die Perpendiculairlinie RO auf AB und RC auf BH fallen. Nun verhält sich unmöglich AH : BH= BH : BG. Denn da BH : BG=AH : GM, so wäre AH : BH=AH : GM und folglich BH= dem Bogen GM. Es verhält sich aber (§ 41) AH : HL=GM : GR und vermöge der Natur der Quadratrix AH : HL= AB : OB (§.2) oder=BH : RC; Folglich verhält sich GM : GR=BH : RC. Weil folglich der Bogen GM der graden Linie BH gleich seyn würde, wie wir so eben gesehen haben, so würde der Bogen GR der graden Linie RC gleich seyn. Dieses ist absurd. Denn der Bogen GR ist grösser als seine Sehne und diese Sehne grösser als RC Folglich muß GR grösser, als RC seyn Folglich ist es nicht möglich, daß die 3te Proportionallinie zu den 2 Grössen AH und BH grösser, als BF sey.

2) Man wird aber auch zugleich sehen, daß man unmöglich behaupten könne, daß sie kleiner sey; Man beschreibe aus dem Punkt B den Bogen DP und ziehe die Linie DS auf BH perpendiculair. Man ziehe ferner durch den Punkt S, wo sie die Quadratrix durchschneidet, den Radius BK und SQ auf AB perpendiculair. Wenn man nun wie im Nr. 1. schliesset, so kann man beweisen, daß folgendes Verhältniß unmög,

unmöglich sey, nämlich daß $AH : BH = BH : BD$; denn sonst verhielte sich $AH : BH = AH : DP$, weil $BH : BD = AH : DP$. und folglich würde die grade Linie BH dem Bogen DP gleich seyn. Nun verhält sich aber $AH : HK = DP : DV$ (§. 4) und $AH : HK = AB : QB$ (§. 2) oder $= BH : DS$. Folglich ist $DP : DV = BH : DS$. Folglich da DP so groß ist als BH, so würde der Bogen DV seiner Tangente DS gleich seyn, welches unmöglich ist (§. 5). Folglich kann die dritte Proportionallinie zu 2 gegebenen Linien AH und BH nicht kleiner seyn, als BF (Nr. 1). Sie kann auch nicht grösser seyn, als eben diese Linie. Folglich ist sie ihr gleich, oder es verhält sich $AH : BH = BH : BF$, oder $BF : BH = BH : AH$.

Man kann aber zu 2 gegebenen graden Linien BF und BH geometrisch eine dritte Proportionallinie finden. Folglich könnte man auch die Länge des Bogens AH und folglich die Länge der Peripherie finden, die 4 mal so groß ist. Es würde also durch diesen Kunstgriff die Peripherie des Cirkels geometrisch rectificirt seyn. W. z. E. W.

§. 7.

Vermöge der Construction der Quadratrix kann man aber unmöglich nach der genauesten Strenge den Punkt F finden. (Fig. 100). Denn er müßte durch den Durchschnitt des Halbmessers BH und der correspondirenden Parallellinie aus dem Punkt B bestimmt werden. Hier fallen aber diese 2 Linien in einander und es findet folglich kein Durchschnitt statt. Da man inzwischen durch das halbiren so wohl EB als den Bogen VH in sehr kleine Theile theilen kann, wodurch man die Punkte der Quadratrix findet, die zwischen Y und F liegen und sich BH beständig nähern, so kann man geometrisch eine Linie bekommen, die von der Grundlinie BF nicht merklich verschieden ist.

§. 8.

Ich habe in meinen Institutionen verschiedentlich gezeiget, daß die Cirkelfläche einem Triangel gleich sey, dessen Basis so groß, als die Peripherie des Cirkels und dessen Höhe der Radius ist. Da folglich durch die Quadratrix die Peripherie beynahe rectificirt wird (§. 6. 7) so kann man itzt auch die Basis und die Höhe des Triangels, der dem Cirkel gleich ist, bekommen. Folglich erhält man bey nahe die Quadratur des Cirkels.

§. 9.

Anmerkung. Diese Methode, des Cirkels Innhalt sehr nahe zu finden, ist desto artiger, da sie darzu keine Construction der krummen Linie erfordert. Denn nehmen wir z. E. an, daß durchs halbiren B*r* der 128te Theil von BE und H*d* der 128te Theil von dem Bogen HV sey, so werden sich der Radius B*d* und die Parallellinie *r*Z in einem Punkt *Z* schneiden, der so nahe bey B*H* ist, daß man ohne einen merklichen Irrthum *r*Z für die Basis BF annehmen kann. Folglich kommt es bey der Rectification und der Quadratur des Cirkels darauf an, einen sehr kleinen Theil des Radius B*H* von B in *r* auf die Linie AB zutragen, *r*Z mit B*H* parallel zu ziehen, und einen sehr kleinen Theil *Hd* des Bogens *AH* durchs beständige halbiren zu nehmen (*a*) und den Radius B*d* zu ziehen. Denn der Durchschnittspunkt *Z* der Linie *r*Z und B*d* bestimmet eine Linie *r*Z, die nicht merklich von der Basis BF der Quadratrix unterschieden ist. Daraus kann man nach §. 6 und 8 ohne Construction dieser krummen Linie die Grösse der Peripherie oder den Innhalt der Cirkelfläche bey nahe herausbringen.

Man

(*a*) Man merke, daß das kleine Theilchen H*d* sich zu seinen Bogen AH verhalten müsse, wie das kleine Theilchen *r*B zu seinem Radius AB.

Man keunte aber dadurch noch nicht das Verhältniß der Peripherie gegen ihren Diameter in Zahlen, gesetzt auch, daß man durch diese Methode nach der größten Strenge die Quadratur bekäme, weil die rectificirte Peripherie und ihr Diameter in einem irrationalem Verhältniß gegen einander stehen könnten. Deßwegen scheint mir in diesem Betracht das Unternehmen des **Archimeds** oder seines Nachahmers des Metius sehr schätzbar, weil man in der Ausübung und für die Kunst den Diameter eines Cirkels sehr bequem und äusserst nahe aus seiner Peripherie und umgekehrt die Peripherie durch ihren Diameter in Zahlen finden kann.

§. 10.

Es gibt neuere Mathematiker (*a*), die dieser krummen Linie die Eigenschaften beygeleget haben, daß sie einen jeden Winkel in eine begehrte Anzahl gleicher Theile theile. Es sey z. E. nach ihrer Behauptung der Winkel ABV (Fig. 100) in 7 gleiche Theile zu theilen; so nimmt man auf dem Quadranten, der seine Quadratrix bey sich hat, einen Winkel, der so groß ist, als der gegebene. (Ist der gegebene zu groß, so theilet man ihn in 2 gleiche Theile). Von dem Punkt Y, in welchem einer seiner Schenkel die Quadratrix durchschneidet, ziehet man YE perpendiculair auf AB. Darauf theilet man AE in die gegebenen 7 Theile. Man ziehet durch die Theilungspunkte M, O . . . . die Parallellinien M*x*, OR . . . Diese werden die Quadratrix durchschneiden und auf dieser krummen Linie die Punkte *x*, R . . . . bestimmen. Ziehet man durch diese die Halbmesser BC, BL, so wird man nach diesen Auctoren den Winkel in die verlangten Theile getheilet finden. Denn es ist klar (Constr.), daß AM beständig der nämliche Theil von AE ist, welcher AC von dem Bogen AV ist. Nun ist aber (Constr.) AM der 7te Theil von dem Bogen AE. Folglich ist AC auch der 7te Theil E von AV. Diese Ausgabe scheinet also aufgelöset zu seyn.

(*a*) Die Herren Ozanam und Belidor.

§. 11.

Allein diese Schriftsteller haben dieses aus der Acht gelassen, daß die Punkte der Quadratrix nur durchs halbiren bestimmt werden, und daß, wenn der Schenkel BV des gegebenen Winkels nicht auf einen von diesen also bestimmten Punkten fällt, und daß, wenn man ferner YE gezogen hat, und man auf AE andere Theile, als diejenigen machen muß, die durch die Construction dieser krummen Linie entstehen, daß alsdenn die neuen mit B*H* parallel gezogenen Linien nicht mehr die gemeinschaftlich bestimmten Punkte der Quadratrix treffen werden, und daß folglich die aus dem Punkt B gezogenen Halbmesser auf dem Bogen AV unzuverläßige Eintheilungen machen werden.

§. 12.

Die Quadratrix würde ohne allen Zweifel und unläugbar die Eigenschaft einer Omnisectrix haben, wenn es zu machen wäre, daß der Endpunkt A des Radius BA den Bogen A*H* in der nämlichen Zeit gleichförmig durchlief, in welcher die Linie A*a* gleichförmig parallel mit B*H* auf AB getragen wird. Dieses heißt aber eben das annehmen, wovon die Frage ist: Ob man nämlich den Bogen A*H* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, wie die Linie AB theilen könne. Diese Anmerkung ist klar, und schon vor ungefehr 1400 Jahren vom Pappus von Alexandrien gemacht worden. (*a*).

Von

(*a*) Im 4ten Buche auf dem 57ten Blatte seiner Mathemat. Sammlungen, die vom Commandinus aus dem griechischen ins lateinische übersetzet sind.

Von der Spirallinie.

§. 1.

Man nehme eine beliebige Linie CB (Fig. 103), theile sie in verschiedene, wie hier, in 2 gleiche Theile. Man lasse von dem Punkt C durch die Theilungspunkte A und B Cirkel gehen. Darauf theile man den Radius CA nach Gefallen in gleiche Theile, z. E. in 9. (Je grösser die Anzahl ist, desto vollkommner wird die zu beschreibende krumme Linie seyn). Man theile die Peripherie AFMA von diesem Radius eben so, und ziehe durch die neuen Theilungspunkte die Halbmesser CD, CF, C*H* .... Endlich trage man einen dieser Theile des Radius CA auf den nächsten Radius CD von C in *o*; 2 Theile auf den nächstfolgenden CF, von C in *r*; 3 Theile auf C*H* von C in P und so fort, biß wieder zu dem Radius CA. Man ziehe die Punkte *o* . *r*, P .. durch eine zusammenhängende Linie zusammen, so bekommt man eine krumme Linie C*o*P*x*A, die die erste Spirallinie heißt (*a*).

Man trage aufs neue einen Theil des Radius CA auf CE von D in *b*; 2 Theile auf CK von F in *e*; 3 Theile auf CL von *H* in *d* und vermehre so immer fort die Anzahl der Theile um 1, biß man wieder zu dem Radius CB kommt. Man ziehe durch die gefundenen Punkte *b* . *e* . *d* .... eine Linie A*b*F*h*B; Siehet man diese als eine Fortsetzung der krummen Linie C*o*P*x*A an, so nennet man diese krumme Linie die 2te Spirallinie. Der Punkt C ist das Centrum der Spiralen; CA die Linie der ersten Revolution, CB die Linie der 2ten Revolution. Meiner Meinung nach würden diese Linien besser benennet seyn, wenn man die Linie C*o*P*x*A

(*a*) Sie ist vom Archimed erfunden worden.

CoP*x*A die Spirallinie der ersten Revolution und die krumme Linie CoP*x* A *bdfh*B die Spirallinie der doppelten Revolution, und so weiter nach der Anzahl der Cirkel hiesse. Diese Benennungen würden uns eher an die Idee der Erzeugung dieser krummen Linie erinnern.

§. 2.

Man kann sich folglich die Spierallinie wie CoP*x*A so vorstellen, als wäre sie durch den Punkt C erzeugt, welcher gleichförmig der Länge nach auf dem Radius CA fortlief und ihn genau in der nämlichen Zeit durchlauft, in welcher der Endpunkt A dieses Halbmessers mit gleichförmiger Bewegung seine Peripherie beschreibt, daß folglich C*r* z. E. beständig der nämliche Theil von dem beschriebenden Radius CF oder CA sey, welcher der Bogen AF von seiner ganzen Peripherie ist. Denn aus der Entstehung derselben (§. 1) fließt genau folgendes Verhältniß C*r* : CF oder CA = AF zur Peripherie AHMA.

§ 3.

Wenn man folglich dieses geometrisch einräumen könnte, daß die Bewegung des Punkts A in der Peripherie AHMA gleichförmig sey mit der Bewegung des Punkts C auf dem Radius CA, so würde die Spirallinie CP*x*A den Cirkel nach einem gegebenen Verhältniß theilen können. Gesetzt, man verlange einen Bogen, welcher sich zur ganzen Peripherie verhielte = 2 : 9. Hätte man nun die erste Spirallinie innerhalb der gegebenen Peripherie beschrieben, so dürfte man nur ihren Halbmesser in 9 gleiche Theile theilen und 2 dieser Theile aus dem Mittelpunkt C auf einen beliebigen Punkt *r* der Spirallinie tragen. Durch diesen Punkt *r* müßte man den Radius C*r*F ziehen, so bekäme man einen Bogen AF, welcher sich zur Peripherie A*H*MA verhielt, = 2 : 9.

Denn

Denn es verhält sich beständig Cr : CF oder CA, wie der Bogen AF zur Peripherie $AHMA$ (§. 2). Es verhält sich aber Cr : CA = 2 : 9. (Constr.) Folglich verhält sich AF : $AHMA$ = 2 : 9. Folglich wäre die Aufgabe aufgelöset.

§. 4.

Da man aber die Peripherie eines Cirkels geometrisch nicht in beliebige gleiche Theile theilen kann, so hat diese krumme Linie den nämlichen Fehler, den man §. 11 der Quadratrix bemerkt hat. Man darf folglich von der Spirallinie des Archimeds in solchen Operationen, wo man eine absolute Genauigkeit fordert, keinen Nutzen sich versprechen. Die Künste des Geschmacks aber, können sich derselben bedienen, weil man darinn den Sinnen nur Umrisse darstellen will, die dieselben auf die angenehmste Art rühren.

Von der Cycloide.

§. 1.

Man stelle sich vor, daß der Cirkel AO (Fig. 104), der die grade Linie AC in dem Punkt A berühret, über diese grade Linie hinrolle, biß alle Punkte seiner Peripherie sich genau auf AC so geleget haben, daß der Punkt A nur nach vollendeter ganzer Revolution um sein Centrum in C auffällt. Dieser Punkt wird augenscheinlich eine krumme Linie, wie AFBC beschreiben. Diese haben die neuern Mathematiker die Trochoide, Radlinie oder am gewöhnlichsten die Cycloide genennet. Sie ist derjenigen vollkommen ähnlich, die

die in der Luft ein Nagel eines Rades an einem Wagen beschreibt, indem er über eine grade Linie hinrollt. (*)

§. 2.

Erster Zusatz. Man siehet aus der Erzeugung dieser krummen Linie, daß ihre Basis AC vollkommen der Peripherie des beschriebenden Cirkels AO gleich ist; daß wenn dieser Cirkel in der Mitte D angelangt ist, der beschreibende Punkt A die halbe Peripherie durchlaufen habe und daß er in dieser Lage seines Cirkels biß zu dem culminirenden oder zum höchsten Punkt B über die Basis AC gestiegen sey, und dieser im heruntersteigen den Theil BPC beschrieben habe, der der halben Cycloide AFB vollkommen gleich und ähnlich ist.

§. 3.

Zweyter Zusatz. Folglich werden alle doppelte Ordinaten, wie FP, die durch einen beliebigen Punkt F der krummen Linie mit seine Basis parallel gezogen werden, durch die Linie BD, die durch die Mitte von AC an den culminirenden Punkt B gezogen ist, in 2 gleiche Theile getheilet. Aus diesem Grunde und weil diese doppelte Ordinaten auf die Linie BD rechtwinklicht stehen (Constr.), so wird diese Linie BD die Axe der Cycloide genennet.

§. 4.

(*) Dieses ist die gewöhnliche Cycloide. In dieser ist die Basis so groß, als die Peripherie des beschreibenden Cirkels. Ist aber die Basis grösser als diese Peripherie, so heißt sie eine verlängerte Cycloide. Ist die Basis kleiner, so heißt sie eine verkürzte Cycloide. Stellet man sich vor, daß der beschreibende Cirkel über einen andern Cirkel rolle, so heißt die daher erzeugte Linie eine Epicycloide. B.

§. 4.

Dritter Zusatz. Endlich ist es auch augenscheinlich, wenn man auf die Axe eine Perpendiculairlinie BO an ihren culminirenden Punkt aufrichtet, daß diese die Tangente von der Cycloide und mit ihrer Basis parallel sey, weil der beschreibende Punkt A sich beständig vor und nach seiner Ankunft in dem culminirendem Punkt B unterwärts dieser parallel oder Perpendiculairlinie befindet.

§. 5.

Erster Hauptsatz. Nimmt man an, daß der beschreibende Cirkel AO über AC biß nach L gerollet und der beschreibende Punkt A biß nach F in der Höhe gestiegen ist, und daß folglich dieser Cirkel die Lage LFM habe; Stellt man sich ferner denselben nochmal über die Axe BD beschrieben vor, so behaupte ich, daß der Theil F*H* einer jeden Ordinate FK der Cycloide, welcher zwischen dieser krummen Linie und zwischen dem Berührungspunkt *H* des Cirkels von dem Diameter BD enthalten ist, jederzeit so groß sey, als die Cirkelbogen *H*B, der zwischen dem Berührungspunkt *H* und dem culmirenden Punkt B enthalten ist.

Beweis. Weil alle Punkte des Bogens FL sich auf die Theile AL gelegt haben (Beding.), so ist die grade Linie AL so groß, als der Bogen FL. Nun ist aber FL = dem Bogen *H*D. Folglich ist die grade Linie AL = dem Bogen HD Es ist aber (§. 2) AL+LD = der halben Peripherie des beschreibenden Cirkels = *H*D+*H*B: weil folglich AL = *H*D, so muß auch der Bogen *H*B = der graden Linie LD = GK = G*H*+HK = FG+GH (denn es ist HK = FG) = FH seyn. Folglich ist die grade Linie FH = dem Bogen HB. W. z. E. W.

§. 6.

§. 6.

Ist hingegen eine krumme Linie so beschaffen, wenn man mit ihrer Axe BD als einem Diameter einen Cirkel beschreibt, daß alle grade Linien, die man wie FH von einem ihrer Punkte gezogen hat, immer so groß sind, als die correspondirenden Bögen HB, so wird diese krumme Linie nothwendig eine halbe Cycloide seyn, wovon HBD der beschreibende Cirkel seyn wird.

Beweis. Weil FH beständig dem Bogen HB gleich ist (Beding.), so ist die grade Linie AD, die eben so, wie FH gezogen ist, der halben Peripherie BHD gleich. Wenn man folglich den Cirkel BD über AD so rollen läßt, daß der Punkt B anfangs in A angenommen wird, so wird dieser Punkt eine halbe Cycloide beschrieben haben, wenn dieser Cirkel in D gekommen ist (§. 1). Ziehet man folglich von einem beliebigen Punkt H der halben Peripherie des Cirkels BD mit AD eine Parallellinie, biß sie mit der halben Cycloide zusammenstößt, so wird diese Parallellinie jederzeit dem correspondirenden Bogen HB gleich seyn. (§. 5) Nun ist aber (Beding.) der Bogen HB so groß, als die grade Linie FH; Folglich ist diese Parallellinie nicht von FH unterschieden. Da folglich alle Punkte dieser halben Cycloide mit allen Punkten der gegebenen krummen Linie zusammenfallen, so ist diese krumme Linie nothwendig eine halbe Cycloide. Dieses ist wohl zu bemerken.

§. 7.

Zweyter Hauptsatz. Nachdem man eine beliebige Ordinate fh an die Cycloide biß an den Berührungspunkt h des beschreibenden Cirkels ausgezogen hat, und wenn man an diesen Punkt h eine Tangente hS am Cirkel ziehet und mit dieser Tangente durch F gegen AC eine Parallellinie fl ziehet, so

so behaupte ich, daß Fl nothwendig in die Cycloide hineingehen werde.

Beweis. Es wird die mit der Tangente hS parallel gezogene Linie fl entweder in diese Cycloide hinein gehen oder gänzlich, wie fm ausserhalb derselben fallen. Dieses letzte ist aber unmöglich

I. Denn nimmt man den Bogen ht kleiner als den Bogen Bh, und ziehet aus dem Punkt t mit fh eine Parallellinie tm und verlängert sie so lange, biß sie hS in b, die Cycloide in P und fm in m durchschneidet, so ist $mP+Pb+bt > Pb+bt$. Nun ist aber (§ 5) $Pb+bt =$ dem Bogen $Bh+$ dem Bogen ht; Folglich ist $mP+Pb+bt >$ als der Bogen $Bh +$ dem Bogen ht. Weil aber fm mit hb parallel seyn würde (Beding.), so würde $mP+Pb$ so groß seyn, als $fh =$ dem Bogen Bh. (§. 5); Folglich wäre der Bogen $Bh \times bt >$ als der Bogen $Bh+$ Bogen ht, oder die grade Linie bt würde grösser seyn, als der Bogen ht, und folglich noch grösser als die Sehne ht. Folglich würde in dem Triangel bht der Winkel thb grösser seyn, als der Winkel hbt. Hiervon will ich aber sogleich die Unmöglichkeit zeigen.

II. Um euch davon zu überzeugen, so verlängert mt biß in H, so werdet ihr euch erinnern, daß der Winkel hbt oder hbH die Helfte des Bogens hBH weniger die Helfte des Bogens ht zu seinem Maaße habe, oder, daß der Winkel $hbH =$ dem Bogen $\frac{BH}{2}+$ Bogen $\frac{Bh}{2}-$ Bogen $\frac{ht}{2}$ (M). Es ist aber der Bogen $BH =$ dem Bogen $Bg+$ Bogen $gH =$ dem Bogen $Bh+$ Bogen ht; Folglich ist der Bogen $\frac{BH}{2} =$ dem Bogen $\frac{Bh}{2}$ $+$ Bogen $\frac{ht}{2}$. Setzet man folglich in der Gleichung M diesen Werth von dem Bogen $\frac{BH}{2}$, so ist der Winkel $hbH =$ dem ganzen Bogen Bh oder er hat den ganzen Bogen Bh zum Maaß.

Es hat aber der Winkel *thb* die Helfte des Bogens *ht* zum Maaß. Weil folglich (Beding) der Bogen *ht* kleiner ist, als der Bogen B*h*, so ist der Winkel *thb* nothwendig kleiner, als der Winkel *hb*H oder *hbt*. Man hat aber schon gesehen (I), daß der Winkel *thb* grösser seyn würde, als der Winkel *hbt*. Wenn man folglich die Linie, die durch den Punkt *f* gegen AC mit *h*S parallel gezogen wird, nicht in die Cycleide hineinglenge, so würde der Winkel *hbt* zugleich grösser und kleiner seyn, als der Winkel *hbt*. Dieses ist unmöglich. Folglich u. s. w.

§. 8.

Dritter Hauptsatz. Nimmt man beständig *fh* mit AC parallel und *h*S für die Tangente in dem Punkt *h* des Cirkels an, und stellet man sich vor, daß *fm* die Tangente der Cycloide sey, so wird *h*S nothwendig in einem Punkt S durch die Verlängerung *f*S der Tangente *fm* durchschnitten werden, oder, die beyden correspondirenden Tangenten des Cirkels und der Cycloide *f*S und *h*S sind nothwendig determinirt, sich zu begegnen.

Beweis. Ziehet *fl* mit *h*S parallel. Diese Linie wird innerhalb der Cycloide fallen. (§. 7). Nimmt man aber *fm* für die Tangente an, so wird sie ganz ausserhalb der Cycloide fallen. Folglich sind *fm* und *fl* nicht einerley Linie. Weil folglich *fl* von *fm* durchschnitten worden, so wird die Linie *fm* auch *h*S als die Parallellinie von *fl* durchschneiden. Folglich haben die beyden correspondirenden Tangenten *f*S und *h*S der Cycloide und ihres beschreibenden Cirkels nothwendig die Neigung, sich zu durchschneiden.

§. 9.

Vierter Hauptsatz. Ziehet man *fh* mit AC parallel und nimmt *f*S für die Tangente der Cycloide in *f* und *h*S für

für die Tangente an dem correspondirendem Punkt h des beschreibenden Cirkels, so behaupte ich, daß diese 2 Tangenten in einem Punkt S sich so durchschneiden, daß $fh = h$S.

Beweis. 1) Diese beyden Tangenten durchschneiden sich in irgend einem Punkt. (§. 8).

2) Um einen sehr einfachen Beweis zu haben, daß $fh = h$S sey, so stellet euch vor, daß man sehr nahe bey fh mit dieser Linie eine Parallellinie ux gezogen habe. Itzt kann man wegen der äussersten Kleinheit der Bögen fu und hx der Cycloide und des Cirkels, die zwischen diesen 2 Parallellinien enthalten sind, ohne einen merklichen Irrthum für Theile ihre Tangenten ansehen. Daher entstehen die ähnlichen Triangel fhS und uxS. Daraus ziehet man folgendes Verhältniß $fh : ux = h$S : xS. Folglich $fh - ux : fh = h$S $- x$S : hS (T). Nun ist $fh =$ Bh und $ux =$ Bx (§. 5). Folglich $fh - ux =$ B$h -$ B$x = hx$. Folglich ist hS$-x$S $= hx$. Wenn man folglich in der Proportion T, hx an der Stelle von hS$-x$S setzet, so ist $hx : fh = hx : h$S. W. z. E. W.

§. 10.

Wenn man umgekehrt von einem beliebigen Punkt f der Cycloide mit AC eine Parallellinie fh ziehet, und durch den Punkt h, wo diese Parallellinie den beschreibenden Cirkel durchschneidet, an diesen Cirkel eine Tangente hK ziehet, und wenn man alsdenn hS $= fh$ macht, so behaupte ich, daß, wenn man die Punkte f und S verbindet, die Linie fS die Tangente an der Cycloide seyn werde.

Beweis. Wäre sie es nicht, so könnte man folglich durch den Punkt f eine ander Tangente fK an dieselbe ziehen. Und diese würde folglich oberhalb oder unterhalb fS fallen. Dieses ist aber unmöglich. Denn wäre fK die Tangente in f,

 so

so haben wir erst gesehen (§. 9), daß alsdenn *hk* so groß wäre als *fh*. Nach der Bedingung ist aber *fh*=*h*S. Folglich wäre *h*K=*h*S, welches unmöglich ist. Es ist aber der nämliche Beweis, wenn *f*K unterhalb *f*S fällt. Folglich u. s. w.

§. 11.

Fünfter Hauptsatz. Es sey der Triangel *fh*S der vorige, so behaupte ich, daß die Sehene *h*B, die durch den Berührungspunkt *h* an den culminirenden Punkt B gezogen wird, mit der Tangente *f*S parallel sey.

Beweis. 1) Verlängert *fh* biß in *g*, damit man erkenne, daß der Winkel S*hg* zu seinem Maaße den halben Bogen *h*B*g* oder den ganzen Bogen *h*B habe, (Geometr.). Es hat aber der Winkel S*h*B nur die Helfte dieses nämlichen Bogens zum Maaß (Geom.); Folglich ist der Winkel S*hg* = 2 S*h*B.

2) Bemerket itzt, da der Winkel S*hg* der äussere Winkel in dem Triangel *fh*S ist, daß er den 2 Winkeln *f* und S in diesem Triangel gleich sey (Geometr.). Nun ist der Winkel *f*=S, weil *fh*=*h*S (§. 9); Folglich ist der Winkel S*hg* =2 S. Man hat aber gesehen, (Art. 1), daß der Winkel S*hg* = 2 S*h*B. Folglich ist 2 S = 2 S*h*B, oder der Winkel S= dem Winkel S*h*B seinem Wechselwinkel. Dieses beweiset, daß *h*B mit *f*S parallel sey (Geom.)

§. 12.

Wenn man hingegen von einem beliebigen Punkt *f* der Cycloide *fh* so weit ausziehet, biß sie in dem Punkt *h* den beschreibenden Cirkel durchschneidet, und auf die Axe desselben BD perpendiculair stehet, und wenn man nun die Linie *h*B biß an den culminirenden Punkt B und *f*S mit *h*B parallel ziehet,

ziehet, so wird diese Linie fS die Tangente an den Punkt f des Cycloide seyn.

Beweis. Ziehet an den Punkt h des Cirkels die Tangente hS. Diese wird fS in einem Punkt S durchschneiden, weil sie hB, welche mit fS parallel ist, durchschneidet (Beding.); verlängert noch fh biß in g, so ist der Winkel $Sfh = Bhg = ShB = fSh$. Folglich ist $hS = fh$. Folglich ist fS eine Tangente der Cycloide. (§. 10).

§. 13.

Hieraus folgt, daß die Perpendiculairlinie AO auf der Basis AC der Cycloide, die an dem Anfangspunkt A oder C gezogen ist, eine Tangente dieser krummen Linie sey. Denn diese Perpendiculairlinie hat alle erforderliche Eigenschaften einer solchen Tangente. Es stößt nämlich AD mit BD perpendiculair zusammen, und die Linie AO ist mit der Sehne oder dem Diameter BD, welcher von dem Berührungspunkt D biß an den culminirenden Punkt B gezogen ist, parallel. Folglich ist die Perpendiculairlinie AO eine Tangente der Cycloide.

§. 14.

Aufgabe. Die Quadratur der Cycloide zu finden, oder die Oberfläche der Cycloide zu bestimmen (Fig. 105).

Auflösung. Es sey AD die Basis einer halben Cycloide AMB. Die halbe Peripherie BPD des beschreibenden Cirkels = AD und DG das Rechteck aus der halben Basis AD und der Axe BD. Man stelle sich itzt vor, daß BG oder AD in einer Anzahl gleicher kleiner Theile, wie GF getheilet sey, daß die Summe der äussern Rechtecke FGAS der Fläche GMBAG von der Summe GFML der innern Rechtecke von eben dieser Fläche um weniger, als jede angeb-

 liche

liche Grösse verschieden sey. (Die Möglichkeit davon ist im §. 68 der Parabel gezeiget werden). Durch den Punkt M, wo die Perpendiculairlinie FS die krumme Linie durchschneidet, ziehe man LMPQ mit AD parallel und von dem Punkt P, wo sie den Cirkel durchschneidet, sey die Perpendiculairlinie PH und die Sehne PB gezogen, welche mit der Tangente AMT an dem Punkt M parallel lauft. (§. 11).

1. Weil nun GF ausnehmend klein ist, so kann das Theilchen AM der krummen Linie betrachtet werden, als wäre es ein Theil der Tangente AT am Punkt M. Folglich ist AM mit BP parallel (§ 11); da folglich die Trianael ASM und BQP sich ähnlich sind, so ist $BQ : QP = MS : AS = \frac{QP \times MS}{BQ} = LM$. Es ist ferner $GL = BQ$. Folglich $GL \times LM = BQ \times (\frac{QP \times MS}{BQ}) = QP \times MS = QP \times PH$ (weil $MS = PH$) oder das kleine innere Rechteck $GL \times LM$ der Fläche GMBAG ist dem kleinen correspondirenden äussern Rechtecke $QP \times PH$ von dem halben beschriebenden Cirkel gleich. Und dieses gilt in allen Punkten M der krummen Linie. Folglich ist die Summe der innern Rechtecke des Raums GBMAG der Summe der äussern Rechtecke des halben Cirkelsgleich. Nun ist aber (§. 69 der Parabel) eine jede dieser Summen so groß, als ihre correspondirende Fläche; Folglich ist die Fläche GBMAG oder die Fläche, die zwischen den Linien GA und GB und der krummen Linie AMB lieget, so groß, als die Fläche des halben beschriebenden Cirkels BPD.

2. Itzt ist das Rechteck $DG = AD \times BD$ und die Oberfläche des halben beschreibenden Cirkels gleich der halben Peripherie BPD oder $AD \times \frac{BD}{4}$, oder der halbe erzeugende Cirkel oder der Raum GBMAG, (Art. 1) ist nur der 4te Theil des Rechtecks DG. Folglich ist die Fläche AMBDA der halben

Cycloide

Cycloide $\frac{3}{4}$ davon: Daraus erhellet, daß die $\frac{1}{2}$ Cycloide sich zum halben erzeugenden Cirkel verhalte wie 3 : 1. Folglich ist die ganze Cycloide 3 mal so groß, als die Fläche des beschreibenden Cirkels. (*a*) W. z. E. W.

§. 15.

Zusatz. Hätte man die vollkommene Quadratur des Cirkels, so hätte man auch die vollkommene Quadratur der Cycloide, und umgekehrt. (*)

§. 18.

Aufgabe. Eine Cycloide zu beschreiben.

Die Auflösung dieser Aufgabe kann entweder ganz mechanisch oder zum Theil mechanisch und zum Theil geometrisch seyn.

(*a*) Man siehet hier eine neue Probe von der Zierlichkeit der Methode der Gränzen bey der Quadratur der krummen Linien. Die Construction und der Beweis dieser Aufgabe durch die Integral Rechnung ist gewiß nicht simpler. Man hat auch noch den Vortheil, diese Rechnung zu übergehen, und man genießt hier die Klarheit der synthetischen Methode ohne die Langwierigkeit derselben zu empfinden.

(*) Wenn gleich die Quadratur der ganzen Cycloide von der Quadratur des Winkels abhängt, so haben doch Wreen und Hygens Beyspiele gegeben, daß man einzelne Stücke oder Abschnitte von ihr quadriren könne. Sie haben gefunden, daß, wenn man in der Weite des halben Radius vom Scheitelpunkt eine Ordinate zöge, dadurch ein Segment entstehe, welches so groß ist, als ein in dem beschreibenden Cirkel verzeichnetes gleichseitiges Dreyeck. Leibnitz hat ein schiefes Segment auszurechnen gelehrt. Bernoulli hat aber das vollkommste hierinn geleistet. Man sehe *Bernoulli Oper. T. 1. p. 322. Montucla. Histoire des Math. T. 1. p. 59.* B.

Die erste ganz mechanisch Auflösung. Nehmet zwey geebnete Bretter und leget sie aufs genaueste so, daß das eine perpendiculair und das andere horizontal sey. Das horizontale muß 2 sehr ebene und glatte Falzen haben, zwischen welchen man genau und ohne viele Kraft einen Cylinder halten kann, dessen cirkelsförmige Grundflächen sich sehr genau an die Falzen anlegen. Die Basis gegen die Seite des verticalliegenden Brettes muß mit einer Spitze oder einem Stückchen perpendiculairstehender Kreide oder Bleystift versehen seyn, welches nur so weit hervorstehet, als eben nöthig ist, das verticalstehende Brett schwach zu berühren. Aus dieser Vorbereitung erhellet es, wenn man denn Cylinder zwischen den 2 Falzen sich herum wälzen läßt, daß das äusserste der Spitze oder die Kreide auf der verticalstehenden Fläche eine Linie zeichnen werde, welche eine Cycloide ist. (§. 1).

Anmerkung. 1) Es müssen die Falzen *genau in* einer graden Linie seyn; sie müssen parallel und durch eine fettigte Materie schlüpfrig gemacht seyn, damit die Grundflächen des Cylinders, der sich immer in der nämlichen Fläche herumwälzt, nicht den geringsten Anstoß leiden, und daß also der Cylinder so richtig, als möglich, fortlaufe.

2) Die beschreibende Spitze muß gegen das Centrum der Grundfläche des Cylinders, so viel, als *möglich ist*, vorgerückt werden, damit der Vorsprung der Falzen sie nicht aufhalte, oder in dem untern Theil der Umwälzung in der Bewegung hindere.

3) Damit man eine ganze Umwälzung der Grundfläche des Cylinders genau auf der Verticalfläche abgezeichnet bekomme, so lässet man den Cylinder sich so herumdrehen, daß man das Ende einer Revolution, eine ganze Revolution, und den Anfang einer dritten habe, so erhält man dadurch 2 Punkte, welche die Basis der ganzen Revolution bestimmen und folglich erhält man eine ganze Cycloide.

4)

4) Will man die Länge der Peripherie der beschreibenden Fläche in einer graden Linie haben, so stecke man in der äussern Fläche des Cylinders eine sehr feine Spitze, die ein ganz wenig hervorragt. Man überziehe die Horizontalfläche, worüber der Cylinder sich bewegen soll, mit einer dünnen Lage von Wachs. Nun wird der Eindruck der Spitze den Anfang und das Ende der Revolution zeigen. Diese Linie ist die beschreibende rectificirte Peripherie.

§. 18.

Zweyte Auflösung, die zum Theil mechanisch, zum Theil geometrisch ist. Wir sagen, daß diese Auflösung zum Theil **mechanisch** sey, weil sie sich auf die Rectification der Peripherie des Cirkels gründet. Ein Problem, welches man noch nicht geometrisch aufgelöset hat. Sie ist aber nichts destoweniger zum Theil geometrisch, weil man aus der vorausgesetzten Rectification des Cirkels die bekannten Eigenschaften der zu beschreibenden krummen Linie herleitet. Dieses werden wir sogleich sehen.

Es sey AD die halbe Basis einer zu beschreibenden halben Cycloide. (Fig. 106) Diese Grundlinie sey der halben Peripherie BMD ihres beschreibenden Cirkels gleich. (Diese muß man mechanisch nach §. 17. determiniren oder man muß einen Cylinder mit einem biegsamen Maaße umlegen, und es hernach wieder in eine grade Linie ausbreiten). Man richte an dem Endpunkt D dieser halben Basis den Diameter BD des beschreibenden Cirkels perpendiculair auf und über demselben beschreibe man den halben Cirkel und theile alsdenn die nämliche halbe Peripherie BMD in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. (Jemehr Theile man macht, desto genauer ist die beschriebene Linie). Man theile die Linie AD in eben so viele Theile, z. E. in 6 und ziehe durch die Theilungspunkte O, M, L, K, I Parallellinien mit AD. Man gebe OP 5 Theile von AD; MH 4; LG 3; KF 2 und der Linie IC einen.

Nun behaupte ich, wenn man die Punkte A, P, H, G, F, C, B, durch eine aneinanderhängende krumme Linie verbindet, daß man eine halbe Cycloide bekomme, wovon BMD der halbe beschreibende Cirkel seyn wird.

Beweis. Vermöge der Construction ist AD = der halben Peripherie BMD. Folglich ist der 6te Theil von AD so groß als der 6te Theil von BMD. Folglich ist OP, welche 5 Theile von AD ist (Constr.) so groß, als der Bogen BO, welcher auch $\frac{5}{6}$ von BMD oder AD hat. Folglich ist der Punkt P in einer Cycloide, wovon BMD der halbe erzeugende Cirkel ist (§. 6) und schließt man in Ansehung der Punkte G und H auf eine ähnliche Art, so wird man finden, daß sie in der nämlichen krummen Linie sind. Wiederhohlet man dahero die nämliche Construction auf der andern Seite von BD, so wird man eine ganze Cycloide bekommen. W. z. Th. u. z. E. W. (*a*).

§. 19.

Erklärung. Man stelle sich vor, daß die halbe Cycloide oder eine beliebige krumme Linie BCA (Fig. 107), die immer auf die nämliche Seite hohl ist, mit einem Faden umwickelt sey; daß dieser Faden sich nach und nach von der krummen Linie durch seinen Endpunkt B so abwickle, daß sein abgewickelter Theil FC beständig genau nach einer graden Linie ausgedehnt sey: so erhellet, daß der Punkt B in dieser Bewegung eine andere krumme Linie BFM beschreiben werde. (*b*) Die

(*a*) Mir scheint diese Constructian der Cycloide leichter, kürzer und eines einfachern Beweises fähig, als die man ordentlich in den Büchern findet.

(*b*) Dieses wird besonders im §. 22. bewiesen werden. Man wird

Die Linie der Evolution (*) nennet, und alsdenn heißt die Linie BCA die Evolute und die Theile des Fadens, wie CF, die sich von BCA abgewickelt haben, heissen die Halbmesser der Krümmung.

§. 20.

Erster Zusatz. Aus dieser Entstehung der Linie der Evolution folgt: 1) Daß ein jeder Halbmesser der Krümmung FC allemal dem Theil BC dieser krummen Linie, wovon er abgewickelt ist, gleich sey. 2) Daß dieser Halbmesser eine Tangente der Evolute in dem Punkt C sey, in welchem er sie noch berührt. Denn verlängert man FC gegen P, so erkennet man, da sich die Evolute in C krümmet, daß sie die Richtungslinie CP ummittelbar nach diesem Punkt verlasse und, da der Faden vermöge der Bedingung in die krumme Linie nicht hineingehet, so muß er sie offenbar nur in einem C Punkt berühren.

§. 21.

Zweyter Zusatz. Wenn man an dem Endpunkt F eines jeden Halbmessers der Krümmung FC eine Perpendikulairlinie FG auf diesem Radius aufrichtet, so behaupte ich, daß diese die Tangente der Linie der Evolution BFM sey, und daß folglich alle Halbmesser der Krümmung gegen die Linie der Evolution perpendiculair sind.

Beweis. Wenn FG die krumme Linie in irgend einem an-

---

wird auch im §. 23. zeigen, daß sie beständig auf der nämlichen Seite hohl oder erhaben sey.

(*) Developpante oder Linie, die durch die Abwickelung der krummen Linie BCA entstanden ist. Ich werde sie im teutschen immer die Linie der Evolution nennen.

andern Punkt H nach M zu berührte (*a*) oder eine Neigung darzu hätte, so würde 1) der Halbmesser der Krümmung an diesem Punkt H, so wie er EH wird, FCP in L durchschneiden und LH>LF seyn. (Denn, weil LF auf FG perpendiculair stehet (Binding.), so muß LH schief gegen dieselbe seyn): Folglich wäre LH + LE>LF + LE. Nun ist aber LF + LE=FC+CL + LE = BC + CL + LE. (Weil FC=BC (§. 20); Folglich wäre LH + LE oder HE oder die krumme Linie BCE>BC+CL+LE. Folglich wäre der Theil CE dieser krümmen Linie grösser als CL+LE, welches unmöglich ist.

2) Ziehet man den Halbmesser der Krümmung an irgend einen Punkt K der Linie der Evolution, der zwischen B und F lieget, so kann man, wie vorhin beweisen, daß die verlängerte Perpendiculairlinie FG die krumme Linie in diesem Punkt nicht berühren oder durchschneiden kann. Denn so bald der Halbmesser der Krümmung RK wird und man die grade Linie CK und die Sehne CR ziehet, so ist RK=RB (§.20) und der Bogen RC> als die Sehne RC; Folglich RB+ dem Bogen RC oder der ganze Bogen BC>RK+ der Sehne RC Nun ist aber RK+ der Sehne RC> als die grade Linie CK und CK> als CF (denn da CF nach der Bedingung als perpendiculair auf FG angenommen worden ist, so muß CK schief gegen dieselbe seyn, und folglich CK> CF) Folglich ist noch vielmehr der Bogen BC>CF. Dieses ist aber unmöglich weil BC=CF (§.20); Folglich berührt die Perpendiculairlinie FG die Linie der Evolution nur in einem einzigen Punkt F.

3)

(*a*) Man hat H ziemlich weit von F angenommen, damit die Figur deutlich würde. Dieses benimmt aber der Stärke des Beweises nichts. Denn dieser erstrecket sich auf jeden Punkt.

3) Allein da dieses noch nicht zum Beweise hinlänglich ist, daß FG eine Tangente sey, weil es möglich ist, daß eine Secante mit einer krummen Linie auch nur in einem einzigen Punkt zusammenkomme, so ist noch dieses zu zeigen, daß FG gegen B oder M verlängert BFM nicht in dem Punkt F durchschneide.

Wäre sie in F eine Secante, so würde sie zwischen dem Theile FB dieser krummen Linie und dem Halbmesser der Krümmung FC durchgehen, und würde also mit der krummen Linie BCA in einem Punkt y, der zwischen B und C ist, zusammenstossen, oder sie würde zwischen dem Bogen FM und dem Radius FC durchgehen und also einen Halbmesser der Krümmung HE in einem Punkt u, der zwischen den Endpunkten H und E dieses Halbmessers enthalten ist, durchschneiden. Diese beyden Fälle sind aber unmöglich.

Denn ginge erstlich FG als die Perpendiculairlinie auf FC nach y und man zöge die Sehne Cy, (die ich als ausgezogen annehme, so wie Fy und Fu, um die Verwirrung zu vermeiden), so würde $Cy > CF$ seyn Es ist aber CF = dem Bogen CB (§. 20); Folglich wäre $Cy >$ als der Bogen CB, welches unmöglich ist.

Solte hingegen FG auf die andere Seite nach u gehen, so wäre $uL > FL$; Folglich $uL + LE > FL + LE$. Nun ist aber $FL + LE >$ als die krumme Linie BE, die so groß ist, als der Radius HE (§. 20). Folglich wäre $uL + LE$ oder $uE > HE$. Eine neue Unmöglichkeit!

Folglich berührt die Perpendiculairlinie FG die Linie der Evolution nur in einem einzigen Punkt F ohne sie zu durchschneiden; und da dieser Schluß auf alle Punkte dieser Linie angewendet werden kann, so folgt daraus, daß alle Halbmesser der Krümmung

mung einer Evolute, die beständig nach einer Seite hohl ist, gegen ihre Linie der Evolution perpendiculair sind. Denn, wenn man vor einer Perpendiculairlinie auf einer krummen Linie spricht, so verstehet man dadurch eine Perpendiculairlinie gegen eine grade Linie, die durch den Punkt, wo diese grade Linie die krumme Linie berühret, gezogen ist.

§. 22.

Dritter Zusatz. Dieses beweiset, daß die Linie der Evolution BFM würklich eine krumme Linie sey. Denn wäre BFM eine grade Linie, so wäre der Theil derselben FH es auch. Folglich würden die 3 Winkel des Triangels LFH mehr als 2 Rechtewinkel enthalten. Denn (§. 21) von den beyden Winkeln KFH und LHF würde ein jeder ein rechter Winkel seyn. Dieses ist absurd; Folglich muß BFM eine krumme Linie seyn.

§. 23.

Vierter Zusatz. Folglich läßt eine Tangente FG an der Linie der Evolution BFM diese krumme Linie ganz auf der einen Seite; Folglich ist die Linie der Evolution einer krummen Linie, die beständig auf einer Seite hohl ist, auch mit ihrer Evolute immer gegen einerley Seite hohl ist. Weil sie keinen Beugungs oder Widerkehrungspunkt haben oder sich nicht nach einer andern Seite drehen könnte, ohne von ihrer Tangente durchschnitten zu werden.

§. 24.

Lehnsatz. Zwo krumme Linien BA und BM (Fig. 107) die immer gegen eine Seite hohl sind, und beyde in B ihren Anfangspunkt haben, können unmöglich so beschaffen seyn,

daß

daß alle Linien, die gegen die eine Perpendiculair sind, zu gleicher Zeit auch auf der andern Perpendiculair sind.

Beweis. Solte dieses seyn, so müßten nothwendig alle Tangenten der einen mit den correspondirenden Tangenten der andern parallel seyn. (*a*) Dieses ist aber unmöglich. Es ist auch gleich anfangs augenscheinlich, wenn 2 krumme Linien sich durchkreuzen oder eine Neigung haben, sich zu durchkreuzen, daß ihre Tangenten nicht parallel seyn können, weil diese sich auch durchkreuzen müssen.

2) Wenn sie sich nur in dem Anfangspunkt B berühren, so können die 2 Tangenten, die in diesem Punkt zusammen fallen, würklich als parallel angesehen werden. Allein die Tangente der einen, die an dem Punkt, der unmittelbar auf dem Berührungspunkt folgt, gezogen ist, wird nicht mit der correspondirenden Tangente der andern parallel seyn können. Denn die Tangenten können als kleine Seiten ihrer krummen Linien betrachtet werden. Gibt es also 2 derselben, die gänzlich in einander fallen, so können die 2 folgenden kleinen Seiten, oder die 2 folgenden kleinen Tangenten, die von dem nämlichen Endpunkte ausgezogen sind, nicht parallel seyn; und folglich kann die Linie, die gegen die eine perpendiculair ist, nicht gegen die andere perpendiculair seyn. Dieses ist sehr wichtig und merkwürdig.

§. 25.

(*a*) Denn eine Perpendiculairlinie gegen eine krumme Linie, ist diejenige, die mit der Tangente, die an dem Punkt, wo diese Perpendiculairlinie die krumme Linie berühret, gezogen ist, rechte Winkel macht. Wäre also die nämliche Linie gegen 2 krumme Linien perpendiculair, und man zöge die Tangenten an die Berührungspunkte, so müßten diese Tangenten gegen die nämliche Linie perpendiculair und folglich unter sich parallel seyn.

§. 25.

Zusatz. Wenn also 2 krumme Linien, deren Natur man nicht kennet, so beschaffen sind, daß, wenn sie immer gegen eine Seite hohl sind und einerley Anfangspunkt haben, alle Perpendiculairlinien der einen auch auf der andern perpendiculair sind, so kann man daraus schliessen, daß diese 2 Linien nothwendig eine einzige und die nämliche krumme Linie sind. Denn sonst wäre diese Eigenschaft unmöglich. (§. 24.)

§. 26.

Aufgabe. Bey einer gegebenen halben Cycloide BCA die Natur ihrer Linie der Evolution BFM zu bestimmen. (Fig. 108).

Auflösung. 1) Man construire zuerst das Rechteck DR und nun erinnere man sich, daß ein jeder Halbmesser der Krümmung CF der Evolute BCA eine Tangente dieser Evolute sey. (§. 20). Ziehet man folglich, von dem Berührungspunkt C mit der Grundlinie AD die Parallellinie CH, um die Sehne HB ziehen zu können, so wird diese Sehne mit CF parallel seyn. (§. 11). Folglich ist der Winkel BLF = HBL, als Wechselwinkel. Wenn man folglich einen Cirkel auf die Perpendiculairlinie LO = BD, construirt, so wird dieser Cirkel dem Halbmesser der Krümmung CF in einem Punkt F so schneiden, daß der Bogen FL = dem Bogen BH sey. (*a*) Nun ist aber der Bogen BH = der graden Linie

(*a*) Weil der Winkel BLF die Helfte des Bogens FL und der Winkel HBL die Helfte des Bogens BH zu seinem Maaße hat; da folglich der Winkel BLF und HBL sich gleich sind, so ist auch das Maaß derselben sich gleich und folglich auch das Duplum ihres Maaßes, oder die Bögen FL und BH sind sich gleich.

Linie CH (§. 5) und CH = BL, (wegen des Parallelogramms BLCH); Folglich ist der Bogen FL der graden Linie BL gleich.

2) Wird itzt die krumme Linie BCA ganz abgewickelt seyn, so wird der Faden diese Evolute nur in dem Punkt A berühren und folglich auf AD perpendiculair seyn. (§. 13) Folglich wird der Halbmesser der Krümmung alsdenn die Lage AM haben. Wenn man folglich auf RM = AR = BD einen Cirkel beschreibt, und FT mit BR parallel ziehet, so ist der Bogen TR gleich dem Bogen FL = der graden Linie BL. (1); Folglich ist die grade Linie LR gleich dem Bogen TM. Denn es ist die halbe Peripherie MTR = AD = BR. (Constr.).

3) Der Winkel TRL = FLB, weil der Bogen TR = dem Bogen FL. Folglich ist die Sehne TR mit der Sehne FL parallel und von gleicher Grösse. Folglich ist LR = FT. Weil folglich LR = dem Bogen TM (2), so ist FT = dem Bogen TM. Das nämliche geschiehet in jedem so wie F determinirten Punkt eines jeden Halbmessers der Krümmung. Folglich machen alle diese Punkte eine halbe Cycloide BFM (§. 6), die vollkommen der krummen Linie BCA gleich ist.

4) Wenn man folglich FO mit der Sehne TM parallel ziehet, so wird diese die Tangente an der halben Cycloide seyn. (§. 12). Da nun aber TR mit FL und TM mit FO parallel ist, so erhellet, daß der Winkel OFL = MTR sey. Da nun MTR ein rechter Winkel ist, so ist es der Winkel OFL gleichfals. Folglich ist der Halbmesser der Krümmung CF perpendiculair gegen den Berührungspunkt der Tangente OF. Er ist es folglich auch gegen die halbe Cycloide, zu welcher der Berührungspunkt gehört; Folglich sind alle Halbmesser der Evolute BCA gegen eine halbe Cycloide perpendi-

culair, die ihren Anfangspunkt in dem Scheitelpunkt B dieser Cycloide hat, und die ihr also gleich und gegen die nämliche Seite hohl seyn muß. Es sey aber die Linie der Evolution der krummen Linie BCA, welche sie will, so sind alle Halbmesser der Evolute auch perpendiculair gegen die Linie der Evolution, (§. 21), welche mit ihr von einem Punkte anfangt und gegen eben die Seite, wie BCA hohl ist. (§. 23) Folglich ist die Linie der Evolution der halben Cycloide BCA auch eine halbe Cycloide BFM, die ihrer Evolute vollkommen gleich ist. W. z. E. W.

Da dieser Beweis in der Folge wichtig wird, so ist es nützlich ihn mit wenigen Worten zu wiederhohlen.

Die halbe Cycloide, die auf der Basis BR=AD mit einem Cirkel RM construirt wird, der dem beschreibenden Cirkel BD der Evolute BCA= ist, hat den nämlichen Anfangspunkt B und ist mit der Evolute BCA gegen eine Seite hohl. Ferner stehen alle Halbmesser der Evolute auf der halben Cycloide, deren Basis BR ist, perpendiculair. Sie stehen aber auch auf der Linie der Evolution von BCA perpendiculair (§. 21); Folglich ist die halbe Cycloide, die über BR beschrieben ist, einerley krumme Linie mit der Linie der Evolution von BCA. Denn sonst können nicht alle Linien, die auf der einen perpendiculair stehen, auch gegen die andere perpendiculair seyn (§. 25); Folglich ist die Linie der Evolution der Cycloide auch eine Cycloide, die durchaus ihrer Evolute gleich ist. (*)

§. 27.

(*) Hyghens, der diese schöne Erfindung machte, zweyfelte, daß es irgend noch krumme Linien gäbe, welche durch die Evolution andere ihnen ähnliche erzeugen könnten. Hr. v. Tschirnhausen bewies eben diese Eigenschaft von seiner Brennlinie und zeigte zugleich, daß sie eine Cycloide sey. Allein Hr. Ber=

§. 27.

Erster Zusatz. Weil der Halbmesser einer Evolute allemal dem abgewickelten Theil gleich ist (§. 20), so ist der Bogen CB = CF = CL + LF. Da nun aber der Winkel BLF = HBL ist, so ist LF = HB und HB = CL, weil die Figur BHCL ein Parallelogramm ist. (§. 26) Folglich ist LF = CL. Folglich ist CF das Duplum von CL und auch das Duplum von der Sehne HB = CL. Folglich ist der Bogen der Cycloide CB, welcher jederzeit dem Halbmesser CF gleich ist, auch allemal das Duplum der correspondirenden Sehne HB des beschreibenden Cirkels DBH. Dieses ist wohl zu bemerken.

§. 28.

Zweyter Zusatz. Aus dem nämlichen Grunde, da MR = AR = BD ist, so ist der Halbmesser der Krümmung AM = 2 AR = 2 BD. Es ist aber AM = der halben Cycloide ACB (§. 13. 20). Folglich ist ACB = 2 BD, oder die krumme Linie ACB einer halben Cycloide ist 2 mal so groß, als der Diameter des beschreibenden Cirkels; Folglich ist die ganze Länge der krummen Linie einer Cycloide 4 mal so groß, als der Diameter ihres beschreibenden Cirkels (a).

Bernoulli hat bewiesen, daß diese Eigenschaft nicht bloß bey der hier erklärten gewöhnlichen Cycloide statt finde, sondern daß alle möglicher Cycloiden durch ihre Evolution ähnliche Cycloiden beschrieben. Ja er zeigt so gar an seiner berühmten logarithmischen Spirallinie, daß sie durch ihre Evolution nicht bloß eine ähnliche, sondern die nämliche Spiral hervorbringe. *Bernoulli Op. T. III. p* 450, 458. *sqb.*

(a) Hier ist also eine rectificirte krumme Linie, die einer bekannten graden Linie gleich ist. Bemerket indessen, daß diese Rectifica-

§. 29.

Dritter Zusatz. Wenn man die halbe Cycloide ACB mit dem Faden AM, mit ihr von einerley Grösse ist, umwickelt, und vom M sich so gegen B bewegt, daß der Theil des Fadens, der noch nicht an der krummen Linie liegt, beständig eine grade Linie sey, so erhellet, daß das äusserste Ende desselben M die nämliche halbe Cycloide BFM beschreiben werde. Denn, wenn sich der Faden wieder aufwickelt, so wird er vollkommen die nämliche nur aber entgegengesetzte Lage wie beym Abwickeln nehmen. Anstatt also den Faden über die halbe Cycloide ACB gegen B zu legen, darf man ihn nur an die halbe Cycloide AE anlegen, indem man von M gegen E sich bewegt. Denn diese Cycloide hat den nämlichen Anfang und ist vollkommen von einerley Grösse und Lage mit der krummen Linie ACB Indem sich nun der Faden AM von der halben Cycloide ACB abwickelt und sich auf ihre Begleiterinn AE aufwickelt, so wird er durch seinen Endpunkt M *eine* ganze Cycloide BME beschreiben, die so groß ist als die beyden halben Cycloiden AB und AE zusammen.

§. 30.

Vierter Zusatz. Wenn man folglich A für den Punkt annimmt, an welchem ein Faden AM aufgehenket worden, der durch einen schweren Körper an seinem äussersten Ende M ausgespannt wird, und wenn man die krummen Linien AB und AE für cycloidische Bleche ansiehet und wenn man diesen aufgehengten Körper in der Ebene dieser krummen Linie osciliren läßt, so werden seine Schwingungen in einer Cycloide BME geschehen.

§. 31.

---

tification nicht vollkommen sey. Denn sie hängt von der Voraussetzung ab, daß eine andere krumme Linie einer graden Linie gleich sey, oder daß die Basis der Cycloide der Peripherie des beschreibenden Cirkels gleich sey. Diese Gleichheit läßt sich aber nicht geometrisch bestimmen.

§. 31.

Anmerkung. Dieses sind die Eigenschaften der *Cycloide*, die der Grund zu der unvergeßlichen Entdeckung des Herrn **Hyghens** waren, als er die Gesetze der Bewegung eines Körpers in dieser krummen Linie aufzusuchen sich bemühete. Er fand, daß ein Körper, der durch seine Schwingungen in einer umgekehrten Cycloide AFK (Fig 109) sich bewegte, deren Basis AK mit dem Horizont parallel ist, just in der nämlichen Zwischenzeit an dem tiefsten Punkt F dieser krummen Linie komme, er mag einen grossen oder kleinen Bogen beschreiben. (*) Der Beweis, den dieser grosse Geometer davon gab, ist sehr schwer. **Hr. de la Hire** bemühte sich in seiner Mechanick einen zierlichern zu geben (*a*). Allein Herr **Johann Bernoulli** bemerkte offenbare Paralogismen und entdeckte einen sehr einfachen Beweis, dessen Gründe meiner Meinung nach vorher erklärt werden müssen.

§. 32.

Erläuterung der Gründe, worauf der Beweis des Isochronismus in der Cycloide sich stützet:

I. Wenn ein Körper von den Punkten B und K (Fig. 109) nach der krummen Linie AFK herunter fällt, so verhält sich die Geschwindigkeit, die er in den Punkten C und H hat, die unterhalb den Punkten B und K liegen, von welchen er zu fallen anfing, zu einander, wie die Quadratwurzeln ihrer

(*) Hr. Bernoulli hat beobachtet, daß ausser dieser Cycloide es unzählige krumme Linien gäbe, wodurch ein schwerer oscillirender Körper seine Schwingungen isochronisch mache. Man sehe *Oper. Ioh. Bern. T. 1. p.* 52. 61. B.

(*a*) Gedruckt zu Paris in 12 im Jahr 1695. S. 421.

ihrer wahren Höhen MP und LO, oder die Geschwindigkeit, die der Körper in C erhält, wenn er von B fiel, verhält sich zur Geschwindigkeit des Körpers in H, wenn er von K fiel $= \sqrt{MP} : \sqrt{LO}$.

Würklich zeiget die Erfahrung, daß ein Körper, welcher vermöge seiner Schwere auf einer schief liegenden Fläche herunter fällt, genau die nämliche Geschwindigkeit am Ende dieser Fläche erhalte, als wenn er durch die ganze verticale Höhe gefallen wäre. Es kann aber eine krumme Linie als eine Reihe von Ebenen betrachtet werden, die unter so stumpfen Winkeln zusammenstossen, daß sie einer einzigen schiefliegenden Fläche gleich sind, die mit der krummen Linie von einerley Höhe ist. Man hat aber im §. 101. der Parabel gesehen, daß die Höhen H und h, die ein bewegter Körper nach seiner Schwere durchlauft, sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten CC und cc oder daß $CC : cc = H : h$. Folglich $C : c = \sqrt{H} : \sqrt{h}$ und folglich hier $= \sqrt{MP} : \sqrt{LO}$.

II. Eine krumme Linie AFK kann in so kleine Theile CD oder HG getheilet werden, daß die Geschwindigkeiten eines bewegten Körpers, die er im Fallen von B und K erhielte, sich nicht merklich vergrössern, wenn er die kleinen Linien CD und HG durchlauft. Denn man kann sie sich so ausnehmend klein vorstellen, daß die Zeit, die er zum Durchlaufen anwendet, kleiner als jede Grösse sey. Es kann also die Zunahme der Geschwindigkeit während dieser Zeit in Ansehung der vorhin erhaltenen Geschwindigkeit für nichts geachtet werden, oder die erlangte Geschwindigkeit kann während der Zeit, daß der bewegte Körper eine von den kleinen Linien CD durchlauft, für gleichförmig angesehen werden, daß sich also die Geschwindigkeit des bewegten Körpers nur am Ende einer jeden kleinen Theils der krummen Linie, im Durchlaufen dieses kleinen Theils aber sich gar nicht verändere. Dieses ist leicht

zu

zu begreifen, wenn man sich einbildet, daß die Schwere ihre Würkungen gegen den bewegten Körper nur nach sehr kleinen Zwischenräumen wiederhohle. Dadurch bleibt die Geschwindigkeit während jeder kleinen Zwischenzeit gleichförmig, ob sie gleich zu Ende einer jeden durch die vermehrten Züge der Schwere eine Zunahme erhält.

III. Bey einer gleichförmigen Bewegung, wenn sich die Geschwindigkeiten C und c unter einander verhalten, wie die durchlaufenen Räume S und s, sind die Zeiten, in welchen sie diese Räume durchlaufen haben, sich gleich. Denn man erhält die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers, wenn man den durchlaufenen Raum S durch die angewendete Zeit T dividirt, oder $C = \frac{S}{T}$ und $c = \frac{s}{t}$. Vermöge der Bedingung verhält sich aber $C : c = S : s$. Folglich $\frac{S}{T} : \frac{s}{t} = S : s$. Folglich $\frac{Ss}{T} = \frac{sS}{t}$. Wenn man folglich durch Tt multiplicirt und darauf mit Ss dividirt, so ist $T = t$.

§. 33.

Sechster Hauptsatz. Ein Körper, der sich durch seine Schwere in einer umgekehrten Cycloide bewegt (Fig. 109), deren Basis AK mit dem Horizonte parallel ist, beschreibet in der nämlichen Zeit eine halbe Cycloide KF, in welcher er einen beliebigen kleinen Bogen BF durchlauft, oder, ein Körper, der sich in einer Cycloide bewegt, kommt allemal in gleicher Zeit in den tiefsten Punkt F dieser krummen Linie, ob er gleich von verschiedenen Höhen herunter fällt; und dieses versteht man, wenn man sagt, daß **die Vibrationen oder Oscillationen eines Pendels in einer Cycloide isochronisch oder von einer gleichen Dauer sind.**

Beweis des Isochronismus in der Cycloide.

I. Stellet euch vor, daß man den Bogen BF in eine sehr grosse Anzahl gleicher Theile CD getheilet habe. Und um der Einbildung zu Hülfe zu kommen, so sey CD $= \frac{1}{100}$ von BF, daß also BF $=$ 100 CD. Gedenket euch auch die halbe Cycloide KF in eben so viele Theile als der Bogen BF so getheilet, daß HG $= \frac{1}{100}$ von KF oder daß KF $=$ 100 HG. Setzet noch, daß CD der 30te Theil von BF sey und machet den Anfang im zählen von dem Punkt B. Es sey auch HG der 30te Theil von KF von dem Punkt K angerechnet. So ist BC $=$ 29 CD und CF $=$ 71 CD. Eben so ist KH $=$ 29 HG und HF $=$ 71 HG. Weil folglich 100 HG : 100 CD $=$ 71 HG : 71 CD, so verhält sich KF : BF $=$ HF : CF oder KF : HF $=$ BF : CF. Eben so verhält sich 71 CD : 71 HG oder CF : HF $=$ CD : HG.

II. Man ziehe itzt die Ordinaten CP, HO und BM und die Sehnen FS, FR, und FT. Da nun KF : HF $=$ BF : CF (I) so ist auch FL : FT $=$ FR : FS. Denn die Sehnen des beschreibenden Cirkels sind jederzeit die Hälften der correspondirenden cycloidalischen Bögen (§. 27). Folglich verhält sich $\overline{FL}^2 : \overline{FT}^2 = \overline{FR}^2 : \overline{FS}^2$ (A). Nun ist (Geom.) $\overline{FT}^2 = FL \times FO$; $\overline{FR}^2 = FL \times FM$ und $\overline{FS}^2 = FL \times FP$. Folglich kann das Verhältniß A folgendes werden: $\overline{FL}^2 : FL \times FO = FL \times FM : FL \times FP$, oder indem man durch FL dividirt, $FL : FO = FM : FP$. Folglich $FL - FO : FO = FM - FP : FP$, oder $LO : FO = MP : FP$. Folglich verhält sich $FP : FO = MP : LO$. Folglich $\sqrt{FP} : \sqrt{FO} = \sqrt{MP} : \sqrt{LO}$, wie die Geschwindigkeit, die er in C erhält, wenn er von B fällt, zur Geschwindigkeit, die er in H erhält, wenn er von K gefallen ist. (§. 32).

III.

III. Allein es verhält sich $FP : FS = FS : FL$ (Geom.); Folglich ist $FP = \frac{\overline{FS}^2}{\overline{FL}}$ und aus dem nämlichen Grunde $FO = \frac{\overline{FT}^2}{\overline{FL}}$; Folglich verhält sich $FP : FO = \overline{FS}^2 : \overline{FT}^2$ oder $\sqrt{FP} : \sqrt{FO} = FS : FT = CF : HF$. (§.27) $= CD : HG$. (I); Folglich $CD : HG = \sqrt{FP} : \sqrt{FO} = \sqrt{MP} : \sqrt{LO}$ (II), wie die Geschwindigkeit in C zur Geschwindigkeit in H: Folglich verhält sich die Geschwindigkeit, die der Körper in C erhält, wenn er von B gefallen ist, zur erhaltenen Geschwindigkeit in H, wenn er von K gefallen ist, wie CD : HG. Es sind aber die erhaltenen Geschwindigkeiten während daß er die ausnehmend kleinen Raume CD und HG durchlauft, gleichförmig (§. 32); Folglich sind die Zeiten, die zur Durchlaufung dieser Theile der krummen Linie angewendet wurden, sich gleich (§. 32). Folglich wird die Summe aller CD oder der ganze Bogen BF in der nämlichen Zeit durchlaufen, in welcher die Summe aller HG oder die ganze halbe Cycloide KF durchlaufen wird. W. z. E. W. (*).

(*) Zu dieser ungemeinschätzbaren Erfindung des Hyghens setze ich noch eine Eigenschaft dieser Cycloide hinzu, die sehr bewundernswürdig ist. Diese umgekehrte ordentliche Cycloide ist auch die Linie, nach welcher schwere Körper, wenn sie so schnell als möglich, von einem Punkt A nach dem Punke E (Fig. 108) fallen sollen, fallen müssen. Sie ist also, die von dem Hrn. Bernoulli erfundene *Linea Brachystochrona*. Natürlicher Weise solte man glauben, daß da die Diagonallinie AE der kürzeste Weg ist, daß ein Körper diese Linie durchlaufen müsse. Es ist zwar diese Linie der kürzeste Weg, aber nicht derjenige, auf welchem der Körper die möglichst größte Geschwindigkeit erhält. Schon Galilaeus merkte, daß es eine

§. 34.

Gebrauch der Cycloide bey der Verfertigung der Pendeluhren. Man weiß, daß eine Uhr eine Maschine

---

eine krumme Linie seyn müsse, fand aber nicht die wahre. Der unsterbliche Geometer Johann Bernoulli löste dieses Problem auf und legte es darauf auch andern Geometern zur Auflösung vor. Damals war ein goldenes Zeitalter; glückliche Zeiten für die Mathematick und Naturlehre, die Zeit der größten Nacheiferung; wo die ersten Genies von Europa durch Vorlegung schwerer und nützlicher Aufgaben wechselsweise ihren Scharfsinn prüften. Ein Zeitpunkt, den ich nie ohne Rührung und ohne ein gewisses warmes Gefühl der Hochachtung und des Vergnügens denken kann. Teutschland, Engelland, Frankreich und die Schweitz theilten bey jener Aufgabe die Ehre der Erfindung, indem ein Leibnitz, Newton, Hospital und Jacob Bernoulli dieses schwere Problem auflöseten. Aber die Ehre, die die Geometrie davon trug, war eine der größten. So verschieden auch die Wege waren, die diese grossen Geister bey ihrer Erfindung betraten, so angenehm war das Erstaunen, da sie sich alle zuletzt an einerley Ziel befanden. Ein Beweis, wie sicher deine Grundsätze sind, erhabene Mathematick! Du führtest sie alle zu einem Ziele, weil die Natur nur ein einziges diesesmal bestimmt hatte. Diese ist sich immer selbst gleich und handelt jederzeit auf die einfachste Weise. Durch einerley Linie läßt sie die Körper nach der größten Gleichheit ihre Schwingungen vollenden und stösset sie durch dieselbe aufs schnellste von einem Orte zum andern.

Herr Bernoulli findet zugleich in dieser Auflösung eine neue Bestätigung der galilaeanischen Gesetze der Bewegung, weil nach jeder andern Hypothese zwo Linien nöthig gewesen wären, diese verschiedene Absichten zu erfüllen.

Und worzu nützt denn nun diese so erhabene Erfindung? Man schlage die Werke des unsterblichen Bernoulli nach. Dieser Naturlehrer, Mathematiker und Philosoph (seltene Vereinigung!), dieser würdige Gelehrte wird zeigen, daß es mehr als unnütze Speculationen, daß es Erfindungen sind, die nichts geringers, als die Erweiterung und eine grössere Vollkommenheit der Dioptrick zur Absicht haben. B.

schine ist, deren man sich zur Abmessung der Zeit bedienet. Sie bestehet aus einer Menge von Rädern, die sich einander die Bewegung mittheilen, die das erste Rad durch ein Gewicht erhalten hat, welches an demselben bevestigt ist. Ist diese Bewegung nicht gleichförmig, so kann man sich nicht darnach richten, und gehet sie zu geschwinde, so ist die Verbindlichkeit die Maschine zurück zu stellen unbequem. Daher entstehet die Nothwendigkeit, so etwas in einer Uhr anzubringen, welches die Bewegung nach richtigen Zwischenzeiten aufhalte oder mäßige. Dieser Endzweck würde man offenbar erhalten, wenn man dem letzten Rade eine Hinderniß setzte, welches wechselsweise dem Stosse seiner Zähne auswiche und widerstünde. Nun würde aber ein Pendul, welches an einer Spindel bevestigt wäre, welche von diesem letzten Rade getrieben würde, diese Würkung hervorbringen. Denn wenn die Zähne des Rades an die Zähne der Spindel stossen, oder kunstmäßig, wenn sie die Spindellappen anstossen, so drehen sie dadurch die Spindel um und gehen fort. Das Gewicht aber des Pendels führt die Spindellappen wieder zurück, und es wird also das Rad von neuem angestossen werden, oder dessen Bewegung zum wenigsten gehindert. So gehet es nun während der ganzen Bewegung der Maschine. Folglich ist das Pendul zur Mäßigung ihrer Würkung wohl zu gebrauchen.

Das Gleichförmige ist aber das wichtigste bey den Uhren. Es mag ein Künstler einem jeden ihrer Theile auch die größte Vollkommenheit geben, so wird doch die Irregularität der Materie und das Reiben verursachen, daß die Räder nicht in jedem Augenblick mit gleicher Stärke anstossen (*a*). Dadurch werden

(*a*) Es ist auch möglich, daß das Gewicht, als das, was die Uhr in Bewegung setzt, seine Geschwindigkeit beschleunige. Da ich einen Kunstverständigen darum befragte, so hat er mir versichert, daß meine Muthmassung wahr seyn müßte, weil es

werden bey jedem Stosse die Schwingungen des Perpendikels ungleich. Es hat die Erfahrung bewiesen, daß ungleiche cirkelförmige Schwingungen in ungleicher Zeit geschehen. Das Pendul, welches cirkelförmig beweget wird, führt also die Spindellappen der Spindel nicht in gleichen Zeiten gegen die Zähne des Steigrades. Ein jeder Zahn gehet also bald zu geschwinde, bald zu langsam. Dadurch entsteht aber eine ungleichförmige Bewegung.

Alle diese Unrichtigkeiten würden gehoben seyn, wenn das stärker oder schwächer angestossene Pendul jederzeit in gleichen Zeiten wieder zurück käme. Nun haben wir aber gesehen (§. 33) daß, wenn es seine Schwingungen in einer Cycloide macht, daß sie alsdenn isochronisch oder von gleicher Dauer sind. Es scheinet also eine Cycloide ausserordentlich geschickt zu seyn, Uhren alle durch menschliche Geschicklichkeit zu erhaltende Gleichförmigkeit zu geben (*).

§. 35.

Um itzt Personen, die keine Kunstverständige sind, oder die niemals die Bewegung einer Uhr untersucht haben, begreiflich zu machen, wie das Pendul, welches an der Spindel dieser Maschine angebracht ist, sich in einer Cycloide bewegen

---

er beständig wahrgenommen hätte, daß eine gut gerichtete Pendeluhr merklich geschwinder ginge, wenn das Gewicht in eine beträchtliche Tiefe gekommen, und daß er öfters diesem Uebel abgeholfen habe, wenn er die Uhr öfterer, als gewöhnlich aufgezogen habe.

(*) Man lese hierüber die Abhandlung der Acad. der Wissensch. zu Paris. Der teutsch. Uebersetz. 1 Th. Seit. 391. folg. und 6 Band. Seit. 376. folg. B.

gen könne, so setze man nach der 108te Figur, daß der Punkt A das äusserste der Spindel oder einer horizontalen Stange sey, die auf ihrer Axe ruhet, und durch den Stoß der Zähne des letzten Rades, welches man das Steigrad nennet, hin und her beweget wird. An diesem Punkt sey das Pendul AM aufgehangen, welches aus 2 Theilen bestehet, wovon der unterste Theil SM unbeugsam, und der oberste Theil beugsam ist, wie ein Faden, kleine Kette, oder ein sehr dünnes metallenes Blättchen. Einige Linien von dem Punkt A, in welchem das Pendul aufgehenget ist, entfernt, sey an der Spindel eine Art von Winkelmaaß, welches man eine Gabel nennet, bevestigt, dessen einer Schenkel vertical herunter geht, und der andere dadurch horizontal liegt; Dieser horizontale Schenkel sey fast seiner ganzen Länge nach ausgehöhlet, damit der unbeugsame Theil des Pendels dadurch gehen könne, und endlich seyen an beyden Seiten von A 2 Bleche AE und AB, die nach dem Bogen einer Cycloide gebeugt sind, deren Axe BD oder AR die Hälfte des Pendels AM sey.

Aus dieser Construction erhellet, daß die Zähne des Steigrades an die Spindellappen der Spindel anstossen und diese Spindel dadurch um ihre Axe bewegen werden. Die Gabel, die durch diese Bewegung angezogen wird, wird den unbeugsamen Theil des Pendels, der in ihrem horizontalen Arm angebracht ist, mit sich fortbewegen. Diesem wird der beugsame Theil folgen, welcher an eines von den cycloidischen Blechen anstossen und sich beugen oder über dasselbe sich aufwickeln wird. Sobald aber das Steigrad aufhöret gegen die Spindellappen zu würken, so wird das Pendel durch sein eigenes Gewicht herunter sinken, und indem es über die Verticallinie AM heraus gehet, wird es seinen beugsamen Theil auf der anderen Cycloide AB aufwickeln. So gehet es nun, so lange die Schwingungen dauren, immer fort. Itzt wird man nach dem §. 29. 30 finden, daß der äusserste Punkt M eines solchen Pendels nothwendig eine Cycloide oder einen Theil einer

Cyclo-

Cycloide beschreiben werde, und daß also seine Schwingungen, sie mögen groß oder klein seyn, beständig **isochronisch** oder von gleicher Dauer seyn werden (§. 33).

§. 35.

Da es sehr schwer ist, die Bleche nach einem Bogen einer Cycloide sehr genau zu beugen, und da der biegsame Theil des cycloidischen Pendels Veränderungen von Seiten der Luft unterworfen ist, so ist diese vortrefliche Erfindung, welche anfänglich mit allgemeinem Beyfall aufgenommen wurde, abgeschaffet worden. Man gebraucht wieder cirkelförmig sich bewegende Pendule. Allein eine Entdeckung, die im ganzen auch nicht glücket, ist doch allemal zum Theil gut. Man hat bemerket, daß kleine cirkelförmige Oscillationen, die in Bögen vor ungefehr 3 oder 4° geschehen, nicht merklich von dem Bogen einer Cycloide unterschieden sind (*). Sind folglich diese letzteren von einer gleichen Dauer, so sind jene cirkelförmigen es nothwendig auch. Würklich beweiset es die Erfahrung, daß man mit dieser Sorgfalt Pendeln bekomme, die schwerlich einer grössern Vollkommenheit fähig zu seyn scheinen: Und wir haben dieselben einer krummen Linie zu verdanken, von welcher man sich allem Ansehen nach nicht viel versprechen konnte. Dieses kann man aus der folgenden Geschichte der Cycloide beurtheilen.

Historie

(*) Man lese unter andern *Mako Phys. T. 1.* S. 116. und des ganzen 3ten Abschnitts 1stes Capitel. Es kann gezeiget werden, daß, wenn unter 2 gleichen Pendeln, die in Cirkelbogen oscilliren, das eine die allerkleinsten Schwingungen und das andere Schwingungen von 3 Graden macht, daß alsdenn auch nach 11382 Vibrationen der Unterschied noch nicht eine Schwingung betrage. Wenn aber das 2te Pendul nur Schwingungen von 2 Graden macht, so wird man diesen Unterschied auch noch nach 29000 Schlägen nicht bemerken. Der Vater Boscowich, dieser gelehrte Jesuit, hat den Beweis davon gegeben. B.

Historie der Cycloide.

Diese krumme Linie wird immer vor unsern Augen beschrieben und nichts destoweniger findet man nicht die geringste Spur davon bey den Alten (*). Der Vater Mersennus, einer von den Leuten in Frankreich, die das mehrste zum Fortgange der höhern Wissenschaften beygetragen haben, bemerkte zuerst, daß sie sich in der Natur befinde. Wie er durch die Strassen von *Nevers* im Jahr 1615 ging, so heftete er seine Augen auf einem Nagel eines von den Rädern eines sich bewegenden Fuhrwerks. Er machte seine Betrachtungen darüber, daß

(*) Daß der Herr Abt diese Erfindung dem Mersennus beyleget, das geschiehet mehr aus einer zu zärtlichen Vaterlands-Liebe, als daß es für eine gewisse Wahrheit bewiesen werden könnte. Selbst ein Bernoulli setzet in seinen Werken das 1599te Jahr für das Jahr der Erfindung, und er nimmt ohne Zweifel den Grund seiner Behauptung aus einem Briefe des alten Galilaeus, den er 1639 an seinen würdigen Schüler den Torricelli schrieb, worinn er ihm die Versicherung gab, daß er schon vor 40 Jahren darüber nachgedacht habe, und sie ihrer angenehmen Gestalt wegen für Bögen zu einer Brücke dienlich halte. So viel ist indessen gewiß, daß die Untersuchungen des Galilaeus über die Cycloide ganz fruchtloß abliefen. Nach seinem Tode erfand Torricelli den Innhalt der Fläche derselben und der edle Schüler des Galilaeus Viviani die Tangenten. Torricelli machte diese Entdeckungen in einem Anhange zu seinen Werken bekannt. Roberval, dieser Mann von wunderbarem Character, übertriebenem Ehrgeitz und unanständiger Grobheit, schrieb einen höchst pedantischen Brief deswegen an den Torricelli. Bernoulli sagt, man hätte aus der Hitze und Lebhaftigkeit ihres Streites glauben sollen, daß das Wohl des Vaterlands in Gefahr sey. So ein elendes Ding, sagt Hr. *Saverien* ist es um die Erfindung! Wie selten bleibt man ein ruhiger Besitzer von der damit verbundenen Ehre. Ausser der Geschichte der Cycloide vom Pascal und Groning empfehle ich des Montucla Historie der Mathematik zum weitern Nachlesen. B.

daß die Bewegung dieses Nagels von 2 Bewegungen zu gleicher Zeit zusammengesetzt sey, deren eine den Nagel vorwärts, die andere aber ihn um die Axe des Rades herum trieb. Es beschrieb folglich ein solcher Punkt eine Linie in der Luft, die weder eine grade noch eine cirkelförmige war. Er bemühete sich aber vergebens ihre Natur aufzusuchen. Wie er im Jahr 1634 seine Speculationen über diese krumme Linie wieder vornahm, so gab er dem **Roberval** von seinen gefundenen Schwierigkeiten Nachricht. Dieser lösete sie ihm auf. Zuerst bemühete man sich des Verhältniß des cycloidischen Raums gegen die Fläche des beschreibenden Cirkels zu finden. **Roberval** fand, daß sich die Cycloide zum Cirkel verhielt wie 3 : 1. Die Aufgabe aber, die Tangente derselben zu bestimmen, hielte ihn auf. **Cartes** zeigte 1638 zuerst die Methode sie zu ziehen. Hierauf hat man dem **Wren**, einem Engelländer die Rectification dieser krummen Linie zu danken. Dadurch weiß man, daß sie 4 mal so groß, als ihre Axe ist. Hierauf gründete der Holländer, Hr. **Hyghens von Zuitlichem** seinen Beweis des **Isochronismus** in der Cycloide. Er machte seine Entdeckung 1673 in seinem *Horologio oscillatorio* bekannt. Dieses Werk ist so voll Genie, daß selbst nach dem Bekenntniß der geschicktesten Männer in der Uhrmacherkunst, dieser vortrefliche Mathematiker mehr zur Vollkommenheit dieser schönen Maschine beygetragen hat, als alle seine Vorgänger und alle seine bisherigen Nachfolger (*a*).

(*a*) Man lese *Baillet* im Leben des *Cartes* und *Pascal* in der Historie der Cycloide.



Innhalt.

Innhalt
der in diesem Buche vorkommenden Materien.

Von der Wurzelrechnung.

Von der Parabel.

Auf=

Abhandlung von einigen Methoden, den Innhalt der Flächen und der Körper zu finden.

Me=

Gebrauch der Parabel beym Bombenwerfen.

Gebrauch der Parabel in Verfertigung der Sprachröhre.

Abhandlung über die Erfindung der Sprachröhre.

Von der Ellypse.

Gebrauch der Ellypse in der Dioptrick oder bey Verfertigung der Brenngläser und anderer Instrumenten, als Augengläser, wodurch man das Gesicht verstärket, oder die Fehler derselben verbesseret.

Abhandlung über die Erfindung des Gesetzes der Refraction.

Von der Hyberbel.

Wenn

Die-

trum

Von conjugirten Hyperbeln.

Gebrauch der Hyperbel in der Dioptrick, theils bey Verfertigung der Brenngläser, theils bey Construction der Augengläser.

Wichtige Bemerkung bey der Ausübung dieser Theorie.

Abhand-

Abhandlung über die Brennspiegel des Archimeds und Proclus.

Von der Cissoide.

Von der Muschellinie.

Von der Quadratrix.

Wo=

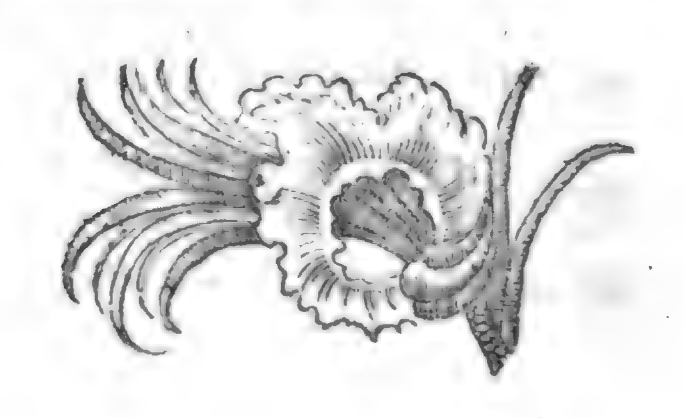
Von der Spirallinie.

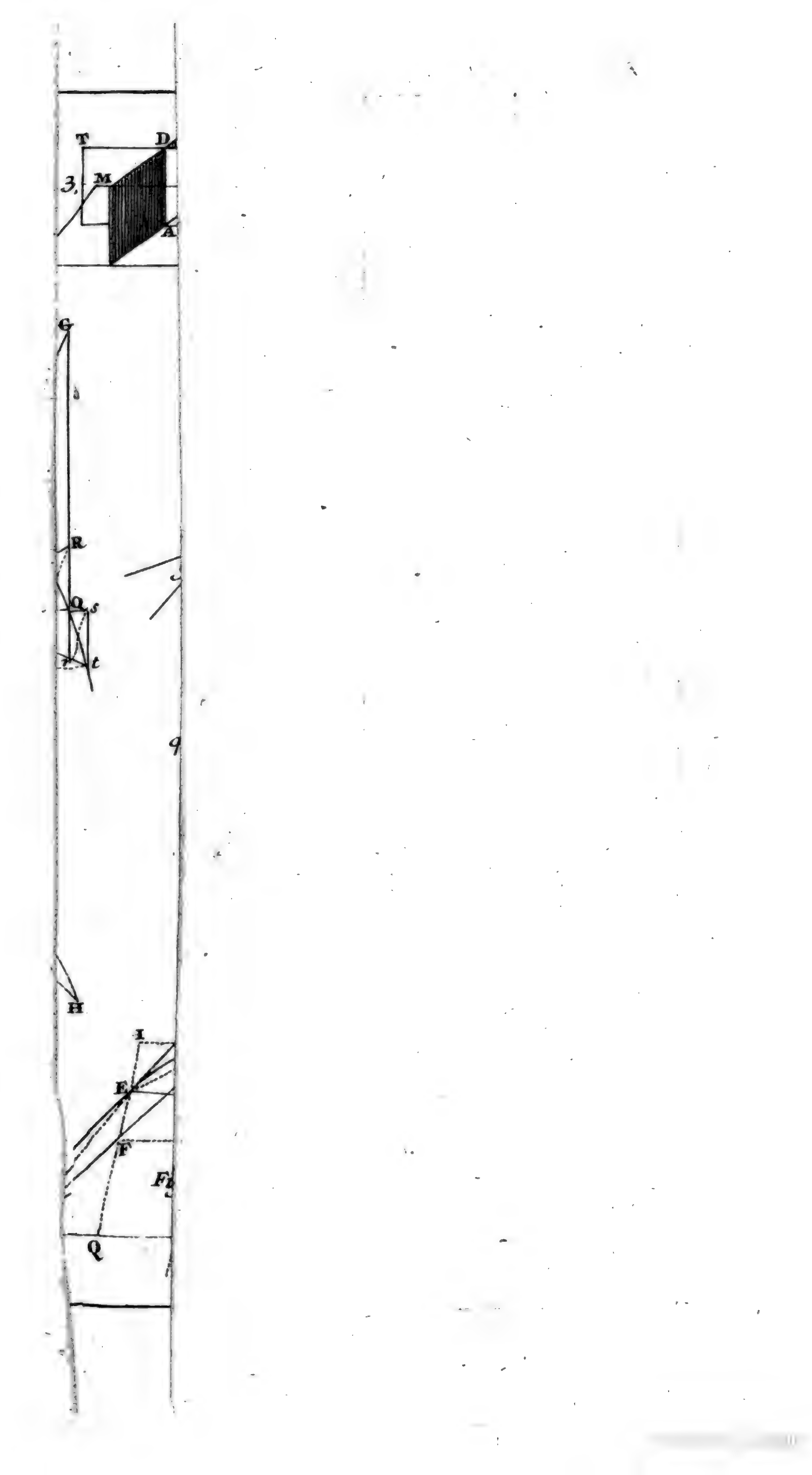
Von der Cycloide.

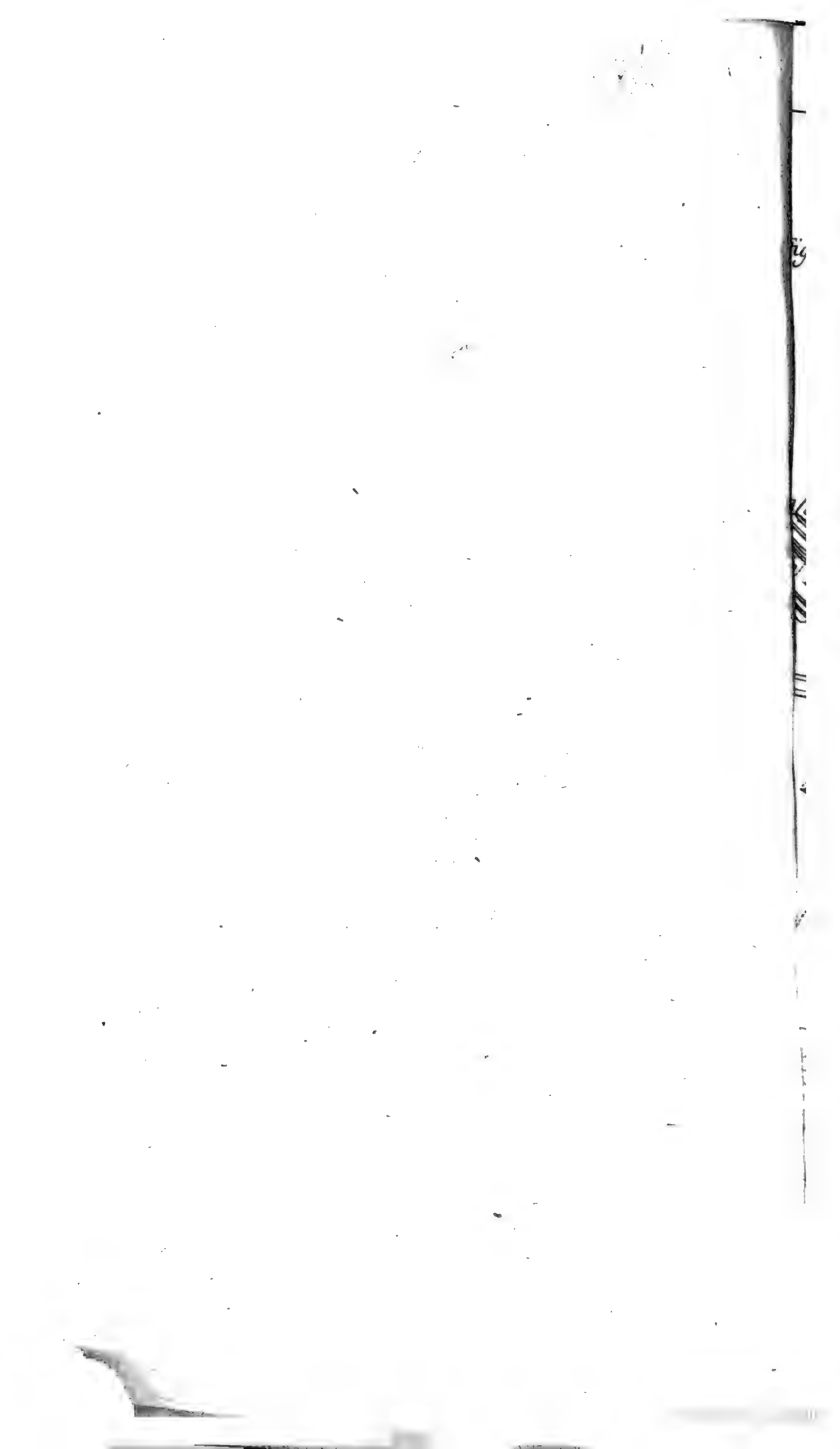
Von der Linie der Evolution der Cycloide.

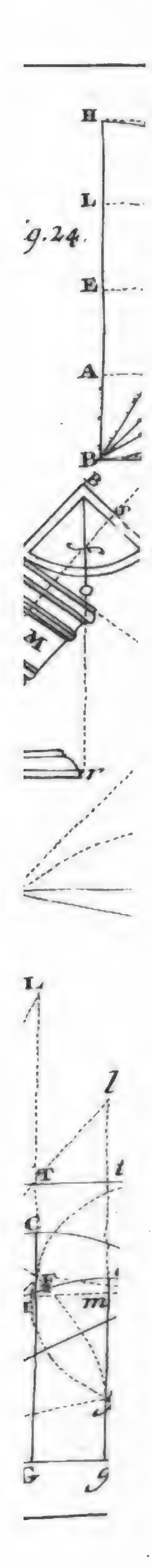
Erklärung der Gründe, auf welchen sich der Beweis des Isochronismus in der Cycloide stützet.

Historie der Cycloide.

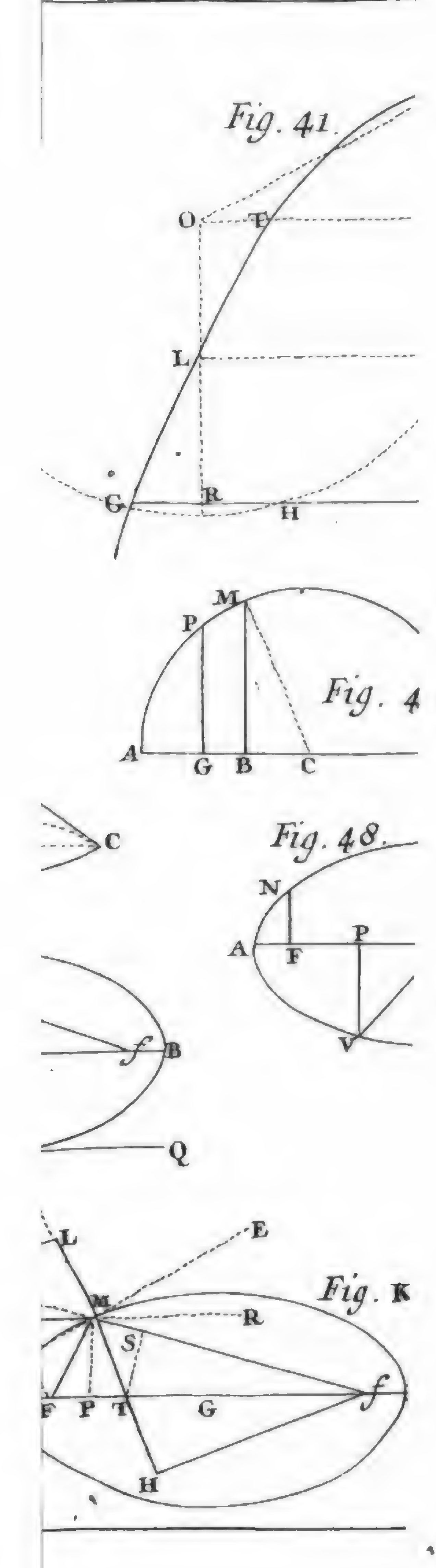


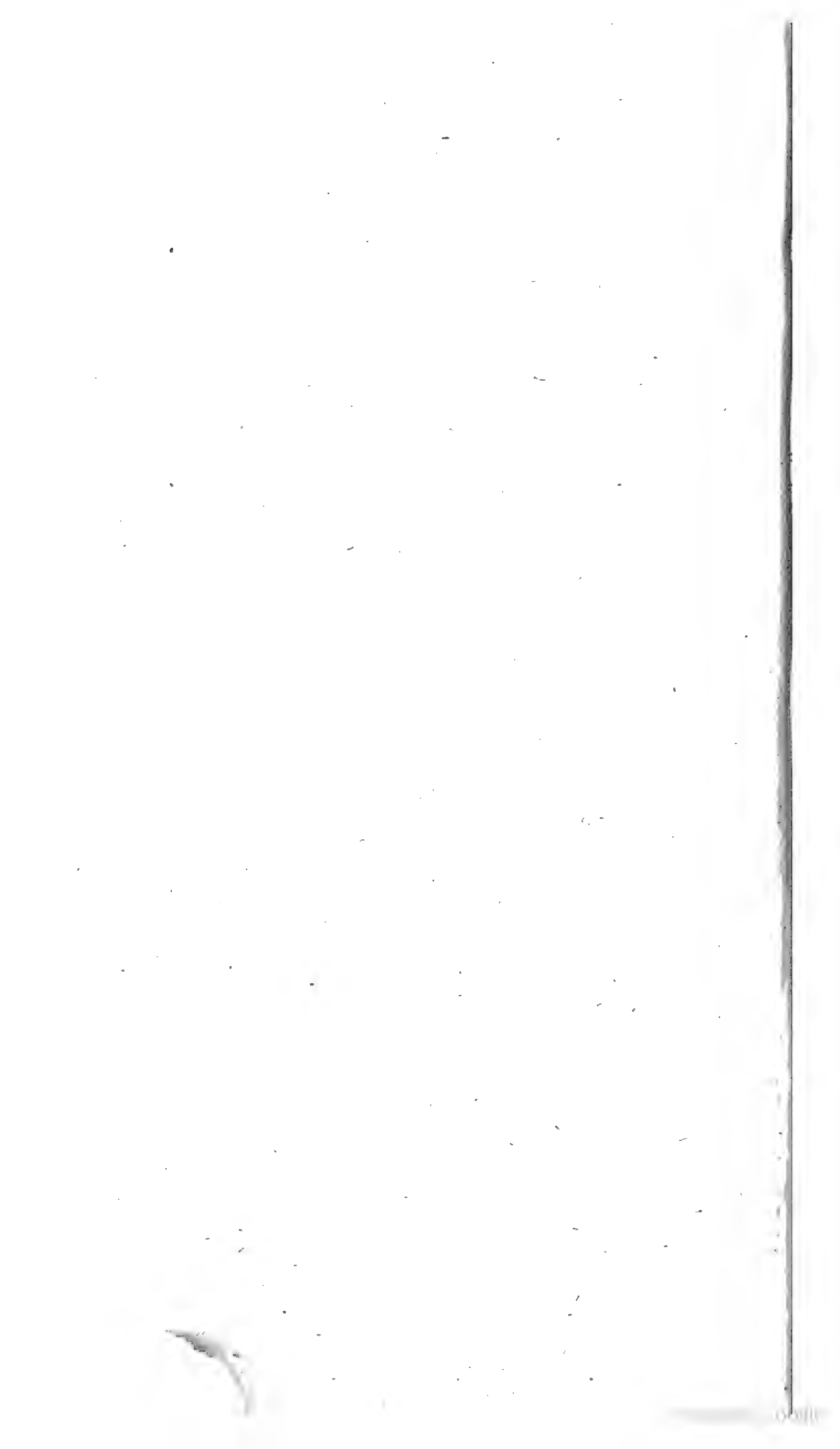

T
D
M
3.
A
G
R
Q
s
t
q
H
I
E
F
Q

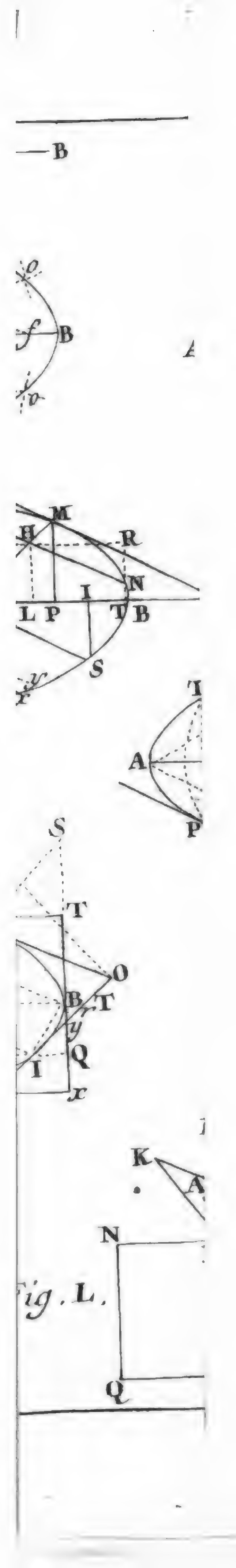


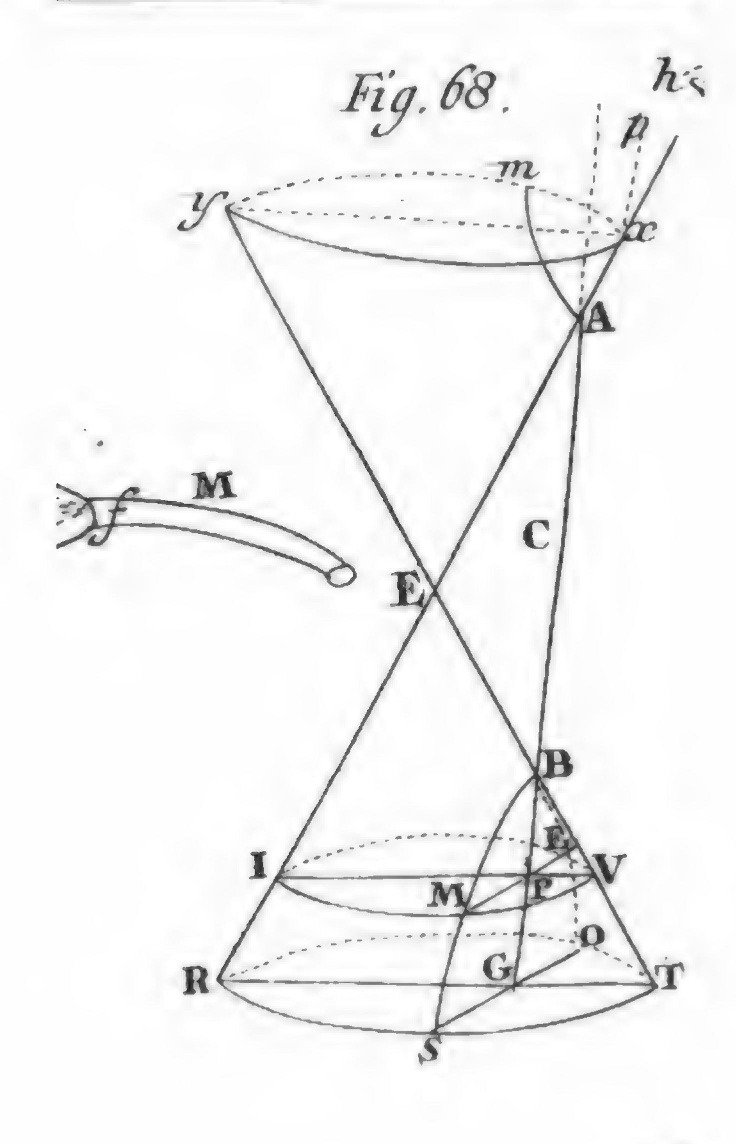

g.24.
H
L
E
A
B
B
M
r
L
l
T
t
C
F
m
E
G
g

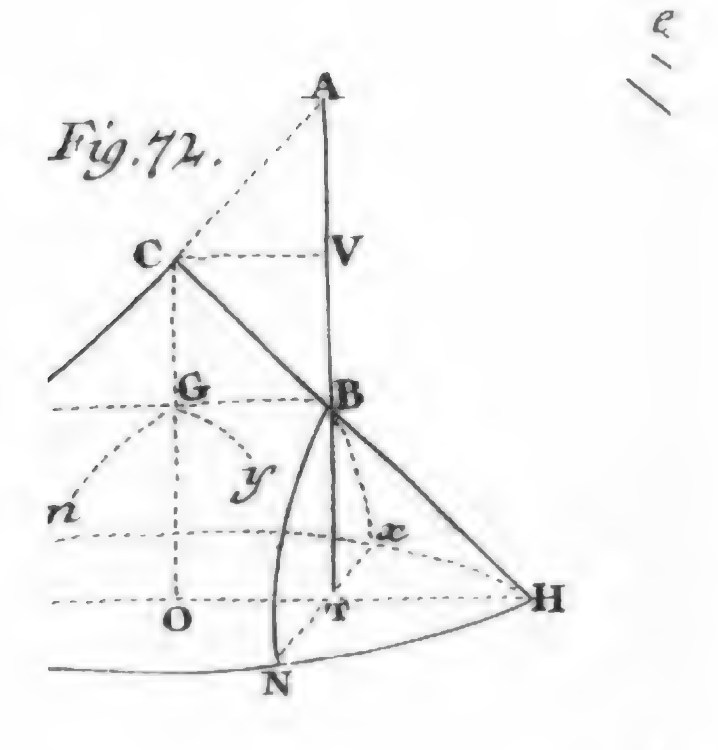
36.

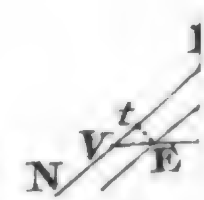

Fig. 41.
O
E
L
G
R
H
M
P
Fig. 4
A
G
B
C
C
Fig. 48.
N
A
F
P
V
f
B
Q
L
E
M
Fig. K
R
S
F
P
T
G
f
H

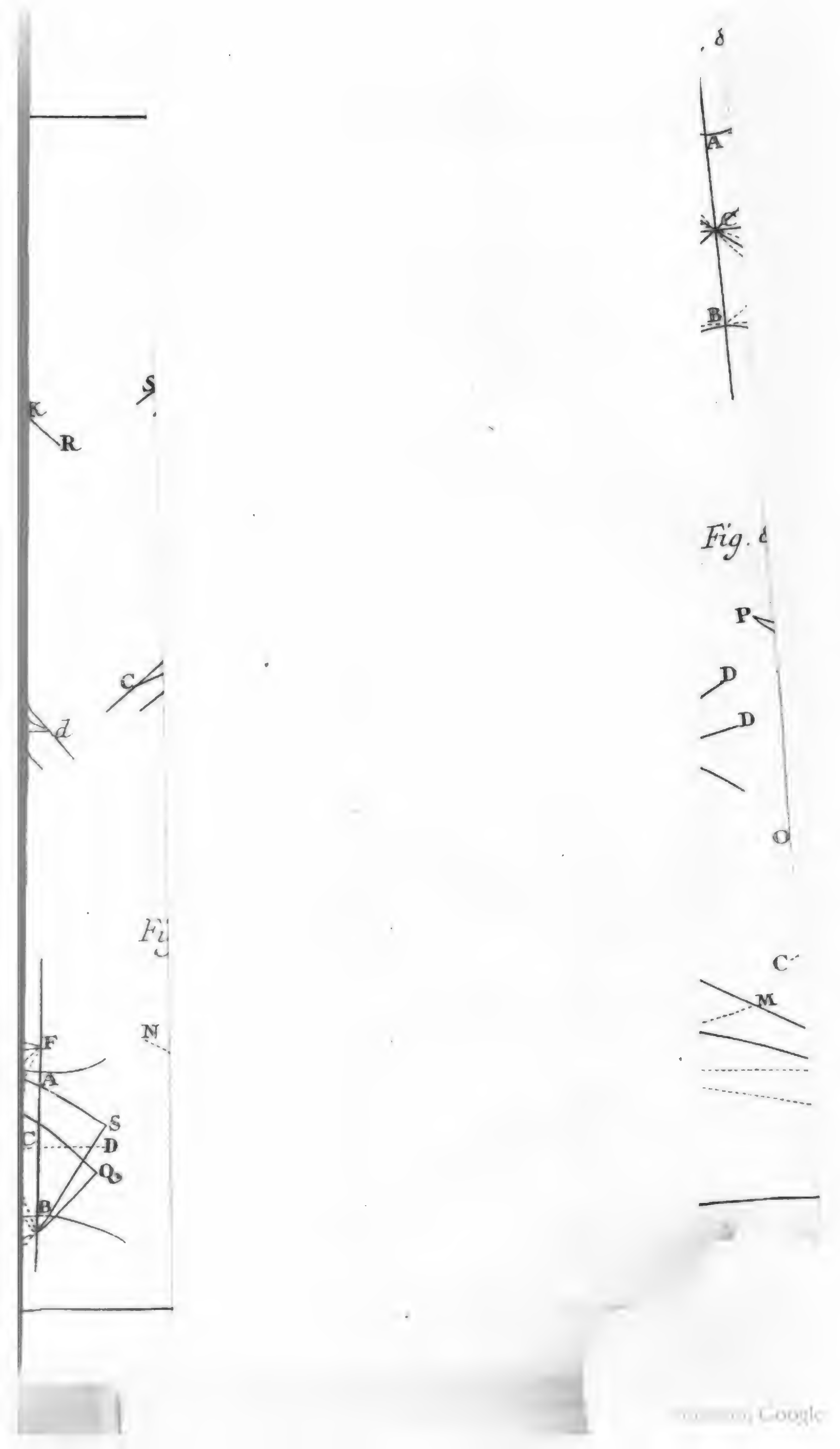


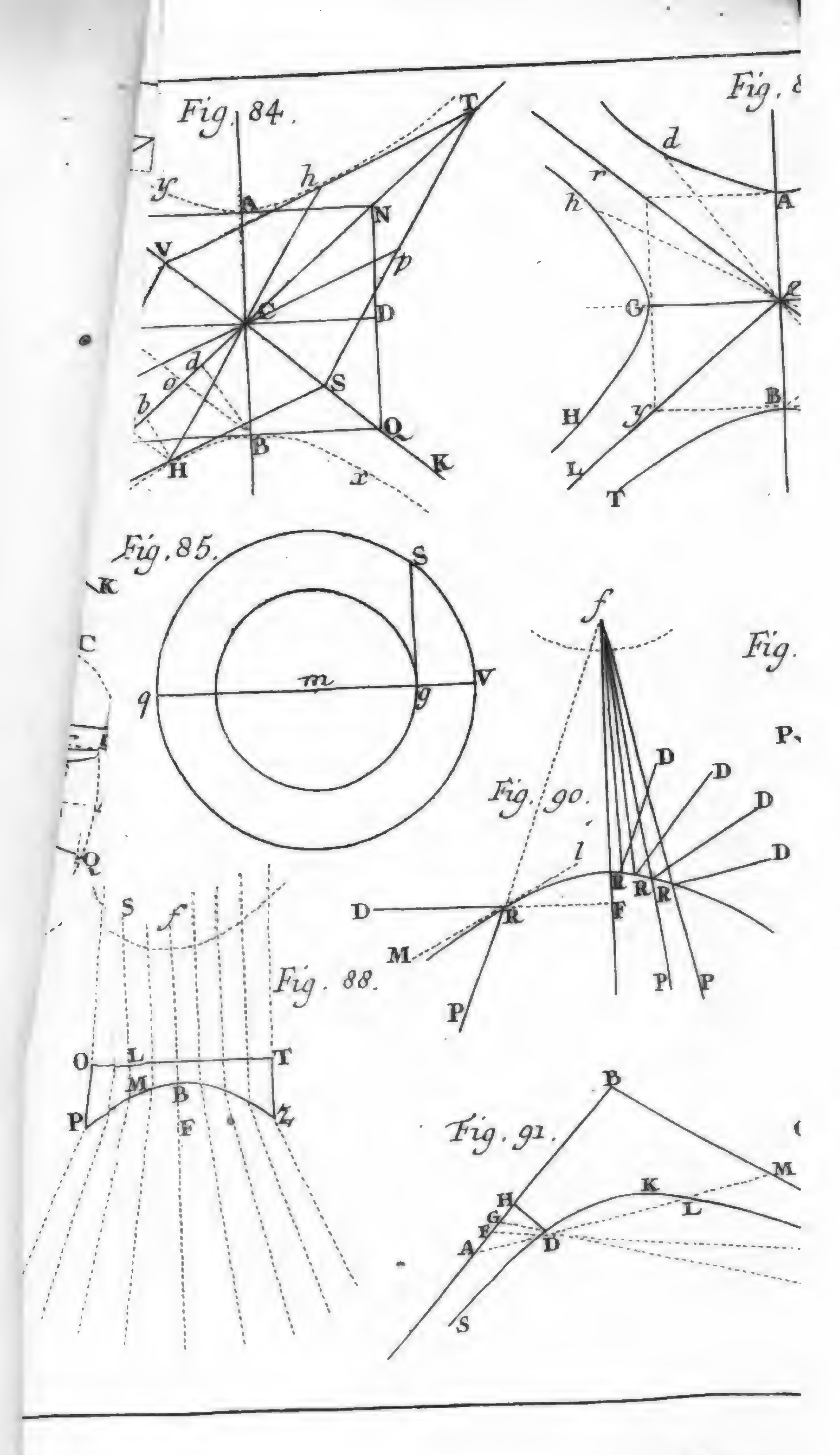

B
o
f
B
v
M
H
R
N
L P
I
T B
S
y
T
A
P
S
T
O
B
T
y
Q
I
x
K
A
N
Fig. L.
Q

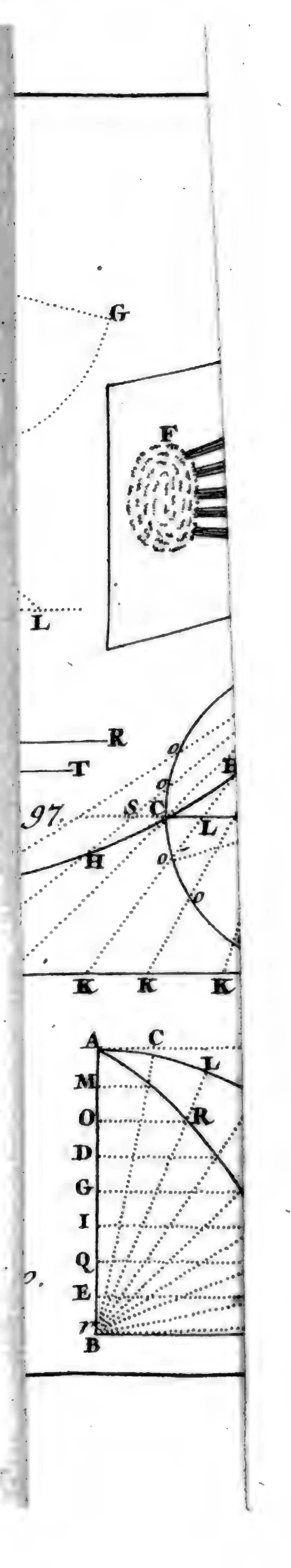

Fig. 68.
h
p
m
y
x
A
M
f
C
E
B
I
E
V
M
P
O
R
G
T
S


Fig. 72.
A
C
V
G
B
y
n
x
O
T
H
N
e

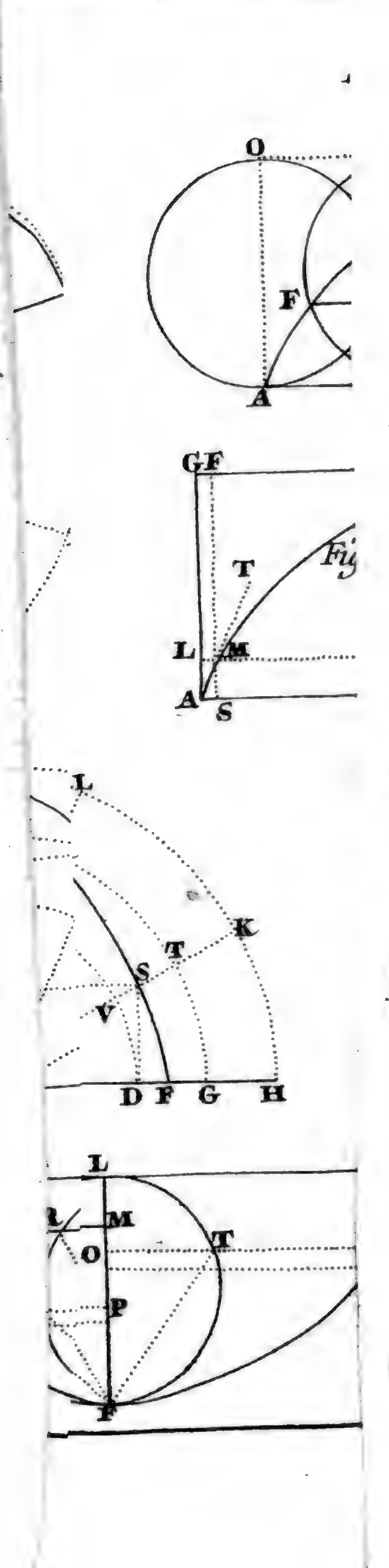

t
V
N
E


δ
A
C
B
S
K
R
Fig. 8
P
D
D
O
C
d
Fi
C
M
N
F
A
S
C
D
Q
B


Fig. 84.
T
y
h
A
N
V
p
C
D
d
o
b
S
Q
B
H
x
K
Fig. 85.
S
K
C
m
q
g
V
Q
S
f
Fig. 88.
O
L
T
M
B
P
F
Z
f
Fig. 90.
D
D
D
D
l
R
R
R
D
F
R
M
P
P
P
Fig. 91.
B
M
K
H
G
L
F
A
D
S
d
r
h
A
G
H
y
B
L
T



G
F
L
R
T
97.
S C
L
H
K K K
A C
L
M
O R
D
G
I
Q
E
B


O
F
A
GF
T
Fig
L M
A S
L
K
T
S
V
D F G H
L
R M
O
T
P
F

